Autoreferat

1. *Imię i nazwisko:* **Anna Ochal**

2. *Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:*

1993 magisterium z matematyki, Instytut Matematyki Uniwersytet Jagielloński

1994 magisterium z informatyki, Instytut Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

2001 doktorat z matematyki, Wydział Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Jagielloński

Rozprawa doktorska
Optimal Control Problems for Evolution Hemivariational Inequalities of Second Order, (promotor: Stanisław Migórski)

3. *Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:*

2004 - Adiunkt w Katedrze Optymalizacji i Sterowania w Instytucie Informatyki na Uniwersytecie Jagiellońskim

1994-2004 Asystent w Katedrze Metod Numerycznych w Instytucie Informatyki na Uniwersytecie Jagiellońskim

2002 Postdoc Fellowship on Evolution Equations for Deterministic and Stochastic Systems, Ecole Politechnique, Paris, France (9 miesięcy)

1995 Scholarship at National Technical University of Athens, Athens, Greece (3 miesiące)

4. *Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):*

a) *tytuł osiągnięcia naukowego:*

Nierówności hemiwariacyjne i ich zastosowania w zagadnieniach kontaktowych mechaniki

b) *autor/autorzy, tytuł /tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa:*

Rozprawa habilitacyjna składa się z następujących publikacji (w porządku chronologicznym):

A1. A. Ochal, Existence results for evolution hemivariational inequalities of second order, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications*, **60** (2005), 1369-1391

A2. S. Migórski, A. Ochal, A unified approach to dynamic contact problems in viscoelasticity, *Journal of Elasticity,* **83** (2006), 247-276 (*mój udział procentowy: ok. 70%*)

A3. Z. Liu, S. Migórski, A. Ochal, Homogenization of boundary hemivariational inequalities in linear elasticity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **340** (2008), 1347-1361 (*mój udział procentowy: nie mniej niż 50%*)

A4. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Integrodifferential hemivariational inequalities with applications to viscoelastic frictional contact, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,* **18** (2008), 271-290 (*mój udział procentowy: 60%*)

A5. S. Migórski, A. Ochal, Quasistatic hemivariational inequality via vanishing acceleration approach, *SIAM Journal on Mathematical Analysis,* **41** (2009), 1415-1435 (*mój udział procentowy: ok. 60%*)

A6. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, History-dependent subdifferential inclusions and hemivariational inequalities in contact mechanics, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications,* **12** (2011), 3384-3396 (*mój udział procentowy: ok. 60%*)

c) *omówienie celu naukowego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania:*

1 Wprowadzenie

W ciągu ostatnich dwudziestu lat został osiągnięty znaczący postęp w modelowaniu i analizie matematycznej różnych procesów występujących w zjawiskach kontaktowych między ciałami odkształcalnymi. W rezultacie wyłoniła się, szybko rozwijająca się obecnie, matematyczna teoria mechaniki zjawisk kontaktowych, przed którą ciągle stoi wiele otwartych problemów, dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań, ich stabilności i asymptotyki. Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie krótkiego przeglądu rezultatów, które częściowo przyczyniły się do rozwoju tej teorii. Dotyczą one inkluzji operatorowych i nierówności hemiwariacyjnych, a zostały zawarte w pracach składających się na mój dorobek naukowy, w szczególności na rozprawę habilitacyjną.

Matematyczne modelowanie zagadnień kontaktowych mechaniki jest dziedziną żywą i uprawianą w wielu ośrodkach ze względu na wciąż otwarte problemy matematyczne. Szereg matematycznych modeli zagadnień kontaktowych wykorzystuje wypukłość funkcjonałów energii i prowadzi do teorii nierówności wariacyjnych, która została zapoczątkowana w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Była i jest ona rozwijana przez grupę matematyków, do której należeli i należą m.in. S.S. Antman, C. Baiocchi, H. Brezis, F.E. Browder, A. Capelo, G. Duvaut, G. Fichera, A. Friedman, P. Hartman, D. Kinderlehrer, H. Lewy, J.L. Lions, E. Magenes, G. Stampacchia i inni. Nierówności wariacyjne, bazujące na wypukłych funkcjonałach energii, mają precyzyjne znaczenie fizyczne. Wyrażają one zasadę wirtualnej pracy lub mocy, wprowadzoną przez Fouriera w 1823r. Prototypami zagadnień brzegowych prowadzących do nierówności wariacyjnych są m.in. zagadnienie Signoriniego-Fichery oraz problem tarcia w teorii sprężystości.

Wiele zjawisk fizycznych nie daje się jednak opisywać przy pomocy wypukłych potencjałów. Zrodziło to konieczność uogólnień teorii nierówności wariacyjnych. Takie uogólnienie z wykorzystaniem teorii Clarke'a zaproponował w latach osiemdziesiątych XX wieku P.D. Panagiotopoulos. Zapoczątkował on teorię nierówności hemiwariacyjnych znajdującą zastosowania w modelowaniu zjawisk fizycznych występujących m.in. w mechanice i inżynierii, gdzie rozważanie bardziej realistycznych praw konstytutywnych i/lub warunków brzegowych prowadzi w naturalny sposób do niewypukłych i niegładkich potencjałów (patrz Panagiotopoulos [16, 18] oraz Naniewicz i Panagiotopoulos [15]). Nierówności hemiwariacyjne opierają się na pojęciu uogólnionej podróżniczki w sensie Clarke'a funkcji spełniających lokalny warunek Lipschitza (patrz Clarke [4], Chang [2]). Dzięki zastosowaniu uogólnionej podróżniczki możliwe stało się rozważanie niewypukłych i niegładkich funkcjonałów energii, co doprowadziło do badań niemonotonicznych i wielowartościowych praw rządzących zjawiskami fizycznymi. Rezygnacja z wypukłości jest ważna, ponieważ pozwala objąć szersze klasy zagadnień matematycznych i zwiększa możliwości zastosowań do problemów, które były badane do tej pory tylko na drodze eksperymentów numerycznych. Zjawiska kontaktowe opisywane przez układy równań różniczkowych cząstkowych z wielowartościowymi i niemonotonicznymi prawami w postaci podróżniczki Clarke'a nie były dotychczas szeroko badane w literaturze światowej. Uzyskane wyniki matematyczne dotyczące nierówności wariacyjnych i hemiwariacyjnych oraz metod wariacyjnych dla zagadnień niegładkich i niewypukłych pozwoliły lepiej zrozumieć rolę wypukłości lub jej braku w konkretnych zjawiskach mechanicznych.

Nierówności hemiwariacyjne, będące uogólnieniem nierówności wariacyjnych, są bardzo intensywnie badane ze względu na liczne zastosowania w wielu dziedzinach fizyki, mechaniki, inżynierii i ekonomii. Znajdują one wiele zastosowań w konkretnych zagadnieniach mechaniki, np. przy opisie zachowań ciał sprężystych, lepkosprężystych i materiałów z krótką lub długą pamięcią. Nierówności hemiwariacyjne modelują zjawiska fizyczne, dla których prawa konstytutywne lub jednostronne warunki brzegowe są opisywane przy wykorzystaniu niewypukłych i niegładkich funkcjonałów energii. W wielu sytuacjach prowadzi to do rozważania równań fizyki matematycznej z operatorami wielowartościowymi, co z jednej strony komplikuje matematyczny sposób badania tych problemów, zaś z drugiej strony pozwala na precyzyjne modelowanie i rozwiązywanie zagadnień, które dotychczas były problemami otwartymi. Badania dotyczące zarówno poszukiwania modeli opisujących kontakt ciała lepkosprężystego ze sztywnym podłożem, jak i nierówności hemiwariacyjnych, do których takie modele prowadzą, są z matematycznego punktu widzenia niezwykle interesujące i frapujące oraz mają duże znaczenie praktyczne.

Choć pierwsze prace w latach osiemdziesiątych, dotyczące nierówności hemiwariacyjnych, miały charakter inżynierski, to jednak ze względu na zastosowania w mechanice i ekonomii, teoria nierówności hemiwariacyjnych jest dziś systematycznie rozwijana i stanowi ważny obiekt zainteresowań matematyków w wielu ośrodkach na świecie, np. Australia (Gao), Chiny (Guo, Huang, Liu, Lu, Peng, Xiao, Zhou), Czechy (Haslinger, Jarušek, Outrata), Finlandia (Miettinen), Francja (Adly, Dinca, Goeleven, Motreanu, Sofonea), Grecja (Filippakis, Kyritsi, Papageorgiou, Stavroulakis), Irlandia (O'Regan), Korea (Ha, Park), Niemcy (Carl), Polska (Denkowski, Gasiński, Naniewicz, Zagrodny), Rumunia (Barbu, Bocea, Costea, Kristály, Matei, Rădulescu), Słowacja (Bock, Lovišek), USA (Hu, Kuttler, Le, Mordukhovich, Shillor), Węgry (Kurutz), Włochy (Degiovanni, Marano), itd.

Zjawiska lepkościowe związane z kontaktem ciał odkształcalnych spotykamy na co dzień. Rola tych zjawisk wzrasta, gdy opisujemy np. materiały kompozytowe, znajdujące zastosowania w wielu dziedzinach techniki, m.in. w budownictwie, w technice lotniczej i astronautyce, w przemyśle środków transportu, w produkcji maszyn itd. (patrz Panagiotopoulos [17]-[21], Naniewicz i Panagiotopoulos [15], Shillor, Sofonea i Telega [25], Sofonea, Han i Shillor [26]). Wiele zagadnień, w których występuje tarcie, pojawia się w przemyśle i życiu codziennym. Zjawiska kontaktu klocków hamulcowych z kołami pojazdu, opon z powierzchnią drogi, tłoków z osłoną cylindra silnika, obuwia z powierzchnią chodnika czy kontaktu płyt tektonicznych są tylko prostymi przykładami. Jednocześnie bardziej złożone modele, uwzględniające np. efekty cieplne, zniszczenie materiału, przyleganie itd., mogą służyć wyjaśnianiu znanych zjawisk oraz przyczyniać się do odkrywania nowych.

Jednym z zadań niniejszego opracowania jest zbadanie modeli matematycznych, mających swoje źródła w opisie zjawisk kontaktowych mechaniki, w których w sposób naturalny występują warunki brzegowe i/lub prawa konstytutywne, które można uzyskać przy pomocy niewypukłych i na ogół nieróżniczkowalnych potencjałów, zwanych w takim przypadku superpotencjałami. Okazuje się, że różne zjawiska kontaktu można modelować z wykorzystaniem wielowartościowych i niemonotonicznych związków w postaci podróżniczki Clarke'a funkcji lokalnie lipschitzowskich. Związki te opisują uogólnione prawa między naprężeniem normalnym i normalną składową przemieszczenia lub prędkości oraz między wektorem naprężenia stycznego i styczną składową przemieszczenia lub prędkości. Ze względu na niemonotoniczność praw kontaktowych modele matematyczne formułuje się jako nierówności hemiwariacyjne lub układy nierówności hemiwariacyjnych. Należy podkreślić, że otrzymane w rozprawie wyniki wnoszą rzeczywisty wkład w rozwój analizy wariacyjnej, a w szczególności teorii nierówności wariacyjnych i hemiwariacyjnych oraz teorii metod wariacyjnych dla zagadnień niegładkich i niewypukłych.

W kolejnych rozdziałach niniejszego autoreferatu zostaną omówione rezultaty otrzymane w pracach składających się na rozprawę habilitacyjną. Nacisk będzie położony na całościowy opis zagadnień, zaś szczegółowe sprecyzowanie wszystkich założeń zostanie pominięte. Autoreferat omawia różnego typu inkluzje operatorowe i nierówności hemiwariacyjne, podając w rozdziale 2 główne rezultaty o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań. Zastosowania tych wyników zawiera rozdział 3, dotyczący wybranych zagadnień mechaniki kontaktu. W rozdziale 4 omówiono pozostały dorobek naukowy, przybliżając główną tematykę prac habilitanta niewchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej.

2 Inkluzje operatorowe i nierówności hemiwariacyjne

Rozprawa habilitacyjna pt. "Nierówności hemiwariacyjne i ich zastosowania w zagadnieniach kontaktowych mechaniki" składa się z jednotematycznego cyklu sześciu publikacji [A1]-[A6]. Należy podkreślić, że wszystkie zagadnienia, występujące w tych pracach, mają swoje źródła w konkretnych problemach mechaniki teoretycznej. Poniżej przedstawiony zostanie krótki przegląd rezultatów otrzymanych w pracach [A1]-[A6]. Główne wyniki dotyczą następujących zagadnień:

1. istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla ewolucyjnych inkluzji różniczkowych rzędu pierwszego i drugiego ([A1, A2, A4, A5]),
2. zależność rozwiązań ewolucyjnych inkluzji rzędu drugiego od parametrów ([A5]),
3. istnienie i jednoznaczność rozwiązania ewolucyjnych inkluzji z operatorem odpowiedzialnym za historię ([A4, A6]),
4. istnienie rozwiązań nierówności hemiwariacyjnych ([A1, A2, A4, A5, A6]),
5. modelowanie i analiza zagadnień kontaktowych w teorii sprężystości i lepkosprężystości ([A1-A6]).

Podstawowym pojęciem wykorzystywanym w sformułowaniu nierówności hemiwariacyjnych jest pojęcie uogólnionej podróżniczki funkcji lokalnie lipschitzowskiej, wprowadzone przez Clarke'a (patrz [4]). Dla lokalnie lipschitzowskiej funkcji $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, określonej na przestrzeni Banacha X, definiujemy uogólnioną pochodną kierunkową funkcji φ w punkcie $x \in X$ w kierunku $v \in X$ wzorem

$$\varphi^0(x; v) = \limsup_{y\to x, \lambda\downarrow 0} \frac{\varphi(y + \lambda v) - \varphi(y)}{\lambda}.$$

Uogólniony gradient funkcji φ w punkcie $x \in X$ jest podzbiorem przestrzeni dualnej X^* określonym następująco

$$\partial\varphi(x) = \{\, \zeta \in X^* \mid \varphi^0(x; v) \geq \langle \zeta, v\rangle_{X^*\times X} \text{ dla każdego } v \in X \,\},$$

gdzie $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ oznacza dualność między X i X^*. Zauważmy, że dla funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły uogólniony gradient redukuje się do zbioru jednoelementowego, złożonego z pochodnej funkcji. Ponadto, dla funkcji wypukłych, uogólniony gradient pokrywa się z pojęciem podróżniczki w sensie analizy wypukłej (por. [4]).

Praca [A1] stanowi nowatorskie podejście w teorii ewolucyjnych nierówności hemiwariacyjnych w przestrzeniach Banacha. Podejście to polega na skojarzeniu z nierównością hemiwariacyjną pewnej ewolucyjnej inkluzji operatorowej zawierającej niemonotoniczne i wielowartościowe odwzorowanie w postaci podróżniczki. Celem pracy [A1] jest zbadanie istnienia słabych rozwiązań dla ewolucyjnych nierówności hemiwariacyjnych rzędu drugiego. Inkluzje ewolucyjne, skojarzone z nierównościami hemiwariacyjnymi, są postaci

$$\text{(P1)} \qquad \begin{cases} u''(t) + A(t, u'(t)) + Bu(t) + \partial J(t, u(t)) \ni f(t) \quad \text{p.w. } t \in (0,T) \\ \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0 \end{cases}$$

oraz

$$\text{(P2)} \qquad \begin{cases} u''(t) + A(t, u'(t)) + Bu(t) + \partial J(t, u'(t)) \ni f(t) \quad \text{p.w. } t \in (0,T) \\ \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0, \end{cases}$$

gdzie $A\colon (0,T) \times V \to V^*$ i $B\colon V \to V^*$ są ustalonymi operatorami, $\partial J\colon (0,T) \times Z \to 2^{Z^*}$ oznacza odwzorowanie wielowartościowe wyznaczone przez podróżniczkę Clarke'a lokalnie lipschitzowskiego funkcjonału $J(t,\cdot)\colon Z \to \mathbb{R}$, $t \in (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $V \subset Z \subset H \approx H^* \subset Z^* \subset V^*$ są ustalonymi przestrzeniami Banacha oraz H^*, Z^* i V^* są przestrzeniami dualnymi odpowiednio do H, Z i V.

Inkluzje operatorowe (P1) i (P2) można zapisać odpowiednio w sposób równoważny jako nierówności hemiwariacyjne postaci

$$\text{(HVI1)} \qquad \begin{cases} \langle u''(t) + A(t, u'(t)) + Bu(t) - f(t), v\rangle_{V^*\times V} + J^0(t, u(t); v) \geq 0 \\ \hfill \forall\ v \in V, \text{ p.w. } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0 \end{cases}$$

oraz

$$\text{(HVI2)} \qquad \begin{cases} \langle u''(t) + A(t, u'(t)) + Bu(t) - f(t), v\rangle_{V^*\times V} + J^0(t, u'(t); v) \geq 0 \\ \hfill \forall\ v \in V, \text{ p.w. } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0, \end{cases}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*\times V}$ oznacza dualność między V i V^*. Głównymi rezultatami pracy [A1] są Twierdzenia 4 i 5, które podają warunki wystarczające istnieniu słabych rozwiązań dla zagadnień (P1) i (P2). Warunki te obejmują pseudomonotoniczny i koercytywny operator A, liniowy i dodatni operator B oraz lokalnie lipschitzowski funkcjonał J, którego podróżniczka spełnia odpowiedni warunek wzrostu. Ponadto twierdzenia te dostarczają informacji o regularności rozwiązania. Warto zauważyć, że w pewnych sytuacjach (por. np. założenie (H_1)) rezultaty o istnieniu rozwiązania mają charakter lokalny. Głównym narzędziem wykorzystywanym w pracy jest rezultat o surjektywności wielowartościowego operatora pseudomonotonicznego w przestrzeniach Banacha. Rezultat ten w przypadku operatora jednowartościowego pochodzi od Lionsa [13] i został uogólniony w pracy Papageorgiou, Papalini, Renzacci [23] na przypadek operatorów wielowartościowych.

Dowód Twierdzenia 4 składa się z trzech kroków. Najpierw, zakładając zwiększoną regularność warunku początkowego, zagadnienie (P1) sprowadzamy do inkluzji ewolucyjnej rzędu pierwszego. Następnie wykorzystując wspomniane twierdzenie o surjektywności z pracy [23], otrzymujemy istnienie rozwiązania inkluzji operatorowej rzędu pierwszego. Jest to możliwe, ponieważ operator wielowartościowy w inkluzji rzędu pierwszego ma własność L-uogólnionej pseudomonotoniczności. W ostatnim kroku, korzystając z gęstości włożenia odpowiednich przestrzeni Banacha, usuwamy założenie o zwiększonej regularności warunku początkowego, uzyskując istnienie rozwiązania inkluzji w sytuacji ogólnej. Analogicznie dowodzimy twierdzenie o istnieniu rozwiązania zagadnienia (P2). Odnotujmy, że jednoznaczność takiego rozwiązania można otrzymać przy silniejszych założeniach dotyczących operatora A i funkcjonału J, np. jeżeli operator A jest silnie monotoniczny i funkcjonał J spełnia warunek zrelaksowanej monotoniczności (por. Stwierdzenie 16). Wspomniana jednoznaczność rozwiązania nierówności hemiwariacyjnych jest pożądana w analizie numerycznej zagadnień kontaktowych mechaniki.

Wyniki pracy [A1] uogólniają rezultaty prac dotyczących hiperbolicznych nierówności hemiwariacyjnych z jednowymiarowymi potencjałami (por. m.in. Panagiotopoulos [20], Panagiotopoulos i Pop [22]) na przypadek funkcjonałów o wartościach w przestrzeniach wektorowych, co pozwala na zastosowania otrzymanych wyników do pewnych klas zagadnień mechaniki kontaktu. Należy podkreślić, że inkluzje operatorowe i nierówności hemiwariacyjne rozważa się w przestrzeniach Sobolewa o wartościach wektorowych, co umożliwia zastosowania do zagadnień kontaktowych mechaniki, bowiem wielkości fizyczne takie jak przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie są wektorami. Ponadto do opisu zagadnień mechaniki kontaktu często stosuje się funkcjonały całkowe, które są skojarzone z wielowartościowymi i niemonotonicznymi prawami w postaci podróżniczki, występującymi w warunkach brzegowych typu (5) i (6) (por. rozdział 3). Wybrane zastosowania nierówności hemiwariacyjnych (HVI1) i (HVI2) w mechanice kontaktu zostały dokładniej opisane w kolejnym rozdziale.

Praca [A2] koncentruje się na ewolucyjnych inkluzjach operatorowych rzędu drugiego i dynamicznych nierównościach hemiwariacyjnych. Główny nacisk położony jest na modele matematyczne opisujące dynamiczne zagadnienia kontaktowe teorii lepkosprężystości. Praca przedstawia jednolite podejście do tych modeli, pozwalające na uogólnienia dotychczas znanych rezultatów (por. Chau, Han, Sofonea [3], Migórski [14], Rochdi, Shillor, Sofonea [24]). Ścisły opis matematyczny tych modeli wymaga wprowadzenia abstrakcyjnej inkluzji rzędu drugiego postaci

$$\text{(P3)} \qquad \begin{cases} u''(t) + A(t, u'(t)) + Bu(t) + F(t, u(t), u'(t)) \ni f(t) \quad \text{p.w. } t \in (0, T) \\ \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0, \end{cases}$$

gdzie $A\colon (0,T) \times V \to V^*$ jest operatorem nieliniowym, $B\colon V \to V^*$ jest operatorem liniowym i $F\colon (0,T) \times V \times V \to 2^{Z^*}$ jest odwzorowaniem wielowartościowym. W szczególnych przypadkach zagadnienie (P3) redukuje się do problemu (P1) lub (P2). Warto podkreślić, że motywacją badania inkluzji (P3) są zagadnienia mechaniki kontaktu, których nie można sformułować w postaci inkluzji (P1) lub (P2) i które wymagają wprowadzenia operatorów postaci podróżniczki względem dwóch zmiennych. Istnienie rozwiązań zagadnienia (P3) (por. Twierdzenie 2) można uzyskać metodami analogicznymi do tych, użytych w pracy [A1].

Inkluzja ewolucyjna (P3) stanowi punkt wyjścia do badania dynamicznych nierówności hemiwariacyjnych będących słabymi sformułowaniami zagadnień kontaktowych. Dla ilustracji możliwych zastosowań, rozważmy obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ reprezentujący ciało lepkosprężyste i wielowartościową funkcję F następującej postaci

$$(*) \qquad F(t, u, v) = SR^* \partial J(t, R(u, v)),$$

gdzie $S\colon Z^* \times Z^* \to Z^*$, $S(z_1, z_2) = z_1 + z_2$, $R(u, v) = (\gamma u, \gamma v)$, $\gamma \in \mathcal{L}(Z, L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d))$ jest operatorem śladu, $Z = H^\delta(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $\frac{1}{2} < \delta < 1$, $J\colon (0, T) \times (L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d))^2 \to \mathbb{R}$ jest dany wzorem $J(t, u, v) = \displaystyle\int_{\Gamma_C} g(x, t, u(x), v(x))\, d\Gamma$, $\Gamma_C \subset \partial\Omega$ oraz ∂J jest podróżniczką Clarke'a funkcji $J(t, \cdot, \cdot)$ ze względu na parę dwóch ostatnich argumentów. Postać funkcji podcałkowej $g\colon \Gamma_C \times (0, T) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zależy w zastosowaniach od lokalnie lipschitzowskich potencjałów, opisujących niemonotoniczne warunki na powierzchni kontaktu Γ_C ciała lepkosprężystego z podłożem (por. rozdział 3).

W przypadku, gdy odwzorowanie wielowartościowe F jest postaci $(*)$, zagadnienie (P3) prowadzi do następującej nierówności hemiwariacyjnej

$$
\text{(HVI3)} \qquad \begin{cases} \langle u''(t) + A(t, u'(t)) + Bu(t) - f(t), v\rangle_{V^* \times V} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\Gamma_C} g^0(t, u(t), u'(t); v(x), v(x))\, d\Gamma \geq 0 \quad \forall\, v \in V, \text{ p.w. } t \in (0, T) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0, \end{cases}
$$

gdzie $g^0(x, t, u, v; w, z)$ oznacza uogólnioną pochodną kierunkową funkcji $g(x, t, \cdot, \cdot)$ dla $(x, t) \in \Gamma_C \times (0, T)$ w punkcie $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ w kierunku $(w, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

W nierównościach hemiwariacyjnych modelujących zjawiska kontaktowe postać operatorów A i B zależy od praw konstytutywnych opisujących własności ciał lepkosprężystych. W szczególności dla materiałów lepkosprężystych opisywanych prawem Kelvina-Voigta, operatory A i B w nierówności (HVI3) odpowiadają odpowiednio nieliniowemu operatorowi lepkości oraz liniowemu operatorowi sprężystości. Zauważmy, że operator A może zależeć od czasu i modelować sytuację, gdy właściwości lepkościowe materiału zmieniają się w czasie np. w zależności od temperatury, która odgrywa wtedy rolę parametru. Podobnie możemy interpretować zależność superpotencjału g od czasu.

Głównymi wynikami pracy [A2] są rezultaty o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania nierówności hemiwariacyjnych modelujących różne zagadnienia mechaniki kontaktu. Istnienie rozwiązania dla nierówności (HVI3) jest konsekwencją istnienia rozwiązania dla zagadnienia (P3). W sytuacji, gdy odwzorowanie wielowartościowe F nie zależy od zmiennej u, praca podaje warunki na istnienie rozwiązania globalnego. Przy dodatkowych warunkach, obejmujących założenia o silnej monotoniczności operatora $A(t, \cdot)$ i zrelaksowanej monotoniczności podróżniczki $\partial J(t, \cdot)$, można otrzymać jednoznaczność rozwiązania nierówności hemiwariacyjnej (por. Stwierdzenie 16).

Dynamiczne zagadnienia kontaktowe w teorii lepkosprężystości były obiektem intensywnych badań (patrz np. monografie Duvaut i Lions [8], Han i Sofonea [10], Kikuchi i Oden [11], Panagiotopoulos [18], Shillor, Sofonea i Telega [25]). Praca [A2] pozwala ujednolicić podejścia do zagadnień lepkosprężystych mechaniki kontaktu. W konsekwencji uzyskujemy rezultaty znane wcześniej w literaturze, dotyczące głównie nierówności wariacyjnych, które są skojarzone z potencjałami wypukłymi. Z drugiej strony, praca [A2] dostarcza nowych wyników egzystencjalnych dla dynamicznych nierówności hemiwariacyjnych, które dotychczas nie były dostępne w literaturze. Warto nadmienić, że nowe rezultaty pracy [A2] znajdują zastosowania do opisu dynamicznych zagadnień kontaktowych teorii lepkosprężystości z wielowartościowymi i niemonotonicznymi warunkami brzegowymi takimi jak niemonotoniczny warunek normalnej zgodności, uproszczone prawo tarcia Coulomba, niemonotoniczny warunek normalnej tłumionej odpowiedzi, prawo lepkiego kontaktu z tarciem typu Tresca, warunki kontaktu lepkiego z potęgowym prawem tarcia, warunek normalnej tłumionej odpowiedzi z zależnym od czasu prawem typu Tresca, warunek normalnej tłumionej odpowiedzi z potęgowym prawem tarcia, niemonotoniczny warunek tarcia typu Coulomba oraz prawa typu zig-zag, generowane przez potencjały niewypukłe. Ponadto otrzymany wynik egzystencjalny można wykorzystać do uzyskania rozwiązań dynamicznego zagadnienia kontaktu dwustronnego z zależnym od czasu warunkiem tarcia typu Tresca (por. Wniosek 22). Wymienione prawa są często wykorzystywane w modelowaniu zjawisk kontaktowych w praktyce inżynierskiej (por. np. Panagiotopoulos [19, 20]).

Inna klasa zagadnień jest rozważana w pracy [A3]. Są to problemy homogenizacji (uśredniania) dla układów opisywanych stacjonarnymi nierównościami hemiwariacyjnymi. Zagadnienia te polegają na modelowaniu ośrodków niejednorodnych, np. posiadających strukturę okresową lub warstwową. W takich sytuacjach celem homogenizacji jest przybliżanie (zastępowanie) niejednorodnego materiału ośrodka przez (hipotetyczny) materiał jednorodny. Z matematycznego punktu widzenia takie przybliżanie oznacza asymptotyczną analizę rozwiązań nierówności hemiwariacyjnych. Właściwymi narzędziami do przeprowadzania takiej analizy są teorie G-, H- i Γ-zbieżności (por. De Giorgi [6, 7], Spagnolo [27], Dal Maso [5], Allaire [1]).

Pojęcie G-zbieżności dla eliptycznych i parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego zostało wprowadzone przez Spagnolo w 1967r. w oparciu o idee zasugerowane przez De Giorgi. Ogólnie mówiąc, G-zbieżność ciągu operatorów różniczkowych oznacza zbieżność ciągu rozwiązań odpowiedniego zagadnienia różniczkowego do rozwiązania zagadnienia odpowiadającego operatorowi granicznemu, jeżeli ustalimy odpowiednie warunki początkowe lub brzegowe i stosowne topologie. Motywacja fizyczna dla rozwoju teorii G-zbieżności pochodzi z problemów homogenizacji pojawiających się w mechanice i teorii potencjału. Uogólnieniem pojęcia G-zbieżności na przypadek macierzy i tensorów niesymetrycznych jest pojęcie H-zbieżności, wprowadzone przez Murata i Tartara w latach siedemdziesiątych XX wieku (por. [9, 28]). W pracy [A3] wykorzystujemy definicję H-zbieżności tensorów rzędu czwartego, pochodzącą od Allaire'a [1].

Celem pracy [A3] jest zbadanie asymptotycznego zachowania się ciągu rozwiązań stacjonarnych nierówności hemiwariacyjnych postaci

$$(\mathrm{HVI4})_\epsilon \qquad \langle \mathcal{A}_\epsilon \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + \int_{\Gamma_C} \left(j^0_\nu(u_\nu; v_\nu) + j^0_\tau(u_\tau; v_\tau)\right) d\Gamma \geq \langle f, v\rangle_{V^*\times V} \quad \forall\, v \in V$$

przy $\epsilon \to 0$, gdzie $\{\mathcal{A}_\epsilon\} \subset L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$, $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ jest zbiorem α-koercytywnych symetrycznych tensorów rzędu czwartego, których odwrotności są β-koercytywne. Dla każdego ustalonego parametru $\epsilon > 0$, zagadnienie $(\mathrm{HVI4})_\epsilon$ stanowi wariacyjne sformułowanie modelu kontaktowego w teorii liniowej sprężystości z wielowartościowymi warunkami brzegowymi w postaci podróżniczki. Główne rezultaty pracy [A3] to twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania problemu $(\mathrm{HVI4})_\epsilon$ przy ustalonym parametrze $\epsilon > 0$ (patrz Twierdzenie 5) oraz rezultat dotyczący asymptotycznej analizy zagadnienia $(\mathrm{HVI4})_\epsilon$, gdy $\epsilon \to 0$ (por. Twierdzenie 12, Wniosek 14). Istnienie rozwiązań nierówności $(\mathrm{HVI4})_\epsilon$ można uzyskać szukając rozwiązań skojarzonej inkluzji operatorowej postaci

$$(\mathrm{P4})_\epsilon \qquad A_\epsilon u + \gamma^* \partial J(\gamma u) \ni f,$$

gdzie operator $A_\epsilon\colon V \to V^*$ dany jest wzorem $\langle A_\epsilon u, v\rangle_{V^*\times V} = \int_\Omega \mathcal{A}_\epsilon \varepsilon(u)\cdot\varepsilon(v)\,dx$ dla $u, v \in V$ oraz funkcjonał $J\colon L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ ma postać $J(w) = \int_{\Gamma_C} (j_\nu(x, w_\nu(x)) + j_\tau(x, w_\tau(x)))\,d\Gamma$ dla $w \in L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$. Istnienie rozwiązań dla inkluzji $(\mathrm{P4})_\epsilon$ uzyskano w pracy jako konsekwencję twierdzenia o surjektywności koercytywnego operatora pseudomonotonicznego. Podano również warunki, przy których każde rozwiązanie inkluzji $(\mathrm{P4})_\epsilon$ jest rozwiązaniem nierówności hemiwariacyjnej $(\mathrm{HVI4})_\epsilon$ (patrz Twierdzenie 5). Przy dodatkowych warunkach o regularności potencjałów j_ν i j_τ oraz zrelaksowanej monotoniczności ich podróżniczek, udowodniono jednoznaczność rozwiązania zagadnienia $(\mathrm{HVI4})_\epsilon$. Następnie, przy założeniu H-zbieżności ciągu operatorów $\mathcal{A}_\epsilon$ do operatora $\mathcal{A}_0$, wykazano, że ciąg rozwiązań $\{u_\epsilon\}$ zagadnienia $(\mathrm{HVI4})_\epsilon$ posiada podciąg słabo zbieżny w $H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ do rozwiązania nierówności hemiwariacyjnej $(\mathrm{HVI4})_0$ odpowiadającej operatorowi $\mathcal{A}_0$ (por. Twierdzenie 12). Oznacza to, że zbieżność ciągu rozwiązań jednorodnych zagadnień Dirichleta dla operatorów $\mathcal{A}_\epsilon$ pociąga za sobą zbieżność ciągu rozwiązań zagadnień z wielowartościowymi i niemonotonicznymi warunkami brzegowymi w postaci podróżniczki. Z mechanicznego punktu widzenia powyższa analiza asymptotyczna polega na zastąpieniu makroskopowych własności wysoce niejednorodnego ośrodka modelowanego przez operatory $\mathcal{A}_\epsilon$, poprzez ośrodek jednorodny, którego własności są opisywane przez graniczny operator $\mathcal{A}_0$. W szczególności rezultat o asymptotyce dla nierówności hemiwariacyjnej $(\mathrm{HVI4})_\epsilon$ (patrz Uwaga 13) można z powodzeniem zastosować do badania ośrodków o strukturze okresowej.

W zagadnieniach kontaktowych mechaniki ważną rolę odgrywają modele uwzględniające historię badanego procesu. W sposób naturalny rozważa się więc zagadnienia dla materiałów z krótką i długą pamięcią. Te ostatnie prowadzą do modeli matematycznych zawierających operatory całkowe. W pracy [A4] badane są ewolucyjne inkluzje operatorowe rzędu drugiego, zawierające operatory całkowe typu Volterry, postaci

$$(\mathrm{P5}) \qquad \begin{cases} u''(t) + A(t, u'(t)) + Bu(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)u(s)\,ds + \gamma^*\,\partial J(t, \gamma u'(t)) \ni f(t) \\ \hfill \text{p.w. } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0, \end{cases}$$

gdzie $A\colon (0,T)\times V \to V^*$ jest operatorem nieliniowym, $B\colon V \to V^*$ i $C\colon (0,T)\times V \to V^*$ są operatorami liniowymi, i ∂J oznacza podróżniczkę Clarke'a funkcjonału $J(t,\cdot)\colon L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ dla $t \in (0,T)$. Ponadto w pracy badane są ewolucyjne nierówności hemiwariacyjne skojarzone z zagadnieniem (P5) oraz dynamiczne zagadnienia kontaktowe z tarciem teorii lepkosprężystości.

Głównym celem pracy [A4] jest podanie rezultatów o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla inkluzji typu (P5) (por. Twierdzenie 2.1) oraz dla odpowiadającej jej nierówności hemiwariacyjnej i skojarzonym zagadnieniom kontaktowym. Dowód istnienia rozwiązań inkluzji ewolucyjnej uzyskano w oparciu o wcześniejsze rezultaty z pracy [A2] (Twierdzenie 2), dotyczące inkluzji operatorowych bez operatora całkowego i zastosowanie twierdzenia Banacha o punkcie stałym odwzorowania zwężającego. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania otrzymano dla nowej klasy inkluzji ewolucyjnych z operatorem typu Volterry, w których podróżniczka spełnia warunek zrelaksowanej monotoniczności. Konsekwencją tych wyników jest twierdzenie o istnieniu rozwiązania całkowo-różniczkowej nierówności hemiwariacyjnej rzędu drugiego, a także twierdzenie o jednoznaczności tego rozwiązania przy dodatkowych założeniach o regularności superpotencjału. Opis rezultatów uzyskanych w pracy [A4] dla dynamicznych zagadnień kontaktowych dla materiałów lepkosprężystych zostanie podany w rozdziale 3. Należy podkreślić, że w matematycznej teorii nierówności hemiwariacyjnych, metoda opisana w pracy [A4] jest podejściem nowym i pozwala uzyskać wcześniejsze rezultaty (por. np. Han i Sofonea [10], Shillor, Sofonea i Telega [25], Naniewicz i Panagiotopoulos [15], Panagiotopoulos [18]) o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla zagadnień kontaktowych jako przypadki szczególne. Ponadto teoria ta dalej jest rozwijana przez Kulig i Migórskiego [12].

Asymptotyczne zachowanie się rozwiązań ewolucyjnych inkluzji rzędu drugiego jest badane w pracy [A5]. Rozważamy tutaj inkluzję operatorową postaci

$$(\mathrm{P6})_\epsilon \qquad \begin{cases} \epsilon u''(t) + A(t)u'(t) + Bu(t) + M^*\partial J(t, Mu(t)) \ni f(t) \quad \text{p.w. } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0, \quad \sqrt{\epsilon}u'(0) = v_0, \end{cases}$$

gdzie $\epsilon > 0$ jest małym parametrem, operatory $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in (0,T)$, $B\colon V \to V^*$ są liniowymi i ciągłymi odwzorowaniami przestrzeni Banacha w jej dualną, operator $M\colon Z \to L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$ jest liniowy i ciągły, M^* oznacza operator sprzężony do M, $\partial J(t,\cdot)$ jest podróżniczką Clarke'a funkcjonału $J(t,\cdot)\colon L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ oraz f, u_0, v_0 są ustalone. Inkluzja $(\mathrm{P6})_\epsilon$ jest abstrakcyjnym modelem równań ruchu, wynikających z zasady zachowania pędu. W równaniach ruchu zmienna u reprezentuje przemieszczenie układu. W zagadnieniach mechaniki ciała stałego równanie ruchu postaci $mu'' - \mathrm{Div}\,\sigma = f_0$ opisuje ewolucję stanu ciała w czasie pod wpływem sił zewnętrznych o gęstości f_0, gdzie m jest masą ciała i σ jest tensorem naprężenia.

W wielu przypadkach zagadnień mechanicznych, gdy siły zewnętrzne wolno zmieniają się w czasie, a reakcja układu jest względnie powolna, przyspieszenie układu opisywane przez składnik inercjalny u'' jest małe i zaniedbywalne. W takich sytuacjach równanie ruchu jest przybliżane, w każdej chwili czasu, przez równanie równowagi postaci $-\mathrm{Div}\,\sigma = f_0$, a zagadnienie dynamiczne jest aproksymowalne przez model quasi-statyczny. Ścisła analiza matematyczna takich sytuacji prowadzi do badania asymptotycznego zachowania się równań ruchu, gdy składnik inercjalny zmierza do zera. Praca [A5] zawiera analizę wariacyjną modeli, która obejmuje rezultaty o istnieniu i jednoznaczności słabych rozwiązań oraz wyniki o ciągłej zależności rozwiązania od parametru.

Celem pracy [A5] jest zbadanie zachowania się ciągu rozwiązań inkluzji ewolucyjnej $(\mathrm{P6})_\epsilon$ przy $\epsilon \to 0$. Przy każdej ustalonej wartości parametru ϵ wykazano istnienie rozwiązania problemu $(\mathrm{P6})_\epsilon$, stosując podejście analogiczne do tego zastosowanego w pracy [A1] i opartego na teorii operatorów pseudomonotonicznych. Głównym rezultatem [A5] jest Twierdzenie 13, podające warunki wystarczające, przy których ciąg rozwiązań $(\mathrm{P6})_\epsilon$ jest zbieżny, w odpowiednich topologiach, do rozwiązania inkluzji ewolucyjnej rzędu pierwszego postaci

$$(\mathrm{P6}) \qquad \begin{cases} A(t)u'(t) + Bu(t) + M^*\partial J(t, Mu(t)) \ni f(t) \quad \text{p.w. } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Wynik ten stanowi nowe matematyczne uzasadnienie szeregu prac inżynierskich, badających quasi-statyczne zjawiska kontaktowe w oparciu o heurystyczne modele dynamiczne, w których przyspieszenie danego układu jest zaniedbywalne. Ponadto w pracy [A5] otrzymano rezultat o regularności rozwiązania zagadnienia (P6). Warto podkreślić, że zagadnienie graniczne jest inkluzją rzędu pierwszego, zatem układ zmienia swój charakter z hiperbolicznego na paraboliczny. Powyższe wyniki zostały zastosowane w pracy do zbadania quasi-statycznej nierówności hemiwariacyjnej, opisującej zjawisko kontaktowe z warunkami normalnej podatności i tarciem w ośrodkach lepkosprężystych (Twierdzenie 17). Opis tego zagadnienia kontaktowego będzie przedstawiony w rozdziale 3.

Należy zauważyć, że quasi-statyczne modele kontaktowe, opisywane w literaturze przez równania i nierówności wariacyjne, były przedmiotem intensywnych badań, porównaj m.in. monografie Duvant i Lions [8], Han i Sofonea [10], Shillor, Sofonea i Telega [25], Sofonea, Han i Shillor [26]. Według mojego stanu wiedzy, rezultat dotyczący zagadnienia quasi-statycznego jako problemu granicznego dla ewolucyjnej nierówności hemiwariacyjnej jest nowy i jest pierwszym tego typu w literaturze.

Celem pracy [A6] jest podanie nowych rezultatów o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla pewnej klasy inkluzji operatorowych i nierówności hemiwariacyjnych oraz zastosowanie tych wyników do analizy quasi-statycznych zagadnień kontaktowych. Badana w pracy inkluzja operatorowa jest postaci

$$\text{(P7)} \qquad A(t,u(t)) + (\mathcal{S}u)(t) + \gamma^* \partial J(t,\gamma u(t)) \ni f(t) \quad \text{p.w. } t \in (0,T),$$

gdzie $A\colon (0,T)\times V \to V^*$ i $\mathcal{S}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ są operatorami nieliniowymi, $\mathcal{V} = L^2(0,T;V)$, ∂J oznacza podróżniczkę w sensie Clarke'a funkcjonału $J(t,\cdot)\colon L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $t \in (0,T)$. Przykładem operatora $\mathcal{S}$ w zagadnieniu (P7) jest operator postaci

$$(**) \qquad (\mathcal{S}v)(t) = R\left(t, \int_0^t v(s)\,ds + v_0\right) \quad \text{dla } v \in \mathcal{V}, \ \text{p.w. } t \in (0,T),$$

gdzie $R\colon (0,T)\times V \to V^*$ spełnia warunki: $R(\cdot,v)$ jest mierzalny dla każdego $v \in V$ i $R(t,\cdot)$ jest lipschitzowski dla p.w. $t \in (0,T)$ oraz $v_0 \in V$. W szczególności do tej klasy operatorów należy operator typu Volterry, rozważany w pracy [A4]. Zauważmy, że wartość operatora $\mathcal{S}$ postaci $(**)$ w chwili czasu t zależy od wartości argumentu w całym przedziale $[0,t]$. Z tego powodu operatory typu $(**)$ nazywamy operatorami historii, a zagadnienie (P7) inkluzją zależną od historii, w odróżnieniu od inkluzji zależnych od czasu, gdzie operator zależy jedynie od aktualnej wartości rozwiązania w danym momencie.

Dowód istnienia rozwiązań inkluzji (P7) (Twierdzenie 4) opiera się na znanym rezultacie o surjektywności dla operatorów pseudomonotonicznych. Jednoznaczność rozwiązania dla zagadnienia (P7) wynika z rezultatu o ciągłej zależności rozwiązania od prawej strony inkluzji (Lemat 3) i twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Otrzymane twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności dla inkluzji operatorowej zależnej od historii jest pierwszym tego typu rezultatem znanym w literaturze.

Struktura inkluzji (P7), zawierającej operator podróżniczki, pozwala także na otrzymanie nowych rezultatów dla pewnej klasy nierówności hemiwariacyjnych zależnych od historii (Twierdzenie 6). W konsekwencji praca [A6] dostarcza narzędzi, które mogą być wykorzystane w badaniu quasi-statycznych zagadnień kontaktowych mechaniki, modelowanych przez nierówności hemiwariacyjne. Ciekawym przykładem takiego zagadnienia jest quasi-statyczny model zagadnienia kontaktowego z tarciem dla materiału lepkosprężystego.

Słabe sformułowanie tego problemu prowadzi do nierówności hemiwariacyjnej, w której niewiadomą jest wektor prędkości. Więcej informacji na temat tego modelu kontaktowego zawiera rozdział 3.

Warto zauważyć, że prace [A5] i [A6] stanowią dwa alternatywne podejścia do problemów quasi-statycznych i zawierają pierwsze rezultaty egzystencjalne dla quasi-statycznych nierówności hemiwariacyjnych. Otwiera to nową drogę do badania modeli z niemonotonicznymi i wielowartościowymi warunkami brzegowymi w postaci podróżniczki.

3 Zagadnienia kontaktowe mechaniki

Matematyczna teoria mechaniki kontaktu, która obecnie dynamicznie się rozwija, zajmuje się modelowaniem zjawisk kontaktowych w oparciu o podstawowe prawa fizyki. Całościowe badanie zagadnień kontaktowych korzysta z wiedzy z analizy funkcjonalnej, metod wariacyjnych, teorii równań różniczkowych cząstkowych i analizy numerycznej.

W niniejszym rozdziale przedstawimy przykładowe nowe rezultaty uzyskane w rozprawie, dotyczące wybranych zagadnień kontaktowych, które opisywane są przez niemonotoniczne i wielowartościowe warunki brzegowe w postaci podróżniczki. Wyniki dotyczące statycznych i quasi-statycznych modeli kontaktowych z potencjałami wypukłymi są dostatecznie dobrze opisane w literaturze (por. [8, 10, 11, 16, 18, 25, 26]), natomiast modele dynamiczne z potencjałami niewypukłymi wciąż wymagają dalszych wnikliwych badań.

Podstawowym zagadnieniem w matematycznej teorii mechaniki kontaktu jest kwestia istnienia rozwiązania. Jest to problem nietrywialny, gdyż zagadnienia kontaktowe zwykle są nieliniowe z powodu wielowartościowych warunków brzegowych, nawet gdy prawa konstytutywne w nich występujące są zależnościami liniowymi. Przedstawimy poniżej jednolite podejście do wybranych modeli kontaktowych w oparciu o inkluzje operatorowe i nierówności hemiwariacyjne. Główną nowością tego podejścia jest fakt, że prawa kontaktowe są wielowartościowe i niemonotoniczne. Przedstawione poniżej modele obejmują kilka typów warunków brzegowych rozważanych wcześniej np. w pracach [3, 8, 10, 16, 24, 25]. Otrzymane wyniki pozwalają uzyskać rozwiązania m.in. następujących wybranych problemów mechaniki kontaktu:

1. dynamiczne zagadnienie kontaktowe dla materiału lepkosprężystego z krótką pamięcią ([A1], [A2]),

2. dynamiczne zagadnienie kontaktowe dla materiału lepkosprężystego z długą pamięcią ([A4]),

3. quasi-statyczne zagadnienie kontaktowe z tarciem dla materiału lepkosprężystego ([A6]),

4. quasi-statyczne zagadnienie kontaktowe z warunkami normalnej podatności i tarciem w ośrodkach lepkosprężystych ([A5]).

Część rezultatów opisanych w poprzednim rozdziale, dotyczących inkluzji różniczkowych i nierówności hemiwariacyjnych jest ściśle powiązana z zastosowaniami w matematycznej teorii mechaniki kontaktu. Wszystkie zagadnienia, występujące w pracach [A1]–[A6], mają swoje źródła w konkretnych problemach mechanicznych. Poniżej pokażemy w jaki sposób ich sformułowania prowadzą do nierówności hemiwariacyjnych, rozważanych w rozdziale 2. Rozpoczniemy od krótkiego wprowadzenia oznaczeń i przedstawienia modelowego zagadnienia kontaktowego mechaniki.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ będzie ograniczonym obszarem z brzegiem lipschitzowskim Γ ($d = 2, 3$ w zastosowaniach). Zakładamy, że brzeg Γ dzieli się na trzy rozłączne części Γ_D, Γ_N i Γ_C, przy czym miara Γ_D jest dodatnia. Wektor normalny zewnętrzny do Γ oznaczamy przez $\boldsymbol{\nu}$, a przestrzeń tensorów symetrycznych rzędu d przez $\mathbb{S}^d \approx \mathbb{R}_s^{d\times d}$. Niech $\boldsymbol{u} = (u_i)$ będzie wektorem przemieszczenia, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ tensorem naprężenia, a $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \big(\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\big)$ zlinearyzowanym tensorem odkształcenia, gdzie $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)$, $i, j = 1, \ldots, d$. Do opisu zależności praw kontaktowych na brzegu Γ_C będą służyć składowe normalne i styczne, odpowiednio wektora przemieszczenia/prędkości oraz naprężenia, zdefiniowane następująco

$$v_\nu = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}, \quad \sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Rozważmy modelowe zagadnienie kontaktowe mechaniki następującej postaci.

Problem $\mathcal{P}$: *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^d$ i naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \times (0, T) \to \mathbb{S}^d$ takie, że*

$$\boldsymbol{u}''(t) - \mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{f}_0(t) \quad \text{w} \quad \Omega \times (0, T) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(t, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}'(t))) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) \quad \text{w} \quad \Omega \times (0, T) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{na} \quad \Gamma_D \times (0, T) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_N(t) \quad \text{na} \quad \Gamma_N \times (0, T) \tag{4}$$

$$-\sigma_\nu(t) \in \partial j_\nu(t, u'_\nu(t)) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0, T) \tag{5}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \in \partial j_\tau(t, \boldsymbol{u}'_\tau(t)) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0, T) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{w} \quad \Omega. \tag{7}$$

Równania (1)-(7) mają ścisłe uzasadnienie mechaniczne. Równanie (1) jest równaniem ruchu (w przypadku dynamicznym) lub równaniem równowagi (w przypadku stacjonarnym). Drugie równanie, stanowiące prawo konstytutywne, opisuje własności materiału, z którego zbudowane jest ciało zajmujące obszar Ω. Równanie (2) modeluje właściwości ciała lepkosprężystego z krótką pamięcią, gdzie $\mathcal{A}\colon \Omega \times (0, T) \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ jest nieliniowym operatorem lepkości, a $\mathcal{B}\colon \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ jest liniowym operatorem sprężystości. Do pełnego opisu zjawiska potrzebne są warunki brzegowe (3)-(6) oraz warunki początkowe (7). Zależności (5) i (6) opisują niemonotoniczne i niegładkie warunki kontaktowe za pomocą podróżniczki Clarke'a superpotencjałów lokalnie lipschitzowskich $j_\nu\colon \Gamma_C \times (0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $j_\tau\colon \Gamma_C \times (0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

W celu przedstawienia sformułowania wariacyjnego zagadnienia (1)-(7), wprowadzamy przestrzenie $H = L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{H} = L^2(\Omega; \mathbb{S}^d)$ i $V = \big\{\, \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ na } \Gamma_D \,\big\}$ z iloczynem skalarnym $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_V = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\mathcal{H}}$. Niech $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})$ będzie parą funkcji gładkich, spełniających warunki (1)-(7), $\boldsymbol{v} \in V$ i $t \in (0,T)$. Wówczas z równania ruchu (1), po zastosowaniu wzoru Greena, otrzymujemy

$$\langle \boldsymbol{u}''(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} + \langle \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v}\rangle_H + \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v}\, d\Gamma.$$

Warunki brzegowe (3) i (4) implikują

$$\int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v}\, d\Gamma = \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{f}_N(t)\cdot\boldsymbol{v}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \left(\sigma_\nu(t) v_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot\boldsymbol{v}_\tau\right) d\Gamma,$$

a z warunków brzegowych (5), (6) i definicji podróżniczki Clarke'a mamy

$$-\sigma_\nu(t)v_\nu \le j_\nu^0(t, u_\nu'(t); v_\nu), \qquad -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot\boldsymbol{v}_\tau \le j_\tau^0(t, \boldsymbol{u}_\tau'(t); \boldsymbol{v}_\tau) \quad \text{na } \Gamma_C \times (0,T).$$

Stąd

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_\nu(t)v_\nu\, d\Gamma \ge -\int_{\Gamma_C} j_\nu^0(t, u_\nu'(t); v_\nu)\, d\Gamma,$$
$$\int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot\boldsymbol{v}_\tau\, d\Gamma \ge -\int_{\Gamma_C} j_\tau^0(t, \boldsymbol{u}_\tau'(t); \boldsymbol{v}_\tau)\, d\Gamma.$$

Z powyższych związków otrzymujemy następującą nierówność hemiwariacyjną, która jest słabym sformułowaniem zagadnienia (1)-(7).

Problem $\mathcal{P}_V$: *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon (0,T)\to V$ takie, że*

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{u}''(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} + \langle \mathcal{A}(t, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}'(t))) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\mathcal{H}} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\Gamma_C} \left(j_\nu^0(t, u_\nu'(t); v_\nu) + j_\tau^0(t, \boldsymbol{u}_\tau'(t); \boldsymbol{v}_\tau)\right) d\Gamma \ge \\ \qquad \ge \langle \boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v}\rangle_H + \langle \boldsymbol{f}_N(t), \boldsymbol{v}\rangle_{L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^d)} \quad \forall\, \boldsymbol{v}\in V, \text{ p.w. } t\in(0,T) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{v}_0. \end{cases}$$

Wprowadzamy następujące operatory i odwzorowania:

$$A\colon (0,T)\times V \to V^*, \qquad \langle A(t,\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} = \langle \mathcal{A}(t, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\mathcal{H}} \tag{8}$$

$$B\colon V\to V^*, \qquad \langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} = \langle \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\mathcal{H}} \tag{9}$$

$$J\colon (0,T)\times L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}, \qquad J(t,\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_C} j(t,\boldsymbol{v})\, d\Gamma \tag{10}$$

$$j\colon \Gamma_C\times(0,T)\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}, \qquad j(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi}) = j_\nu(\boldsymbol{x},t,\xi_\nu) + j_\tau(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi}_\tau) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{f}\colon (0,T)\to V^*, \qquad \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} = \langle \boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v}\rangle_H + \langle \boldsymbol{f}_N(t), \boldsymbol{v}\rangle_{L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^d)} \tag{12}$$

oraz oznaczamy przez $\gamma\colon V \to L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$ operator śladu. Wówczas otrzymujemy następujące zagadnienie Cauchy'ego dla ewolucyjnej inkluzji operatorowej rzędu drugiego.

Problem $\mathcal{P}_{inc}$: *Znaleźć* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V} = L^2(0,T;V)$ *takie, że* $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{u}'' \in \mathcal{V}^*$ *oraz*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}''(t) + A(t,\boldsymbol{u}'(t)) + B\boldsymbol{u}(t) + \gamma^* \partial J(t,\gamma \boldsymbol{u}'(t)) \ni \boldsymbol{f}(t) \ \text{ p.w. } t \in (0,T) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \ \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{v}_0. \end{cases}$$

W oparciu o Twierdzenie 5 z pracy [A1], przy stosownych założeniach, otrzymujemy, że problem $\mathcal{P}_{inc}$ ma rozwiązanie. Korzystając z faktu, że każde rozwiązanie inkluzji operatorowej $\mathcal{P}_{inc}$ jest rozwiązaniem skojarzonej z nią nierówności hemiwariacyjnej, wnioskujemy, że problem $\mathcal{P}_V$ posiada rozwiązanie.

Dynamiczne zagadnienia kontaktowe dla ciała lepkosprężystego mogą być rozważane z różnymi warunkami brzegowymi na brzegu Γ_C (patrz np. [10], [25]). Przykładowo, jeżeli uwzględnimy zależności między odpowiednimi składowymi przemieszczenia i naprężeń, postaci

$$-\sigma_\nu(t) \in \partial j_\nu(t,u_\nu(t)) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T), \tag{13}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \in \partial j_\tau(t,\boldsymbol{u}_\tau(t)) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T), \tag{14}$$

to wówczas, analogicznie jak dla modelowego zagadnienia (1)-(7), otrzymujemy słabe sformułowanie problemu (1)-(4), (7), (13)-(14) w postaci nierówności hemiwariacyjnej

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{u}''(t),\boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} + \langle \mathcal{A}(t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}'(t))) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\mathcal{H}} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\Gamma_C} \left(j_\nu^0(t,u_\nu(t);v_\nu) + j_\tau^0(t,\boldsymbol{u}_\tau(t);\boldsymbol{v}_\tau)\right) d\Gamma \geq \\ \qquad \geq \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \ \text{p.w. } t \in (0,T) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \ \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{v}_0. \end{cases} \tag{15}$$

Zauważmy, że nierówność hemiwariacyjna (15) odpowiada problemowi (P1) i przy założeniach Twierdzenia 4 z pracy [A1] posiada ona słabe rozwiązanie.

W matematycznych modelach zagadnień kontaktowych mechaniki można rozważać różne materiały, zarówno lepkosprężyste z krótką pamięcią, jak również lepkosprężyste z długą pamięcią. Te ostatnie rozważane są w artykule [A4]. Własności ciała lepkosprężystego z długą pamięcią można opisać prawem konstytutywnym postaci

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(t,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}'(t))) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))\,ds, \tag{16}$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest nieliniowym operatorem lepkościowym oraz $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ są liniowymi operatorami sprężystości i relaksacji. Wariacyjne sformułowanie zagadnienia (1), (3)-(7), (16) przy wprowadzonych oznaczeniach (8)-(12) oraz

$$C\colon (0,T)\times V \to V^*, \qquad \langle C(t)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} = \langle \mathcal{C}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\mathcal{H}}$$

prowadzi do następującej nierówności hemiwariacyjnej.

Problem: *Znaleźć przemieszczenie* $\boldsymbol{u}\colon (0,T) \to V$ *takie, że*

$$\left\{ \begin{aligned} & \langle \boldsymbol{u}''(t) + A(t, \boldsymbol{u}'(t)) + B\boldsymbol{u}(t) + \int_0^t C(t-s)\boldsymbol{u}(s)\, ds, \boldsymbol{v} \rangle_{V^* \times V} + \\ & \qquad + \int_{\Gamma_C} \big(j_\nu^0(t, u_\nu'(t); v_\nu) + j_\tau^0(t, \boldsymbol{u}_\tau'(t); \boldsymbol{v}_\tau) \big)\, d\Gamma \geq \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle_{V^* \times V} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \ \text{p.w. } t \in (0,T) \\ & \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \ \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{v}_0. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

W oparciu o Twierdzenie 5.1 z [A4], przy stosownych założeniach, wnioskujemy, że nierówność hemiwariacyjna (17) posiada słabe rozwiązanie. Rezultat ten otrzymujemy stosując abstrakcyjne Twierdzenie 2.1 z [A4] o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania inkluzji operatorowej typu (P5).

Ciekawym przykładem, pokazującym zastosowanie rezultatów z pracy [A6] jest quasistatyczny model zagadnienia kontaktowego z tarciem dla materiału lepkosprężystego, którego klasyczne sformułowanie jest następujące.

Problem: *Znaleźć przemieszczenie* $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$ *i naprężenie* $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{S}^d$ *takie, że*

$$-\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{f}_0(t) \quad \text{w} \quad \Omega \times (0,T) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(t, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}'(t))) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) \quad \text{w} \quad \Omega \times (0,T) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{na} \quad \Gamma_D \times (0,T) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_N(t) \quad \text{na} \quad \Gamma_N \times (0,T) \tag{21}$$

$$-\sigma_\nu(t) \in \partial j_\nu(t, u_\nu'(t)) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T) \tag{22}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \in \partial j_\tau(t, \boldsymbol{u}_\tau'(t)) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T) \tag{23}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{w} \quad \Omega. \tag{24}$$

Wariacyjne sformułowanie zagadnienia kontaktowego (18)-(24) prowadzi do następującej nierówności hemiwariacyjnej

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}(t, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}'(t))), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ & \quad + \int_{\Gamma_C} \big(j_\nu^0(t, u_\nu'(t); v_\nu) + j_\tau^0(t, \boldsymbol{u}_\tau'(t); \boldsymbol{v}_\tau) \big)\, d\Gamma \geq \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle_{V^* \times V} \ \ \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \ \text{p.w. } t. \end{aligned} \tag{25}$$

Uwzględniając warunek początkowy, wprowadzając wektor prędkości $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}'$ i korzystając ze związku $\boldsymbol{u}(t) = \displaystyle\int_0^t \boldsymbol{w}(s)\, ds + \boldsymbol{u}_0$ dla $t \in [0,T]$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}(t, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}(t))), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}\Big(\int_0^t \boldsymbol{w}(s)\, ds + \boldsymbol{u}_0 \Big), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ & \quad + \int_{\Gamma_C} \big(j_\nu^0(t, w_\nu(t); v_\nu) + j_\tau^0(t, \boldsymbol{w}_\tau(t); \boldsymbol{v}_\tau) \big)\, d\Gamma \geq \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle_{V^* \times V} \ \ \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \ \text{p.w. } t, \end{aligned} \tag{26}$$

gdzie szukaną wielkością jest wektor prędkości $\boldsymbol{w}$. Otrzymana nierówność hemiwariacyjna (26) zależy od historii, którą modeluje operator $\mathcal{S}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ dany wzorem

$$\langle (\mathcal{S}\boldsymbol{u})(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} = \langle \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}\Big(\int_0^t \boldsymbol{w}(s)\, ds + \boldsymbol{u}_0\Big), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\mathcal{H}}.$$

W konsekwencji, stosując rezultaty dotyczące abstrakcyjnej inkluzji typu (P7) zależnej od historii, przy pewnych warunkach otrzymujemy istnienie słabego rozwiązania zagadnienia (18)-(24) (por. Twierdzenie 6 w [A6]).

Alternatywne podejście do quasi-statycznego zagadnienia kontaktowego z warunkami normalnej podatności w ośrodkach lepkosprężystych zostało przedstawione w pracy [A5]. Zagadnienie to jest opisane w następujący sposób.

Problem: *Znaleźć przemieszczenie* $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$ *i naprężenie* $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{S}^d$ *takie, że*

$$-\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{f}_0(t) \quad \text{w} \quad \Omega \times (0,T) \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}'(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) \quad \text{w} \quad \Omega \times (0,T) \tag{28}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{na} \quad \Gamma_D \times (0,T) \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_N(t) \quad \text{na} \quad \Gamma_N \times (0,T) \tag{30}$$

$$-\sigma_\nu(t) \in \partial j_\nu(t, u_\nu(t)) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T) \tag{31}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \in \partial j_\tau(t, \boldsymbol{u}_\tau(t)) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T) \tag{32}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{w} \quad \Omega, \tag{33}$$

gdzie, jak poprzednio, $\mathcal{A}$ jest operatorem lepkości, $\mathcal{B}$ operatorem sprężystości, a superpotencjały j_ν i j_τ są z założenia funkcjami lokalnie lipschitzowskimi względem ostatniego argumentu. Wariacyjne sformułowanie zagadnienia (27)-(33) prowadzi do nierówności hemiwariacyjnej rzędu pierwszego, odpowiadającej problemowi typu (P6). Stosując rezultaty z pracy [A5] dotyczące asymptotycznego zachowania się rozwiązań inkluzji ewolucyjnych rzędu drugiego, otrzymujemy istnienie rozwiązania quasi-statycznej nierówności hemiwariacyjnej skojarzonej z zagadnieniem (27)-(33) (por. Twierdzenie 17 w [A5]).

W celu ilustracji praw kontaktowych przedstawimy poniżej proste przykłady. Dotyczą one praw wiążących składowe styczne wektora prędkości lub przemieszczenia ze składowymi stycznymi naprężeń. Analogiczne przykłady można również podać dla związków zawierających składowe normalne tych wektorów. Przykłady te potwierdzają znaczenie teorii nierówności hemiwariacyjnych zastosowanej do mechaniki kontaktu.

Przykład 1 *Prawo Coulomba suchego tarcia.*
Tarcie jest zjawiskiem powszechnie występującym w przyrodzie i mającym istotny wpływ na charakter pracy układów mechanicznych. Siła tarcia przeciwdziała ruchowi i występuje w przypadku układów poruszających się (tzw. tarcie kinetyczne) lub w układach, w których ruch jest potencjalnie możliwy, ale jeszcze do niego nie dochodzi (tzw. tarcie statyczne). Prawo tarcia Coulomba w wersji statycznej zapisujemy w postaci

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{\mathbb{R}^d} \le F_b, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\, F_b \, \frac{\boldsymbol{u}_\tau'}{\|\boldsymbol{u}_\tau'\|_{\mathbb{R}^d}}, \quad \text{gdy} \quad \boldsymbol{u}_\tau' \neq \boldsymbol{0} \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T), \tag{34}$$

gdzie dodatnia funkcja $F_b \in L^\infty(\Gamma_C \times (0,T))$ jest graniczną wartością tarcia statycznego. Prawo tarcia (34) można zapisać w postaci (6) z potencjałem danym wzorem

$$j_\tau(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi}) = F_b(\boldsymbol{x},t)\, \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d} \quad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \ \text{p.w.} \ (\boldsymbol{x},t) \in \Gamma_C \times (0,T). \tag{35}$$

W tym przypadku podróżniczka Clarke'a funkcji $j_\tau(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ pokrywa się z podróżniczką tej funkcji w sensie analizy wypukłej i dana jest wzorem

$$\partial j_\tau(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} F_b(\boldsymbol{x},t)\, \overline{B}(\boldsymbol{0},1), & \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0} \\ F_b(\boldsymbol{x},t) \dfrac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}}, & \boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

gdzie $\overline{B}(\boldsymbol{0},1)$ oznacza domkniętą kulę jednostkową w $\mathbb{R}^d$.

Przykład 2 *Zregularyzowane prawo tarcia Coulomba.*
Zregularyzowane prawo tarcia Coulomba otrzymujemy modyfikując potencjał (35), który nie jest funkcją różniczkowalną w zerze. Taka modyfikacja jest pożądana głównie z numerycznego punktu widzenia. Przykładowo można przyjąć, że

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau = F_b \, \frac{\boldsymbol{u}_\tau'}{\sqrt{\|\boldsymbol{u}_\tau'\|^2_{\mathbb{R}^d} + \rho^2}} \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T), \tag{36}$$

gdzie $\rho > 0$ jest parametrem regularyzacji. Warunek kontaktowy (36) może być napisany równoważnie w postaci (6) z potencjałem danym wzorem

$$j_\tau(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi}) = F_b(\boldsymbol{x},t) \left(\sqrt{\|\boldsymbol{\xi}\|^2_{\mathbb{R}^d} + \rho^2} - \rho \right) \quad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \ \text{p.w.} \ (\boldsymbol{x},t) \in \Gamma_C \times (0,T).$$

Przykład 3 *Prawo kontaktu z warunkiem normalnej podatności.*
Prawo kontaktu z warunkiem normalnej podatności można w ogólnej postaci zapisać następująco

$$-\sigma_\nu = k_\nu \, p_\nu(u_\nu) \quad \text{na} \quad \Gamma_C \times (0,T), \tag{37}$$

gdzie p_ν jest funkcją nieujemną znikającą, gdy jej argument jest ujemny i k_ν jest dodatnią funkcją, tzw. współczynnikiem sztywności podłoża. Załóżmy, że $k_\nu \in L^\infty(\Gamma_C \times (0,T))$ i $p_\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz rozważmy funkcje $g_\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $j_\nu \colon \Gamma_C \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorami

$$g_\nu(r) = \int_0^r p_\nu(s)\, ds, \quad j_\nu(\boldsymbol{x},t,r) = k_\nu(\boldsymbol{x},t)\, g_\nu(r) \quad \forall\, r \in \mathbb{R}, \ \text{p.w.} \ (\boldsymbol{x},t) \in \Gamma_C \times (0,T).$$

Wtedy $\partial g_\nu(r) = p_\nu(r)$ oraz $\partial j_\nu(\boldsymbol{x},t,r) = k_\nu(\boldsymbol{x},t)\, \partial g_\nu(r) = k_\nu(\boldsymbol{x},t)\, p_\nu(r)$, zatem prawo (37) można zapisać w postaci (13). W szczególności w literaturze można znaleźć warunek (37) dla $p_\nu(r) = r_+$ lub

$$p_\nu(r) = \begin{cases} r_+, & r \le \delta \\ \delta, & r > \delta, \end{cases}$$

gdzie $r_+ = \max\{0, r\}$ i δ jest dodatnim współczynnikiem odpowiadającym za zużycie lub twardość powierzchni kontaktu.

Przykład 4 *Prawo kontaktu z niemonotonicznym warunkiem normalnej podatności.* Rozważmy niewypukłą funkcję $g_\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będącą minimum dwóch funkcji wypukłych, tzn. $g_\nu(r) = \min\{g_1(r), g_2(r)\}$, gdzie $g_1(r) = ar^2$ i $g_2(r) = \frac{a}{2}(r^2+1)$ dla $r \in \mathbb{R}$, $a > 0$ oraz funkcję $j_\nu\colon \Gamma_C \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $j_\nu(\boldsymbol{x}, t, r) = k_\nu(\boldsymbol{x}, t)\, g_\nu(r)$, gdzie $k_\nu \in L^\infty(\Gamma_C \times (0,T))$, $k_\nu > 0$. Wówczas

$$\partial g_\nu(r) = \begin{cases} ar, & |r| > 1 \\ 2ar, & |r| < 1 \\ [a, 2a]\,, & r = 1 \\ [-2a, -a]\,, & r = -1, \end{cases}$$

wtedy $\partial j_\nu(\boldsymbol{x}, t, r) = k_\nu(\boldsymbol{x}, t)\, \partial g_\nu(r)$ generuje prawo postaci (13), będące wielowartościowym, niemonotonicznym prawem typu zig-zag, występującym w zagadnieniach kontaktowych.

Przykład 5 *Niemonotoniczne prawo Winklera.* Niech $g_\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie niewypukłą funkcją daną wzorem $g_\nu(r) = \min\{g_1(r), g_2(r)\}$, gdzie

$$g_1(r) = \frac{k_0}{2}\, e^2 \qquad \text{oraz} \qquad g_2(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ \frac{k_0}{2}\, r^2, & r \geq 0 \end{cases} \qquad \text{dla } \; r \in \mathbb{R},$$

$e > 0$ jest pewną małą stałą, a $k_0 > 0$ jest współczynnikiem Winklera, opisującym współczynnik podatności podłoża. Wówczas podróżniczka Clarke'a funkcji g_ν wyraża się wzorem

$$\partial g_\nu(r) = \begin{cases} 0, & r \in (-\infty, 0) \cup (e, +\infty) \\ k_0\, r, & r \in [0, e) \\ [0, k_0\, e]\,, & r = e. \end{cases}$$

Warunek $-\sigma_\nu(t) \in \partial j_\nu(\boldsymbol{x}, t, u_\nu) = k_\nu(\boldsymbol{x}, t)\, \partial g_\nu(u_\nu)$ postaci (13) jest zadany przez superpotencjał $j_\nu(\boldsymbol{x}, t, r) = k_\nu(\boldsymbol{x}, t)\, g_\nu(r)$ i ma ciekawą interpretację fizyczną. W obszarze, gdy $u_\nu < 0$, czyli gdy kontakt nie występuje, napięcie normalne jest zerowe. Dla niewielkich przemieszczeń $u_\nu \in [0, e)$ kontakt jest idealny, opisywany prawem liniowym postaci $-\sigma_\nu = k_\nu\, k_0\, u_\nu$. Jeżeli przemieszczenie normalne osiąga pewną krytyczną wartość $u_\nu = e$, wówczas następuje zniszczenie podłoża i naprężenie normalne może przybierać dowolną wartość z przedziału $[0, k_\nu k_0 e]$. Natomiast gdy $u_\nu > e$, to wtedy $\sigma_\nu = 0$ i sytuacja taka ma miejsce w obszarze, gdzie podłoże uległo destrukcji.

W podsumowaniu należy stwierdzić, że w fizyce, technice i ekonomii istnieje całe bogactwo zagadnień, które do właściwego opisu używają praw wyrażonych w postaci nie tylko równań, ale także inkluzji. Podstawowym źródłem ograniczeń nierównościowych są ogólnie rozumiane prawa równowagi, zarówno fizycznej, jak i ekonomicznej natury. Zastosowane w rozprawie podejście, które wykorzystuje nierówności hemiwariacyjne, jest nie tylko naturalnym i matematycznie jednolitym podejściem do tego typu problemów, ale stanowi jednocześnie bardzo użyteczną podstawę do ich analizy numerycznej.

Literatura

[1] G. Allaire, *Shape Optimization by the Homogenization Method*, Springer, Berlin, 2002.

[2] K.-C. Chang, Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 80 (1981), 102-129.

[3] O. Chau, W. Han, M. Sofonea, A dynamic frictional contact problem with normal damped response, *Acta Applicandae Mathematicae*, 71 (2002), 159-178.

[4] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[5] G. Dal Maso, *An Introduction to* Γ*-Convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[6] E. De Giorgi, T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, *Rendiconti del Seminario Matemàtico di Brescia,* 3 (1979), 63-101.

[7] E. De Giorgi, G. Dal Maso, Γ-convergence and the calculus of variations, in *Mathematical Theory of Optimization*, T. Zolezzi (ed.), Lecture Notes in Mathematics 979, Springer, Berlin, (1983), 121-143.

[8] G. Duvaut, J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[9] G. Francfort, F. Murat, Homogenization and optimal bounds in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* 94 (1986), 307-334.

[10] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, American Mathematical Society, International Press, 2002.

[11] N. Kikuchi, J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

[12] A. Kulig, S. Migórski, Solvability and continuous dependence results for second order nonlinear evolution inclusion with a Volterra-type operator, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications,* (2012), in press.

[13] J.L. Lions, *Qualques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[14] S. Migórski, Dynamic hemivariational inequality modeling viscoelastic contact problem with normal damped response and friction, *Applicable Analysis*, 84 (2005), 669-699.

[15] Z. Naniewicz, P.D. Panagiotopoulos, *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*, Dekker, New York, 1995.

[16] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Nonconvex Energy Functions*, Birkhäuser, Basel, 1985.

[17] P.D. Panagiotopoulos, Coercive and semicoercive hemivariational inequalities, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 16 (1991), 209-231.

[18] P.D. Panagiotopoulos, *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[19] P.D. Panagiotopoulos, Hemivariational inequalities and Fan-variational inequalities. New applications and results, *Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena,* 43 (1995), 159-191.

[20] P.D. Panagiotopoulos, Modeling of nonconvex nonsmooth energy problems. Dynamic hemivariational inequalities with impact effects, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 63 (1995), 123-138.

[21] P.D. Panagiotopoulos, J. Haslinger, Optimal control and identification of structures involving multivalued nonmonotonicities. Existence and approximation results, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 11 (1992), 425-445.

[22] P.D. Panagiotopoulos, G. Pop, On a type of hyperbolic variational-hemivariational inequalities, *Journal of Applied Analysis*, 5 (1999), 95-112.

[23] N.S. Papageorgiou, F. Papalini, F. Renzacci, Existence of solutions and periodic solutions for nonlinear evolution inclusions, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* 48 (1999), 341-364.

[24] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, A quasistatic contact problem with directional friction and damped response, *Applicable Analysis*, 68 (1998), 409-422.

[25] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact. Variational Methods*, Lecture Notes in Physics 655, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[26] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics 276, Chapman and Hall/CRC, FL, 2006.

[27] S. Spagnolo, Sur limite delle soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 21 (1967), 657-699.

[28] L. Tartar, Remarks on homogenization, in *Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media*, J.L. Erickesn (ed.), Springer, New York, 1986, 228-246.

5. *Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych.*

4 Dorobek naukowy poza rozprawą habilitacyjną

Dorobek naukowy poza rozprawą habilitacyjną składa się z 36 artykułów, w tym 3 prace ([P5], [P6], [P33]) opublikowane przed uzyskaniem stopnia naukowego doktora nauk matematycznych:

P1. Z. Denkowski, S. Migórski, A. Ochal, Existence and uniqueness to a dynamic bilateral frictional contact problem in viscoelasticity, *Acta Applicandae Mathematicae,* 94 (2006), 251-276.

P2. Z. Denkowski, S. Migórski, A. Ochal, Optimal control for a class of mechanical thermoviscoelastic frictional control problems, *Control and Cybernetics,* 36 (2007), 611-632.

P3. Z. Denkowski, S. Migórski, A. Ochal, A class of optimal control problems for piezoelectric frictional contact models, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications,* 12 (2011), 1883-1895.

P4. H. Frankowska, A. Ochal, On singularities of value function for Bolza optimal control problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 306 (2005), 714-729.

P5. S. Migórski, A. Ochal, Optimal control of parabolic hemivariational inequalities, *Journal of Global Optimization*, 17 (2000), 285-300.

P6. S. Migórski, A. Ochal, Inverse coefficient problem for elliptic hemivariational inequality, Chapter 11 in: *Nonsmooth/Nonconvex Mechanics: Modeling, Analysis and Numerical Methods,* 2001, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 247-261.

P7. S. Migórski, A. Ochal, Existence of solutions to boundary parabolic hemivariational inequalities, *Proceedings of the International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering,* I. NNMAE 2002, Thessaloniki, Greece, July 5-6, 2002, C.C. Baniotopoulos, (ed.), 53-60.

P8. S. Migórski, A. Ochal, Boundary hemivariational inequality of parabolic type, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications,* 57 (2004), 579-596.

P9. S. Migórski, A. Ochal, Hemivariational inequalities for stationary Navier-Stokes equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 306 (2005), 197-217.

P10. S. Migórski, A. Ochal, Hemivariational inequalities for viscoelastic contact problem with slip dependent friction, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications,* 61 (2005), 135-161.

P11. S. Migórski, A. Ochal, Existence of solutions for second order evolution inclusions with application to mechanical contact problems, *Optimization,* 55 (2006), 101-120.

P12. S. Migórski, A. Ochal, Evolution hemivariational inequalities for Navier-Stokes type operators, *Proceedings of the International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering,* II. NNMAE 2006, Thessaloniki, Greece, July 7-8, 2006, C.C. Baniotopoulos, (ed.), 93-98.

P13. S. Migórski, A. Ochal, Navier-Stokes problems modeled by evolution hemivariational inequalities, *Discrete and Continuous Dynamical Systems,* Supplement 2007, 731-740.

P14. S. Migórski, A. Ochal, Nonlinear impulsive evolution inclusions of second order, *Dynamic Systems and Applications,* 16 (2007), 155-174.

P15. S. Migórski, A. Ochal, Vanishing viscosity for hemivariational inequality modeling dynamic problems in elasticity, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications,* 66 (2007), 1840-1852.

P16. S. Migórski, A. Ochal, Dynamic bilateral contact problem for viscoelastic piezoelectric materials with adhesion, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications,* 69 (2008), 495-509.

P17. S. Migórski, A. Ochal, An inverse coefficient problem for a parabolic hemivariational inequality, *Applicable Analysis,* 89 (2010), 243-256.

P18. S. Migórski, A. Ochal, Nonconvex inequality models for contact problems of nonsmooth mechanics, Chapter 3 in: *Computer Methods in Mechanics, Advanced Structured Materials,* M. Kuczma, K. Wilmanski (eds.), Vol. 1, 2010, Springer, Berlin, Heidelberg, 43-58.

P19. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Analysis of a dynamic elastic-viscoplastic contact problem with friction, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B,* 10 (2008), 887-902.

P20. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, An evolution problem in nonsmooth elasto-viscoplasticity, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications,* 71 (2009), e2766-e2771.

P21. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Modeling and analysis of an antiplane piezoelectric contact problem, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,* 19 (2009), 1295-1324.

P22. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Solvability of dynamic antiplane frictional contact problems for viscoelastic cylinders, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications,* 70 (2009), 3738-3748.

P23. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Weak solvability of a piezoelectric contact problem, *European Journal of Applied Mathematics,* 20 (2009), 145-167.

P24. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, A dynamic frictional contact problem for piezoelectric materials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 361 (2010), 161-176.

P25. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Analysis of a dynamic contact problem for electro-viscoelastic cylinders, *Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications,* 73 (2010), 1221-1238.

P26. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Variational analysis of fully coupled electro-elastic frictional contact problems, *Mathematische Nachrichten,* 283 (2010), 1314-1335.

P27. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Weak solvability of antiplane frictional contact problems for elastic cylinders, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications,* 11 (2010), 172-183.

P28. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Analysis of frictional contact problem for viscoelastic materials with long memory, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B,* 15 (2011), 687-705.

P29. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Analysis of lumped models with contact and friction, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik,* 62 (2011), 99-113.

P30. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Analysis of a quasistatic contact problem for piezoelectric materials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 382 (2011), 701-713.

P31. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Weak solvability of two quasistatic viscoelastic contact problems, *Mathematics and Mechanics of Solids*, (2012), in press.

P32. S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, series "Advances in Mechanics and Mathematics", Springer, 2012, in press.

P33. A. Ochal, Domain identification problem for elliptic hemivariational inequality, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 16 (2000), 267-278.

P34. A. Ochal, Optimal control problems for hemivariational inequalities, Third Polish Conference on Methods and Computer Systems in Scientific Research and Engineering Design, Krakow, Poland, November 19-21, 2001, R. Tadeusiewicz et al. (eds), 15-18.

P35. A. Ochal, Optimal control in superpotential for evolution hemivariational inequality, *WSEAS Transactions on Mathematics,* 1(1) (2003), 48-53.

P36. A. Ochal, Viscoelastic bilateral contact problem involving Coulomb friction law, *WSEAS Transactions on Mathematics,* 1(5) (2006), 63-68.

Publikacje [P1]-[P36] dotyczą głównie zastosowań równań różniczkowych i inkluzji operatorowych w matematycznym modelowaniu zagadnień fizyki i mechaniki. Otrzymane w pracach rezultaty dotyczą następujących problemów:

1. zagadnienia kontaktowe w teorii sprężystości i lepkosprężystości ([P1], [P10], [P11], [P15], [P22], [P27], [P28], [P36]),

2. zagadnienia kontaktowe w teorii piezoelektryczności ([P16], [P21], [P23], [P24], [P25], [P26], [P30]),

3. zagadnienia kontaktowe dla materiałów sprężysto-lepkoplastycznych ([P19], [P20]),
4. statyczne i ewolucyjne nierówności hemiwariacyjne dla równań Naviera-Stokesa ([P9], [P13]),
5. nierówności hemiwariacyjne typu parabolicznego ([P5], [P8], [P17]),
6. zagadnienia sterowania optymalnego dla problemów kontaktowych mechaniki ([P2], [P3], [P5], [P6], [P17],[P35]),
7. matematyczne modelowanie innych zagadnień mechaniki i fizyki ([P4], [P14], [P18], [P29]),
8. monografia ([P32]).

1. Zagadnienia kontaktowe w teorii sprężystości i lepkosprężystości

Niegładkie zagadnienia kontaktowe są rozważane dla ciał sprężystych w pracach [P15], [P27] i dla ciał lepkosprężystych w artykułach [P1], [P10], [P11], [P22], [P28], [P36]. Do opisu zjawiska kontaktu między ciałem a podłożem wykorzystano prawa konstytutywne postaci:

$$\sigma(t) = \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) \tag{38}$$

dotyczące zagadnienia kontaktowego w teorii sprężystości,

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(t, \varepsilon(u'(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t))) \tag{39}$$

dla dynamicznego zagadnienia w teorii lepkosprężystości,

$$\sigma(t) = \mathcal{B}(t, \varepsilon(u(t))) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\varepsilon(u(s))\, ds \tag{40}$$

będące lepkosprężystym prawem z długą pamięcią. W powyższych równaniach u jest przemieszczeniem układu, σ, $\varepsilon(u)$ są tensorami odpowiednio naprężenia i odkształcenia, $\mathcal{A}$ jest operatorem lepkości, $\mathcal{B}$ oznacza operator sprężystości oraz $\mathcal{C}$ jest operatorem relaksacji. Zauważmy, że gdy $\mathcal{A} = 0$ w (39) lub $\mathcal{C} = 0$ w (40) to odpowiednie prawa konstytutywne redukują się do prawa konstytutywnego teorii sprężystości (38).

Celem pracy [P15] jest zbadanie istnienia rozwiązania hiperbolicznej nierówności hemiwariacyjnej będącej słabym sformułowaniem dynamicznego zagadnienia teorii sprężystości z wielowartościowym prawem w postaci podróżniczki. Podano warunki, przy których problem Cauchy'ego dla skojarzonej ewolucyjnej inkluzji operatorowej posiada rozwiązanie. Istnienie tego rozwiązania otrzymano w oparciu o metodę znikającej lepkości.

Liniowe prawo Hooke'a wykorzystano w pracy [P27] w matematycznym modelu antypłaskiego zagadnienia teorii sprężystości. W problemie kontaktowym rozważono wielowartościowy warunek brzegowy w postaci podróżniczki Clarke'a, który zależy od całkowitego poślizgu. Wariacyjne sformułowanie tego zagadnienia prowadzi do eliptycznej nierówności hemiwariacyjnej. W pracy otrzymano nowe rezultaty o istnieniu słabego rozwiązania rozważanej nierówności oraz podano warunki gwarantujące jednoznaczność rozwiązania. Dowody opierają się na wynikach dla abstrakcyjnych inkluzji operatorowych w przestrzeniach Banacha.

Dynamiczne zagadnienia kontaktowe z konstytutywnym prawem Kelvina-Voigta dla materiałów lepkosprężystych zbadano w pracach [P1], [P10], [P11], [P22], [P36]. W artykułach [P1], [P36] rozważono potencjały wypukłe, prowadzące do nierówności wariacyjnych, podczas gdy prace [P10], [P11], [P22] dotyczą niemonotonicznych i niegładkich praw kontaktowych zadanych przez superpotencjały lokalnie lipschitzowskie. Wariacyjne sformułowania tych ostatnich zagadnień prowadzą do nierówności hemiwariacyjnych typu hiperbolicznego. Warto zauważyć, że praca [P10] podaje rozszerzenia wyników otrzymanych w [A1] na przypadek, gdy składowa styczna tensora naprężenia zależy od przemieszczenia i prędkości. Umożliwia to matematyczne modelowanie zagadnień kontaktowych, w których współczynnik tarcia, zależny od poślizgu, może zmieniać się wraz ze składową styczną przemieszczenia.

Praca [P11] wykorzystuje teorię operatorów pseudomonotonicznych i zawiera rezultaty egzystencjalne dla ewolucyjnych inkluzji operatorowych rzędu drugiego. Rezultaty te zastosowano do jednostronnego zagadnienia kontaktowego teorii lepkosprężystości. Kontaktu dwustronnego ciała lepkosprężystego z podłożem dotyczą prace [P1], [P36], w których badane są modele z prawem Coulomba oraz praca [P22] opisująca antypłaskie zagadnienie z tarciem. W pracach tych zbadano istnienie i jednoznaczność rozwiązania hiperbolicznych nierówności wariacyjnych i hemiwariacyjnych, stosując rezultaty dla operatorów pseudomonotonicznych i twierdzenie o punkcie stałym.

Celem pracy [P28] jest zbadanie zagadnienia kontaktowego dla ciała lepkosprężystego z długą pamięcią, którego sformułowanie wariacyjne jest nierównością hemiwariacyjną z operatorem typu Volterry, opisującym historię zależną od przemieszczenia. Podano warunki gwarantujące istnienie i jednoznaczność słabego rozwiązania rozważanego zagadnienia oraz opisano przykłady superpotencjałów niewypukłych, które spełniają te warunki.

2. Zagadnienia kontaktowe w teorii piezoelektryczności

Materiały piezoelektryczne należą do klasy materiałów dielektrycznych, które wykazują pewne odkształcenia w odpowiedzi na przyłożone pole elektryczne (efekt prosty) oraz polaryzację dielektryczną w odpowiedzi na odkształcenia mechaniczne (efekt odwrotny). Materiały piezoelektryczne znane są od dawna, ale dopiero ostatnio znalazły zastosowania w technologii materiałów inteligentnych. Nowe modele matematyczne zjawisk kontaktowych w mechanice ośrodków piezoelektrycznych zostały zbadane w oparciu o teorię nierówności hemiwariacyjnych w pracach [P16], [P24], [P25] dla procesów dynamicznych, [P30] dla procesów quasi-statycznych oraz [P21], [P23], [P26] dla zjawisk statycznych.

Równania konstytutywne, które łączą własności mechaniczne i elektryczne materiałów piezoelektrycznych można zapisać w postaci

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u') + \mathcal{B}\varepsilon(u) - \mathcal{P}^\top E(\varphi) \\ D = \mathcal{P}\varepsilon(u) + \beta E(\varphi), \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są operatorami lepkości i sprężystości, $\mathcal{P}$ jest tensorem piezoelektrycznym, $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ oznacza natężenie pola elektrycznego φ, D jest indukcją elektryczną oraz β jest tensorem przenikalności elektrycznej. Istotnym wkładem wyżej wymienionych prac w matematyczną teorię mechaniki kontaktu i teorię piezoelektryczności jest analiza wielowartościowych i niemonotonicznych praw kontaktowych uwzględniających zarówno prawa tarcia, jak i warunki przewodności elektrycznej. Prawa te można wyrazić w postaci inkluzji zawierających uogólnioną podróżniczkę w sensie Clarke'a niewypukłych i nieróżniczkowalnych superpotencjałów. Przykładami praw modelujących zjawiska kontaktu są następujące zależności: układ

$$\begin{cases} -\sigma_\nu \in h_\nu(\varphi - \varphi_0)\, \partial j_\nu(u_\nu - g_0) \\ -\sigma_\tau \in h_\tau(\varphi - \varphi_0, u_\nu - g_0)\, \partial j_\tau(u_\tau) \\ D \cdot \nu \in h(u_\nu - g_0)\, \partial j(\varphi - \varphi_0) \end{cases}$$

badany w pracy [P26] oraz układ

$$\begin{cases} u_\nu = 0 \\ -\sigma_\tau \in h_\tau(\varphi - \varphi_0)\, \partial j_\tau(u_\tau) \\ D \cdot \nu \in \partial j(\varphi - \varphi_0) \end{cases}$$

modelujący kontakt dwustronny, rozważany w pracy [P23].

Matematyczne modele dynamicznych zagadnień kontaktowych dla materiałów piezoelektrycznych zbadano w pracach [P16], [P24], [P25]. W artykułach [P24], [P25] otrzymano nowe wariacyjne sformułowania tych zagadnień w postaci układu dwóch nierówności hemiwariacyjnych oraz udowodniono istnienie i jednoznaczność słabych rozwiązań. Dowody są oparte na abstrakcyjnych rezultatach dla ewolucyjnych inkluzji operatorowych w przestrzeniach Banacha. Ponadto w pracy [P16] zbadano model łączący własności lepkosprężyste i piezoelektryczne materiału z własnościami adhezyjnymi powierzchni kontaktowej. Udowodniono istnienie słabego rozwiązania zagadnienia matematycznego, sformułowanego jako układ złożony z nierówności hemiwariacyjnej typu hiperbolicznego, zależnego od czasu równania eliptycznego i równania różniczkowego zwyczajnego, modelującego przyleganie na powierzchni kontaktu. Warto podkreślić, że w zagadnieniu rozważanym w pracy [P25] przewodność elektryczna może zależeć od tzw. całkowitego poślizgu, co stanowi ważny i nowy element w zaprezentowanym podejściu.

Analizę quasi-statycznego zagadnienia kontaktowego dla materiałów piezoelektrycznych przeprowadzono w pracy [P30]. Wykorzystano nieliniowe prawa konstytutywne i wielowartościowe warunki kontaktowe w postaci podróżniczki. Słabe sformułowanie tego zagadnienia prowadzi do układu dwóch nierówności hemiwariacyjnych zależnych od historii. W oparciu o wyniki pracy [A6] uzyskano rezultat o istnieniu i jednoznaczności słabego rozwiązania badanego zagadnienia.

Statyczne zagadnienia kontaktowe mechaniki, uwzględniające efekty piezoelektryczne zbadano w pracach [P21], [P23], [P26]. Podano słabe sformułowania modeli matematycznych, przeprowadzono ich analizę wariacyjną i otrzymano nowe rezultaty o dobrym postawieniu tych zagadnień. Warto zauważyć, że prace [P21] i [P23] obejmują problemy kontaktu dwustronnego, a prace [P21] i [P25] podają rezultaty dotyczące antypłaskich zagadnień kontaktowych z tarciem dla materiałów piezoelektrycznych.

3. Dynamiczne zagadnienia kontaktowe dla materiałów sprężysto-lepkoplastycznych

Dynamiczne zagadnienia niegładkiej teorii sprężysto-lepkoplastyczności rozważane są w pracach [P19], [P20]. Model matematyczny opisujący kontakt pomiędzy odkształcalnym ciałem a podłożem opiera się na sprężysto-lepkoplastyczym prawie konstytutywnym postaci

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(t, \varepsilon(u'(t))) + \mathcal{B}(t, \varepsilon(u(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(s, \sigma(s) - \mathcal{A}(s, \varepsilon(u'(s))), \varepsilon(u(s)))\, ds, \tag{41}$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest operatorem lepkości, $\mathcal{B}$ operatorem sprężystości, a $\mathcal{G}$ jest funkcją konstytutywną opisującą lepkoplastyczne zachowanie się materiału. Prawa konstytutywne postaci (41) występują w modelach reologicznych i opisują materiały mające właściwości sprężyste, lepkościowe i plastyczne (por. np. [10, 25], [P32]). Zauważmy, że gdy $\mathcal{G} = 0$, to prawo konstytutywne (41) redukuje się do prawa konstytutywnego teorii lepkosprężystości z krótką pamięcią. W rozważanym w pracy [P19] modelu, zjawisko kontaktu z tarciem jest opisywane przez wielowartościowe i niemonotoniczne warunki brzegowe w postaci podróżniczki Clarke'a superpotencjałów lokalnie lipschitzowskich. Wariacyjne sformułowanie tego zagadnienia prowadzi do ewolucyjnej nierówności hemiwariacyjnej. W pracy podano warunki gwarantujące istnienie i jednoznaczność rozwiązania tej nierówności hemiwariacyjnej (Twierdzenie 4.1). Dowód opiera się na rezultatach dotyczących abstrakcyjnych ewolucyjnych inkluzji rzędu drugiego oraz twierdzeniu o punkcie stałym odwzorowania zwężającego. Wstępną wersję tych wyników zawiera praca [P20] zaprezentowana podczas *The Fifth World Congress of Nonlinear Analysts.*

4. Statyczne i ewolucyjne nierówności hemiwariacyjne z operatorem Naviera-Stokesa

Prace [P9], [P13] dotyczą nierówności hemiwariacyjnych dla równań Naviera-Stokesa z niestandardowymi warunkami brzegowymi. W pracy [P9] zajmujemy się zagadnieniem stacjonarnym, natomiast w artykule [P13] badamy ewolucyjne nierówności hemiwariacyjne z operatorem typu Naviera-Stokesa. Równania Naviera-Stokesa modelują przepływ lepkiego płynu nieściśliwego i w sformułowaniu Lamba mają postać

$$\begin{cases} u' - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} u + \operatorname{rot} u \times u + \nabla \widetilde{p} = f & \text{w} \;\; \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{w} \;\; \Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0 & \text{w} \;\; \Omega, \end{cases}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$, $\Gamma = \partial\Omega$, $0 < T < +\infty$, funkcja $\widetilde{p} = p + \frac{1}{2}|u|^2$ oznacza dynamiczne ciśnienie Bernoulliego i spełnia niestandardowy warunek brzegowy w postaci podróżniczki Clarke'a

$$\widetilde{p}(x, t) \in \partial j(x, t, u_\nu(x, t)) \;\; \text{na} \;\; \Gamma \times (0, T).$$

Motywacją do badań nierówności hemiwariacyjnej dla równań Naviera-Stokesa z niestandardowymi warunkami brzegowymi są zagadnienia przepływu płynu przez ośrodki półprzepuszczalne występujące w technice i biologii (np. naturalne i wytworzone przez człowieka błony półprzepuszczalne).

Celem pracy [P9] jest wykazanie twierdzenia o istnieniu słabych rozwiązań dla stacjonarnej nierówności hemiwariacyjnej z operatorem typu Naviera-Stokesa (Twierdzenie 17) i podanie warunków gwarantujących jednoznaczność rozwiązania (Stwierdzenie 19). W dowodzie wykorzystano rezultat o surjektywności koercytywnego i wielowartościowego operatora pseudomonotonicznego. Zbadano wariacyjną stabilność zbioru rozwiązań nierówności hemiwariacyjnej ze względu na zaburzenia superpotencjału występującego w wielowartościowym warunku brzegowym. Podano warunki, przy których takie zaburzenia superpotencjału powodują małe zmiany rozwiązania (Twierdzenie 21).

Uogólnieniem tych wyników na przypadek dynamiczny są rezultaty zawarte w pracy [P13] i jej wstępnej wersji [P12] zaprezentowanej podczas konferencji *The Second International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering.* Wariacyjne sformułowanie dynamicznych równań Naviera-Stokesa z wielowartościowym warunkiem brzegowym prowadzi do ewolucyjnej nierówności hemiwariacyjnej. Twierdzenie o istnieniu słabych rozwiązań dla tej nierówności udowodniono w pracy [P13] (Twierdzenie 1), stosując metodę Galerkina do zagadnienia ze zregularyzowanym superpotencjałem.

5. Nierówności hemiwariacyjne typu parabolicznego

Nierówności hemiwariacyjne typu parabolicznego są badane w pracach [P5], [P7], [P8], [P17]. Nierówności te pozwalają modelować zjawiska elektrostatyczne oraz zjawiska półprzepuszczalności, występujące w przepływach przez ośrodki porowate. Rozwiązaniami tych zagadnień są odpowiednio potencjał elektryczny i ciśnienie.

Celem pracy [P8] jest udowodnienie nowego rezultatu egzystencjalnego dla nierówności hemiwariacyjnej typu parabolicznego, która opisuje model przepływu płynu przy niemonotonicznych warunkach brzegowych. Rezultat ten jest uogólnieniem wyniku G. Duvaut i J.L. Lionsa [8] na przypadek niegładki i niewypukły. Praca podaje zastosowanie otrzymanego wyniku do zagadnień przepływów laminarnych i lepkoplastycznych (płyny Binghama) z wielowartościowymi i niemonotonicznymi warunkami brzegowymi z tarciem i adhezją. Główny rezultat pracy [P8] był prezentowany na konferencji *The First International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering* (por. [P7]).

W pracy [P5] zbadano zagadnienie sterowania optymalnego dla układu o parametrach rozłożonych, które w naturalny sposób pojawia się w problemach parabolicznych. Podano warunki gwarantujące półciągłość z góry odwzorowania wielowartościowego, które sterowaniu przyporządkowuje zbiór rozwiązań nierówności hemiwariacyjnej (por. Stwierdzenie 4.1). W oparciu o tę własność i metodę bezpośrednią rachunku wariacyjnego uzyskano twierdzenie o istnieniu rozwiązania optymalnego problemu sterowania (zob. Twierdzenie 4.1).

Zagadnieniem sterowania optymalnego jest zadanie identyfikacji parametrów w nieliniowym równaniu parabolicznym z wielowartościowym warunkiem brzegowym. Zagadnienie to zbadano w pracy [P17], otrzymując rezultaty o ciągłej zależności rozwiązania od współczynnika równania i o istnieniu rozwiązania zadania odwrotnego. Powyższe zagadnienie odwrotne jest ważne z praktycznego punktu widzenia, ponieważ jego rozwiązanie umożliwia prognozowanie wartości współczynników, opisujących własności ośrodka, na podstawie informacji o rozwiązaniu pochodzących z pomiarów.

6. Zagadnienia sterowania optymalnego dla problemów kontaktowych mechaniki

Zagadnienia sterowania optymalnego układami opisywanymi przez nierówności hemiwariacyjne są badane w pracach [P2], [P3], [P6], [P34], [P35], [P36]. Należy podkreślić duże znaczenie praktyczne problemów optymalizacji, m.in. w mechanice, fizyce i ekonometrii. Przykładowo, z problematyką sterowania optymalnego spotykamy się w technice, gdy mamy za zadanie przeprowadzić obiekt z jednego stanu w drugi w najkrótszym czasie, czy regulować prędkość samolotu w taki sposób, aby miał on największy zasięg. Teoria sterowania optymalnego znalazła zastosowanie w optymalnym planowaniu ekonomicznym, takim jak planowanie inwestycji, optymalny rozkład zasobów, zagadnienie optymalnej sieci transportu, optymalnego rozkładu obciążeń w systemie energetycznym i w wielu innych zagadnieniach.

W pracach [P2], [P34] rozważane są układy o parametrach rozłożonych dla nierówności hemiwariacyjnych typu hiperbolicznego. Zbadano w nich zagadnienie czasooptymalne polegające na osiągnięciu ruchomego celu w jak najkrótszym czasie poruszając się po trajektorii rozwiązania nierówności hemiwariacyjnej. Otrzymano także rezultaty dla problemu najdłuższego pobytu, w którym sterujemy układem w taki sposób, aby pozostać jak najdłużej w wybranym i zmiennym w czasie obszarze przestrzeni stanów. Powyższe zagadnienia są niestandardowe z powodu braku jednoznaczności rozwiązania nierówności hemiwariacyjnych. Kluczową własnością niezbędną do otrzymania rozwiązań optymalnych jest rezultat o górnej półciągłości odwzorowania, które sterowaniu dopuszczalnemu przyporządkowuje zbiór rozwiązań nierówności hemiwariacyjnej. Ponadto praca [P2] zawiera rezultaty dla zagadnienia sterowania optymalnego dla układu złożonego z nierówności hemiwariacyjnych typu hiperbolicznego i parabolicznego. Badany układ opisuje dynamiczne zagadnienie kontaktowe z tarciem dla ciał termolepkosprężystych.

W pracy [P35] podano warunki gwarantujące istnienie rozwiązania optymalnego w zadaniu sterowania dla ewolucyjnej inkluzji operatorowej rzędu drugiego, w której zmienna sterowania występuje w wielowartościowym operatorze w postaci podróżniczki Clarke'a. Zagadnienia takie odpowiadają problemom odwrotnym, w których szukamy nieznanych parametrów występujących w wielowartościowych prawach konstytutywnych.

Zagadnieniom sterowania optymalnego układami zadanymi przez eliptyczne nierówności hemiwariacyjne poświęcone są prace [P3], [P6], [P33]. Artykuł [P3] przedstawia wyniki dla zagadnień sterowania optymalnego i problemów odwrotnych dla układu dwóch nierówności hemiwariacyjnych modelujących statyczne zjawiska kontaktowe w teorii piezoelektryczności. Praca [P6] dotyczy interesującego zastosowania metody homogenizacji do problemu identyfikacji nieciągłych współczynników w eliptycznej nierówności hemiwariacyjnej. W artykule [P33] podano twierdzenie egzystencjalne dla zagadnienia poszukiwania optymalnego kształtu dla eliptycznej nierówności hemiwariacyjnej, w którym rolę sterowań pełni pewna rodzina zbiorów otwartych, a funkcjonał kosztu ma ogólną postać całkową.

7. Matematyczne modelowanie innych zagadnień mechaniki i fizyki

Zastosowaniom równań różniczkowych i inkluzji operatorowych w matematycznym modelowaniu zagadnień fizyki i mechaniki poświęcone są m. in. publikacje [P4], [P14], [P18], [P29].

Praca [P4] dotyczy funkcji wartości w problemie sterowania optymalnego typu Bolzy dla zagadnienia początkowego dla równania różniczkowego zwyczajnego. Zasada maksimum Pontriagina podaje warunki konieczne optymalności i umożliwia znajdowanie rozwiązania problemu sterowania optymalnego poprzez szukanie rozwiązania równania Hamiltona-Jacobiego. Okazuje się, że rozwiązaniem równania Hamiltona-Jacobiego jest funkcja wartości, która w przypadku ogólnym nie musi być funkcją różniczkowalną. Fakt ten jest przyczyną trudności w badaniu równania Hamiltona-Jacobiego i wymaga dodatkowej analizy zbioru punktów osobliwych rozwiązania. Praca [P4] prezentuje własności funkcji wartości (Twierdzenie 6) oraz bada propagację osobliwości funkcji wartości metodą charakterystyk, podając rozszerzenie warunku typu Rankine-Hugoniota (Twierdzenie 7). Warunek ten pojawia się w prawach zachowania, natomiast jego rozszerzenie pozwala na określenie propagacji punktów ekstremalnych wzdłuż pewnej hiperpowierzchni zawartej w zbiorze punktów osobliwych funkcji wartości.

Praca [P14] dotyczy zagadnień nieliniowych dla impulsowych inkluzji różniczkowych rzędu drugiego. Tego typu zagadnienia spotyka się w mechanice, fizyce, biologii, chemii, biotechnologii, itd. w sytuacjach, gdy w pewnych chwilach czasowych parametry układu (np. przemieszczenie, prędkość) ulegają szybkim zmianom. Ponieważ zmiany te są krótkotrwałe, często przyjmuje się, że są one opisywane przez skoki parametrów w ustalonych momentach. Naturalnym narzędziem w matematycznym modelowaniu tego typu zjawisk jest teoria impulsowych równań różniczkowych. Praca [P14] podaje pierwsze znane w literaturze rezultaty egzystencjalne dla impulsowych inkluzji różniczkowych rzędu drugiego z wielowartościowymi operatorami skoku zależnymi od funkcji i jej pochodnej (zob. Twierdzenie 3.4 i Twierdzenie 3.7). Uzyskane wyniki zastosowano do zagadnienia kontaktowego w teorii lepkosprężystości z niegładkim i niewypukłym superpotencjałem modelującym niemonotoniczne zjawiska powierzchniowe. Słabym sformułowaniem tego zagadnienia jest nierówność hemiwariacyjna typu hiperbolicznego z impulsami. Kojarzymy z nią inkluzję operatorową i dowodzimy, że każde rozwiązanie inkluzji jest rozwiązaniem nierówności hemiwariacyjnej (por. Lemat 4.3).

Artykuł [P18] jest pracą przeglądową opisującą wybrane niegładkie i niewypukłe zagadnienia kontaktowe dla materiałów lepkosprężystych z krótką i długą pamięcią, materiałów termolepkosprężystych oraz materiałów piezolepkosprężystych z adhezją. Zjawiska te modelowane są przez niemonotoniczne wielowartościowe brzegowe warunki w postaci podróżniczki Clarke'a funkcji lokalnie lipschitzowskich. Są to uogólnienia warunku naturalniej odpowiedzi, prawa tarcia czy prawa Fourieria przewodnictwa cieplnego. Analiza tych niestandardowych zjawisk pozwala na lepsze zrozumienie i dokładniejsze przewidywanie zachowania się rozważanego układu mechanicznego.

W pracy [P29] zostały przedstawione dwa matematyczne modele mechanicznych układów drgających, uwzględniające brzegowe warunki kontaktowe zadane przez podróżniczkę funkcji niewypukłych. Modele te opisywane są przez wielowartościowe równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego, w których niewiadomą jest przemieszczenie układu. W oparciu o abstrakcyjne rezultaty dla inkluzji różniczkowych w przestrzeniach skończenie wymiarowych, udowodniono istnienie słabych rozwiązań (zob. Twierdzenie 2 i Twierdzenie 3).

8. Monografia

Monografia [P32] prezentuje nowoczesną teorię inkluzji nieliniowych i nierówności hemiwariacyjnych oraz podaje jej zastosowania w mechanice zjawisk kontaktowych. Pozycja ta powstała w rezultacie czteroletniej współpracy pomiędzy Uniwersytetem Jagiellońskim a Uniwersytetem w Perpignan. U podstaw powstania monografii leży przeświadczenie autorów, że dotychczasowe wykorzystanie wielowartościowej analizy niegładkiej do modelowania i analizy modeli zjawisk kontaktowych jest niewystarczające. W sposób systematyczny i jednolity przedstawia najnowsze rezultaty (niektóre dotychczas niepublikowane) dotyczące matematycznej teorii nierówności hemiwariacyjnych, dostarczając osobom pracującym w zastosowaniach nowych narzędzi i metodologii badań.

5 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

5.1 Udział w projektach badawczych

krajowych

2011 - 2014 Projekt badawczy NCN: "Nierówności hemiwariacyjne - asymptotyka rozwiązań i zastosowania" (N N201 604 640), główny wykonawca

2007 - 2010 Projekt badawczy MNiSW: "Teoria nierówności hemiwariacyjnych i ich zastosowania" (N201 027 32/1449), główny wykonawca

2004 - 2007 Projekt badawczy MNiSW: "Modelowanie wielowartościowych praw w dynamicznych problemach kontaktowych" (4 T07A 027 26), główny wykonawca

2004 - 2005 Projekt badawczy UJ: "Matematyczne modelowanie wybranych zagadnień mechaniki", realizowany w ramach Rektorskiego Funduszu Stypendialnego (10 miesięcy)

2003 - 2006 Projekt badawczy MNiSW: "Nierówności hemiwariacyjne: teoria i zastosowania w mechanice" (2 P03A 003 25), główny wykonawca

2000 - 2002 Projekt badawczy KBN: "Problemy sterowania optymalnego dla układów opisywanych przez równania różniczkowe cząstkowe i nierówności hemiwariacyjne: istnienie i charakteryzacja rozwiązań optymalnych" (2 P03A 004 19), wykonawca

2000 - 2002 Projekt badawczy KBN: "Zagadnienia identyfikacji parametrów w modelowaniu ośrodków niejednorodnych" (7 T07A 047 18), wykonawca

1998 - 2000 Projekt badawczy KBN: "Problemy optymalizacji kształtu dla układów opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi i nierównościami hemiwariacyjnymi" (2 P03A 040 15), wykonawca

międzynarodowych

2012 - 2016 "Nonlinear inclusions, hemivariational inequalities with applications to contact mechanics", project among six universities: the Jagiellonian University in Krakow (Poland), University of Perpignan (France), Guangxi University of Nationalities in Nanning (P.R. China), Zhejiang University in Hangzhou (P.R. China), University of

Iowa (USA), Oakland University in Rochester, (USA), No 295118, FP7- PEOPLE-2011-IRSES, International Research Staff Exchange Scheme), wykonawca

2009 - 2010 "Nonsmooth Analysis with Applications to Contact Mechanics", project POLONIUM between the Jagiellonian University and Université de Perpignan, France (Nr 7817/R09/R10), wykonawca

2009 - 2010 "Nonlinear Hemivariational Inequalities - Theory and Applications in Engineering Sciences", project between the Jagiellonian University and Central South University, Changsha, Hunan, P.R. China (Nr 33-21), wykonawca

5.2 Udział w konferencjach i sympozjach

2011

- Fifth German Polish Conference on Optimization - Methods and Applications, Dobczyce, Krakow, Poland (9-13.11.2011); wykład plenarny: Optimal control problems in nonsmooth contact mechanics
- Twenty Fifth IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, Berlin, Germany (12-16.09.2011); dwa referaty na zaproszenie: Fully nonlinear viscoelastic contact problems - modeling and optimization methods oraz On some evolution variational - hemivariational inequalities with application
- Sixth Symposium on Nonlinear Analysis, Torun, Poland (7-9.09.2011); referat: Nonlinear analysis in modeling of contact problems in mechanics
- Workshop on Functional Analysis and its Applications in Mathematical Physics and Optimal Control, Nemecka, Slovak Republic (5-10.09.2011); referat na zaproszenie: Optimal control for a class of history-dependent hemivariational inequalities
- 19th French-Polish Seminar of Mechanics, University of Perpignan, Perpignan, France(8-12.06.2011); referat na zaproszenie: Antiplane frictional contact problems for electro-viscoelastic cylinders
- 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics, Warsaw, Poland (9-12.05. 2011); referat: Optimal control problems for a class of evolution inclusions with applications to dynamic and quasi-static viscoelastic contact problems
- AMS 2011 Spring Central Section Meeting, University of Iowa, Iowa City, USA (18-20.03. 2011); referat na zaproszenie: Dynamic antiplane frictional contact problems - modeling and analysis

2010

- Seminar "Inequalities and Partial Differential Equations", Zakopane, Male Ciche, Poland (21-26.09.2010); referat: Inequalities for martingale transforms and their applications

- Workshop "Nonlinear Optimization, Variational Inequalities and Equilibrium Problems", International School of Mathematics "G. Stampacchia", Erice, Italy (2-10.07.2010); referat: Optimal control for integrodifferential hemivariational inequalities
- Seventh Forum on Partial Differential Equations, Poznan, Bedlewo, Poland (13-18.06.2010); referat: Mathematical model of contact problem for viscoelastic materials with long memory
- Eighth AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Dresden University of Technology, Dresden, Germany (25-28.05.2010); referat: Frictional contact boundary conditions via hemivariational inequalities
- Miniconference "Methods of Optimization", Warsaw, Poland (10-11.05.2010); referat: Evolution hemivariational inequalities and applications
- First Mini Symposium "Differential Equations with Applications", Lodz, Poland (16.04.2010); referat: Hemivariational inequalities for 1-D dynamical contact problems

2009

- Third International Conference on Complex Systems and Applications, University of Le Havre, Le Havre, Normandy, France (29.06 - 02.07.2009); referat: On quasistatic models of contact phenomena
- The First World Congress on Global Optimization with Applications in Engineering and Science, Hunan University, China (1-5.06.2009); referat na zaproszenie: On a quasistatic hemivariational inequality
- Workshop "PhaseVariations '09" (bimester: Geometric Properties of Nonlinear Local and Nonlocal Problems), University of Pavia, Italy (21-22.05.2009); referat na zaproszenie: Hemivariational inequality approach to dynamic contact
- Fourth German Polish Conference on Optimization Methods and Applications, Moritzburg, Saxony, Germany (14-18.03.2009); referat: A class of optimal control problems for piezoelectric frictional contact models

2008

- Seminar "Around Differential Inclusions", Zakopane, Male Ciche, Poland (26-29.09.2008); referat: Nonconvex superpotential laws - stationary hemivariational inequalities
- Eighth World Conference on Computational Mechanics (WCCM VIII) and Fifth European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering (ECCOMAS V), Venice, Italy (30.06 - 5.07.2008); referat na zaproszenie: Asymptotic homogenization of hemivariational inequalities in elasticity
- Sixth Forum on Partial Differential Equations, Poznan, Bedlewo, Poland (2-4.06.2008); referat: Antiplane contact problems in elasticity

- Seventh AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Arlington, Texas, USA (18-21.05.2008); referat na zaproszenie: A class of dynamic hemivariational inequalities modeling fully nonlinear viscoelastic contact problems

2007

- Fifth Symposium on Nonlinear Analysis, Torun, Poland (10-14.09.2007); referat: Nonlinear impulsive evolution inclusions of second order
- Seminar "Around Calculus of Variations", Zakopane, Male Ciche, Poland (29.08 - 1.09.2007); referat: G-convergence and optimal control problems
- Twenty Third IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, Krakow, Poland (23-27.07.2007); referat: On integrodifferential hemivariational inequalities for viscoelastic materials with long memory term
- EMS Conference on Geometric Analysis and Nonlinear PDE, Poznan, Bedlewo, Poland(3-10.06. 2007); referat: Nonsmooth nonlinearities in contact mechanics

2006

- Seminar "Maximum Principle - Various Points of View", Zakopane, Male Ciche, Poland (30.08- 2.09.2006); referat: Maximum principle for vector-valued minimizers of some integral functionals
- Second International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering, Thessaloniki, Greece (7-8.07.2006); referat: Evolution hemivariational inequalities for Navier-Stokes type operators
- The AIMS Sixth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Poitiers, France (25-28.06.2006); referat: Evolution hemivariational inequalities for Navier-Stokes type operators (extended version)
- Workshop on Evolution Equations for Deterministic and Stochastic Systems, Vienna, Austria (5-8.06.2006); referat: A trial of unification in contact mechanics which leads to differential inclusion
- Fifth Forum on Partial Differential Equations, Poznan, Bedlewo, Poland (29.05 - 2.06.2006); referat: On some contact problems in mechanics
- Advanced School on Methods of Multivalued Analysis, Torun, Poland (15-18.02.2006)

2005

- Eighth WSEAS Conference on Applied Mathematics, Tenerife, Canary Islands, Spain(16-18.12.2005); referat: Viscoelastic bilateral contact problem involving Coulomb friction law
- Third German-Polish Conference on Optimization Methods and Applications, Poznan, Bedlewo, Poland (10-13.11.2005); referat: On some dynamic bilateral frictional contact problem in viscoelasticity

- Twenty Second IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization, Torino, Italy (18-22.07.2005); referat: A model of viscoelastic contact problem with slip dependent friction

- Seminar "Sobolev Inequalities - Various Points of View", Zakopane, Male Ciche, Poland(16-19.06.2005); referat: On some viscoelastic contact problems in mechanics

2004

- Twelfth French-German-Spanish Conference on Optimization, Avignon, France, (20-24.09. 2004); referat: Hemivariational inequality for viscoelastic contact problem with slip dependent friction

- Fourth Forum on Partial Differential Equations, Poznan, Bedlewo, Poland (7-11.06.2004); referat: Hemivariational inequalities for stationary Navier-Stokes equation

- Polish Seminar on Theory of Extremal Problems, Lodz, Poland (15.01.2004); referat: Control problems in hemivariational inequalities for Navier-Stokes equations

2003

- Fourth WSEAS Conference on Applied Mathematics, Malta (1-3.09.2003); referat: Optimal control in superpotential for evolution hemivariational inequality

- Twenty First IFIP TC7 Conference on System Modeling and Optimization, Sophia Antipolis, France (21-25.07.2003); referat: Optimal control problems for evolution quasi-hemivariational inequality

- TMR Workshop on Evolution Equations for Deterministic and Stochastic Systems, Roscoff, France (19-23.05.2003); referat: On singularities of value functions for Boltza optimal control problem

2002

- Banach Center Summer School on Mathematical Control Theory, Poznan, Bedlewo, Warsaw, Poland (2-20.09.2002)

- The International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering, Thessaloniki, Greece (5-6.07.2002); referat: Existence of solutions to boundary parabolic hemivariational inequalities

- Third Forum on Partial Differential Equations, Poznan, Bedlewo, Poland (10-14.06.2002); referat: Parabolic quasi-hemivariational inequalities

2001

- Third Polish Conference on Methods and Computer Systems in Scientific Research and Engineering Design, Krakow, Poland (19-21.11.2001); referat: Optimal control problems for hemivariational inequalities

- Twentieth IFIP TC7 Conference on System Modeling and Optimization, Trier, Germany(23-27.07.2001); referat: Time optimal control problem for evolution hemivariational inequality

- Third Polish Symposium on Nonlinear Analysis, Lodz, Poland (29-31.01.2001); referat: Optimal control for distributed parameter systems described by hemivariational inequality of second order

5.3 Recenzje artykułów w czasopismach matematycznych

Annales Polonici Mathematici
Applied Mathematics Letters
Archive of Applied Mechanics
Dynamic Systems and Applications
Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems
Folia Mathematica
Journal of Applied Analysis
Journal of Global Optimization
Journal of Inequalities and Applications
Journal of Mathematical Analysis and Applications
Nonlinear Analysis Series A: Theory Methods and Applications
Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications
Romanian Journal of Mathematics and Applications

5.4 Organizacja konferencji

- Współorganizator cyklu międzynarodowych seminariów dotyczących równań różniczkowych cząstkowych, inkluzji różniczkowych i przestrzeni Sobolewa (Małe Ciche, Poland, 2005, 2006, 2007, 2008, 2010).

- Udział w lokalnym komitecie organizacyjnym międzynarodowej konferencji Fifth German-Polish Conference on Optimization - Methods and Applications, (Dobczyce, Krakow, Poland, 9-13.11.2011).

- Udział w komitecie organizacyjnym międzynarodowej konferencji Calculus of Variations and PDEs, (Szczawnica, Poland, 9-12.07.2012).

Anna Ochal