Prof.dr hab. Arkadiusz Płoski
Politechnika Świętokrzyska
Katedra Matematyki

Kielce, 10 lutego 2104 r.

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego dra Jacka Dzioka

Dr Jacek Dziok zajmuje się geometryczną teorią funkcji analitycznych jednej zmiennej zespolonej. Teoria ta rozwijana od początków minionego wieku dotyczy pojęć i twierdzeń związanych z funkcjami holomorficznymi odwzorowującymi koło w płaszczyznę zespoloną. W roku 1984 Louis de Branges udowodnił słynną hipotezę Bieberbacha która przez kilkadziesiąt lat motywowała matematyków do badań w dziedzinie teorii funkcji. To wielkie osiągniecie nie zakończyło jednak studiowania różnych klas funkcji; dziedzina ta jest ciągle rozwijana i obfituje w nowe prace różnej jakości.

Rozprawa habilitacyjna dra Jacka Dzioka "Klasy funkcji analitycznych definiowane przez operatory" składa się z dziewięciu prac opublikowanych w latach 1997-2013 przy czym sześć prac pojawiło się w ciągu ostatnich pięciu lat. Większość tych prac została opublikowana w czasopismach mających w tytule zastosowania np. Applied Mathematics and Computation, które są wysoko punktowane przez MNiSW.

Kluczowe znaczenie w dorobku dra Jacka Dzioka ma praca[H2] napisana wspólnie z H.M.Srivastavą „Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function" opublikowana w Applied Mathematics and Computation. Wyniki uzyskane w tej pracy omówię dokładniej gdyż pozostałe prace wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej do niej nawiązują bądź dotyczą bliskiej problematyki.

Niech p, k, q, s będą liczbami całkowitymi dodatnimi.

Zakładamy, że $p < k$. Niech $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, będą ciągami liczb rzeczywistych dodatnich zaś A, B parą liczb rzeczywistych taką, że $0 \leq B \leq -1$ oraz $-B \leq A < B$. Oznaczmy ponadto $(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1),\dots,(\lambda+n-1)$ dla całkowitych $n > 0$ oraz $(\lambda)_o = 1$. Uogólniona funkcja hipergeometryczna dana jest wzorem

$$qF_s(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, z) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{(\alpha_1)_n, \dots, (\alpha_q)_n}{(\beta_1)_n, \dots, (\beta_s)_n} \frac{z^n}{n!} \text{ dla } |z| < 1.$$

Pozwala ona zdefiniować operator $H_p(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ działający na funkcje $f(z) = z^p$ + jednomiany stopnia $> p$, $|z| < 1$ według przepisu

$$H_p(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \left(z^p qF_s(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, z)\right) * f(z)$$

Przy czym * oznacza splot Hadamarda określony na szeregach potęgowych wzorem

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) * \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n b_n)\, z^n$$

Operator $H_p(\vec{\alpha},\overrightarrow{\beta})$zwany operatorem Dzioka-Srivastavy jest przedmiotem zainteresowania wielu autorów pracujących w geometrycznej teorii funkcji. Specjalizując odpowiednio parametry $p, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ otrzymujemy operatory definiowane i badane wcześniej przez Biernackiego, Livingstona, Liberę, Bernardiego, ...

Stosując operator $H_p(\vec{\alpha},\overrightarrow{\beta})$ Dziok i Srivastava zdefiniowali nową klasę funkcji $V_k^p(\vec{\alpha},\vec{\beta};A,B)$.
Są to funkcje postaci

$$f(z) = z^p + \text{jednomiany stopnia} \geq k.$$

Spełniające warunek

$$\frac{z\left[H_p(\vec{\alpha},\vec{\beta})f\right]'(z)}{pH_p(\vec{\alpha},\vec{\beta})f(z)} < \frac{1+Az}{1+Bz}$$

gdzie znak nierówności oznacza tutaj relację podporządkowania.

Zdefiniujmy symbol $\Gamma_n^p(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{1}{(n-p)!}\ \frac{(\alpha_1)_{n-p}\cdots(\alpha_q)_{n-p}}{(\beta_1)_{n-p}\cdots(\beta_s)_{n-p}}$ dla $n > p$.

Możemy teraz opisać główne wyniki pracy [H2].

<u>Twierdzenie 1</u> Funkcja f należy do klasy $V_k^p(\vec{\alpha},\vec{\beta},A,B)$wtedy i tylko wtedy gdy

$$f(z) = z^p - \textstyle\sum_{n=k}^{+\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1$$

gdzie $a_n \geq 0$ są liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \big((B+1)n - (A+1)p\big)\ \Gamma_n^p(\vec{\alpha},\vec{\beta})a_n \leq p(B-A)$$

Oznaczmy za autorami $C_n = \big((B+1)n - (A+1)p\big)\Gamma_n^p(\vec{\alpha},\vec{\beta}), \qquad M = p(B-A).$
Stosując Twierdzenie 1 autorzy dowodzą

<u>Twierdzenie 2</u>

Jeżeli f jest klasy $V_k^p(\vec{\alpha},\vec{\beta},A,B)$ a ciąg C_n nie maleje, to

$$|z|^p - \frac{M}{C_k}|z|^k \leq |f(z)| \leq |z|^p + \frac{M}{C_k}|z| \quad \text{dla } |z| < 1$$

Jeśli ciąg $\left(\frac{C_n}{n}\right)$ nie maleje, to

$$p|z|^{p-1} - \frac{kM}{C_k}|z|^{k-1} \leq | f'(z) | \leq p|z|^{p-1} + \frac{kM}{C_k}|z|^{k-1}$$

<u>Twierdzenie 3</u>

Oznaczmy $f_{k-1}(z) = z^p$ oraz $f_n(z) = z^p - \frac{M}{C_n} z^n$

dla $n \geq k$. Wtedy f jest klasy $V_k^p(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, A, B)$ dokładnie wtedy, gdy

$$f(z) = \sum_{n=k-1}^{+\infty} \gamma_n f_n(z), \quad |z| < 1$$

gdzie $\sum_{n=k-1}^{+\infty} \gamma_n = 1, \qquad \gamma_n \geq 0$ dla $n \geq k-1$

Z powyższego wynika, że klasa $V_k^p(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, A, B)$ jest wypukła o punktach ekstremalnych f_k.

<u>Twierdzenia 4 i 5</u>

Promienie gwiaździstości i wypukłości klasy $V_k^p(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, A, B)$ dane są odpowiednio wzorami

$$\inf_{n \geq k} \left(\frac{p}{n}\frac{C_n}{M}\right)^{\frac{1}{n-p}}, \qquad \inf_{n \geq k} \left(\frac{p^2}{n^2}\frac{C_n}{M}\right)^{\frac{1}{n-p}}$$

Podobne problemy jak w wyżej opisanej pracy [H2] rozważane są we wcześniejszej pracy [H3]. Autor wprowadza tam operator Ω_β^α który w oznaczeniach pracy [H2] jest identyczny z operatorem $H_p(\beta, 1;\, \alpha, \beta)$ i definiuje klasę $T(\alpha, \beta)$ złożoną z funkcji $f(z) = z^p +$ jednomiany stopnia $\geq k$ spełniających warunek

$$\frac{\Omega_\beta^\alpha f(z)}{z^p} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

a także podklasy $T_\ominus(\alpha, \beta)$ funkcji klasy $T(\alpha, \beta)$ których niezerowe współczynniki mają argument równy $\ominus$. Dla takich funkcji otrzymujemy rezultaty jak w pracy [H2]: oszacowania dla współczynników, twierdzenia o zniekształceniu, wyznaczenie punktów ekstremalnych, promienie wypukłości i gwiaździstości.

W pracy [H4] Autor bada funkcje postaci $f(z) = a_p z^p +, \ldots, |z| < 1$. Tutaj dopuszcza się parametr p ujemny i funkcje meromorficzne w pierścieniu $0 < |z| < 1$. Nakłada się warunki $z^{1-p} f(z)|_{z=0} = 0$ oraz $z^{-p} f(z)|_{z=z_o} = 0$ gdzie z_o jest ustalonym punktem koła $|z| < 1$. Dla takich funkcji Autor dowodzi twierdzeń podobnego typu jak w [H2] i [H3].

Używany w pracy [H4] termin „funkcja o dwóch punktach stałych" jest mylący gdyż praca nie ma żadnego związku z teorią punktów stałych mimo, że została opublikowana w czasopiśmie

„Fixed Point Theory and Applications". Autor dowodzi w [H4] twierdzeń podobnego typu jak w [H2] i [H3].

W pracy [H5] studiowane są klasy $V_k^p(\vec{\alpha},\vec{\beta},A,B,t)$ określone przez kombinacje wypukle operatorów $H_p(\vec{\alpha},\vec{\beta})$(stąd dodatkowy parametr t) i dla takich klas otrzymuje się uogólnienie wyników z [H2].

W pracy [H6] Autor definiuje kolejne klasy funkcji używając splotu Hadamarda i pojęcia podporządkowania; uzyskuje, między innymi, uogólnienia i wzmocnienia Twierdzenia 2 z pracy [H2].

W pracy [H8] Autor stosuje podporządkowanie różniczkowe Briota-Bouqueta do badania klas

$$\widetilde{V_2^1}\ (\vec{\alpha},\vec{\beta},A,B)$$

określonych tak jak klasy $V_2^1\ (\vec{\alpha},\vec{\beta},A,B)$ ale bez założenia o nieujemności współczynników szeregu.

Prace [H7],[H9] i [H1] nie są związane z podstawowa pracą [H2]. W pracy [H7] Autor bada klasy funkcji określone jako kombinacje liniowe par funkcji podporządkowanych ustalonej funkcji wypukłej. Praca [H9] poświęcona jest badaniu funkcjonału Feketa-Szegö $|a_3-\mu_2^2|,\ 0<\mu<1$ w klasach funkcji definiowanych przy pomocy splotu Hadamarda.

W pracy [H1] Autor wyznacza rząd gwiaździstości pewnej klasy funkcji i pokazuje, że hipoteza na ten temat sformułowana wcześniej przez innych matematyków była fałszywa.

Podsumowując : na rozprawę habilitacyjną dra Jacka Dzioka składa się dziewięć prac poświęconych różnym klasom funkcji holomorficznych odwzorowujących koło jednostkowe w płaszczyznę zespoloną. Wszystkie te prace mają techniczny charakter : same oznaczenia i założenia poprzedzające otrzymane rezultaty wymagają długiego wprowadzenia; streszczona w tej recenzji praca [H2] nie należy do najbardziej technicznych.

Autor operuje pojęciami które pojawiły się w teorii funkcji w latach 50-tych minionego wieku i wcześniej (podporządkowania, wypukłość, gwiaździstość...) i ich mniej lub bardziej naturalnymi uogólnieniami. Stosowane metody również można określić jako klasyczne, jedynie twierdzenie Kreina-Milmana o punktach ekstremalnych wykracza poza tradycyjne środki dowodowe.

Dorobek dra Jacka Dzioka posiada podobne cechy jak Jego rozprawa habilitacyjna. Jest bardzo duży ilościowo (41 prac) i dość monotonny tematycznie. W dorobku tym wyróżniłbym prace [D37], [D38] i [D39] gdzie pojawia się krzywa (konchoida de Sluze) związana z liczbami Fibonacciego. W wielu pracach Autor jako cel obiera sobie uogólnianie znanych wyników na coraz szersze klasy funkcji. Trudno określić tego rodzaju działalność jako szczególnie interesującą.

Współczesna analiza zespolona jest potężną dziedziną matematyki graniczącą z jednej strony z geometrią algebraiczną , z drugiej strony z teorią operatorów różniczkowych (w ujęciu Hörmandera). Geometryczna teoria funkcji jednej zmiennej nie należy z pewnością do głównych nurtów badań w tej dziedzinie. Niemniej jednak posiada ona wielu wyznawców. Wspomnę tutaj, że H.M.Srivastava (współautor pracy [H2]) ma 4481 cytowań przez 1742 autorów.

Prace dra Jacka Dzioka są cenione przez matematyków uprawiających geometryczną teorię funkcji. Operatorowi $H_p(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ z pracy [H2] poświęcono już kilkanaście publikacji. Habilitant chętnie współpracuje z matematykami z różnych ośrodków krajowych i zagranicznych. Swoje rezultaty przedstawia na licznych konferencjach.
Jest autorem skryptu „Wstęp do geometrycznej teorii funkcji zespolonych". Od lat prowadzi seminaria magisterskie – wypromował 70 magistrów.
W 2005 roku współorganizował międzynarodową konferencję.

Biorąc pod uwagę rozprawę habilitacyjną dra Jacka Dzioka oraz cały Jego dorobek naukowy i dydaktyczny popieram nadanie Mu stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych w zakresie matematyki.

Arkadiusz Płocki