Prof. dr hab. Ivan Marchenko
Instytut Matematyki
Uniwersytet Szczeciński

Szczecin, 8 lutego 2014 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym doktora Jacka Dzioka

Jacek Dziok uzyskał tytuł magistra matematyki na Wydziale Matematyki i Fizyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Rzeszowie w roku 1986 oraz stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego w roku 1995. Promotorem w przewodzie doktorskim był prof. dr hab. Jan Stankiewicz.

W ramach rozprawy habilitacyjnej dr Jacek Dziok przedstawił monotematyczny cykl dziewięciu publikacji zatytułowany "Klasy funkcji analitycznych definiowane przez operatory". Jako pozostałe osiągnięcia badawcze habilitant przedstawił 41 publikacji w czasopismach naukowych. Według przedstawionego wykazu całkowity dorobek habilitanta stanowi 56 prac naukowych, 52 już opublikowane w tym 30 w czasopismach mających określony Impact Factor, oraz 4 przyjęte do druku. Indeks Hirscha opublikowanych prac wynosi 5.

Rozprawa habilitacyjna

W skład monotematycznego cyklu stanowiącego rozprawę habilitacyjną wchodzą następujące prace:

[H1] J. Dziok, *The order of starlikeness of the p-valent α-convex functions and Nunokawa's conjecture*, Demonstratio Math. 30(1997), 655-660.

[H2] J. Dziok, H.M. Srivastava, *Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function*, Appl. Math. Comput. 103(1999), 1-13.

[H3] J. Dziok, *Classes of functions defined by certain differential-integral operators*, J. Comput. Appl. Math. 105(1999), 245-255.

[H4] J. Dziok, *Classes of analytic and meromorphic functions with two fixed points*, Fixed Points Theory Appl. (2013), 2013:86.

[H5] J. Dziok, *On the convex combination of the Dziok-Srivastava operator*, Appl. Math. Comput. 188(2007), 1214-1220.

[H6] J. Dziok, *On the extreme points of subordination families*, Ann. Pol. Math. 99(2010), 23-37.

[H7] J. Dziok, *Classes of functions associated with bounded Mocanu variation*, J. Inequal. Appl. (2013), 2013:349.

[H8] J. Dziok, *On some applications of the Briot-Bouquet differential subordination*, J. Math. Anal. Appl. 328(2007), 295-301.

[H9] J. Dziok, *A general solution of the Fekete-Szegö problem*, Bound. Value Prob. (2013), 2013:98.

Powyższy cykl prac dotyczy geometrycznej teorii funkcji analitycznych. Początek tej teorii dało klasyczne twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu konforemnym. Znaczący wkład w rozwój tematyki wnieśli, między innymi, Ahlfors, Alexander, de Brange, Bieberbach, Köebe, Littlewood, Löwner, Nevanlinna, Study.

Niech A będzie klasą funkcji analitycznych w kole $U = \{z : |z| < 1\}$. Każdą funkcję $f \in A$ można przedstawić w postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in U.$$

Klasę funkcji $f \in A$ jednolistnych, z klasycznym unormowaniem $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ oznaczamy przez S. Funkcję $f \in A$ nazywamy wypukłą w U jeżeli $f(U)$ jest zbiorem wypukłym. Mówimy,

Ivan Marchenko

że zbiór $D \subset \mathbb{C}$ jest gwiaździsty względem punktu $w_0 \in D$ jeżeli wraz z każdym punktem $w \in D$ również odcinek $\overline{w_0 w}$ zawiera się w D. Funkcję $f \in A$ nazywamy gwiaździstą w U jeżeli $f(U)$ jest zbiorem gwiaździstym względem punktu $w_0 = 0$.

W 1913 roku Study podał następujące kryterium wypukłości. *Funkcja $f \in A$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad (z \in U,\ f'(z) \neq 0).$$

Zbiór funkcji wypukłych $f \in S$ oznaczamy przez S^c. W 1921 Nevanlinna otrzymał kryterium gwiaździstości funkcji. *Funkcja $f \in S$ jest gwiaździsta wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (z \in U,\ f(z) \neq 0).$$

Zbiór funkcji gwiaździstych oznaczamy S^*.

Dla funkcji wypukłych i jednolistnych znane są następujące oszacowania.

TWIERDZENIE (Hayman,W.K., *Multivalent functions*, Cambridge Uniwersity Press 1958) *Jeżeli $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest jednolistną funkcją wypukłą, to wówczas dla $|z| = r$, $0 < r < 1$ mamy*

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r},$$
$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2},$$
$$\frac{1}{r(1+r)} \leq \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{r(1-r)}.$$

Wszystkie te nierówności są dokładne, a funkcją ekstremalną jest $f(z) = \frac{z}{1-z}$. Dla funkcji gwiaździstych łatwo uzyskać poniższe oszacowanie współczynników.

TWIERDZENIE (Hayman,W.K., *Multivalent functions*, Cambridge University Press 1958) *Niech $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ będzie jednolistną funkcją gwiaździstą. Wówczas*

$$|a_n| \leq n \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Oszacowanie to jest dokładne. Funkcją ekstremalną jest tu funkcja Köebego $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. W 1916 roku Bieberbach postawił hipotezę, że powyższe oszacowanie współczynników jest słuszne również w przypadku ogólnym funkcji analitycznych jednolistnych w kole jednostkowym. W przypadkach szczególnych słuszność tej hipotezy była badana przez wielu matematyków: $|a_2| \leq 2$ (Bieberbach, 1916), $|a_3| \leq 3$ (Löwner, 1923), $|a_4| \leq 4$ (Garabedian, Schiffer, 1955), $|a_6| \leq 6$ (Pederson, Ozawa, 1968), $|a_5| \leq 5$ (Pederson. Schiffer, 1972). Wreszcie, w 1984 roku de Brange udowodnił hipotezę Bieberbacha w przypadku ogólnym.

Mówimy, że funkcja $f \in A$ jest $p-$listna, gdy dla każdej liczby zespolonej w równanie $f(z) = w$ ma w U co najwyżej p pierwiastków (licząc z krotnościami) i istnieje liczba $w \in \mathbb{C}$ taka, że pierwiastków jest dokładnie p. Przez A_l^p ($l, p \in \mathbb{N}$, $p < l$) będziemy oznaczali klasę funkcji $f \in A$ postaci

$$f(z) = z^p + \sum_{n=l}^{\infty} a_n z^n \ (z \in U).$$

Niech $A_p = A_{p+1}^p$, $A_0 := \{f \in A:\ f(0) = 1\}$. Niech $J_1(f)(z) = zf'(z)$ $(z \in U)$. Można zapisać następujące kryterium:

$$f \in S^c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{z[J_1(f)]'(z)}{J_1(f)(z)}\right) > 0.$$

Ivan Marchenko

Mówimy, że funkcja $f \in A$ jest podporządkowana (obszarowo) funkcji $g \in A$, co zapisujemy $f \prec g$, gdy istnieje funkcja $w \in A$ taka, że $|w(z)| \leq |z|$ dla $z \in U$ oraz $f(z) = g(w(z))$. Wykorzystując pojęcie podporządkowania, powyższe kryterium możemy sformułować następująco:

$$f \in S^c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z[J(f)]'(z)}{J(f)(z)} \prec h(z),$$

gdzie $J = J_1$, $h(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

W przypadku funkcji g jednolistnej w U kryterium podporządkowania jest następujące:

$$f \prec g \quad \Longleftrightarrow \quad f(0) = g(0),\ f(U) \subset g(U).$$

W 1969 roku Mocanu wprowadził pojęcie funkcji $\alpha-$ wypukłych. Funkcję $f \in A$ nazywamy $\alpha-$wypukłą jeżeli

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\right] > 0 \qquad (z \in U).$$

Niech $M(\alpha)$ będzie klasą funkcji $\alpha-$ wypukłych. Łatwo zauważyć, że $M(0) = S^*$, $M(1) = S^c$. Autor rozprawy uogólnił pojęcie funkcji $\alpha-$ wypukłych i wprowadził pojęcie $p-$listnych $\alpha-$ wypukłych funkcji rzędu β, których zbiór jest oznaczany $M_p(\alpha, \beta)$. Funkcja $p-$listna f należy do klasy $M_p(\alpha, \beta)$ jeżeli

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\right] > \beta \qquad (z \in U).$$

Jasne jest, że $M(\alpha) = M_1(\alpha, 0)$. Niech $S_p^*(\beta) := M_p(0, \beta)$ będzie klasą $p-$listnych funkcji $\alpha-$gwiaździstych rzędu β. Łatwo zauważyć, że jeśli $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 < 1$, to wówczas

$$S_p^*(\beta_2) \subset S_p^*(\beta_1) \subset S_p^*(0) =: S_p^* \qquad (S_1^* = S^c).$$

Stąd, dla ustalonej klasy $G \subset S_p^*$ powstaje problem wyznaczenia najmniejszej liczby β, dla której $G \subset S_p^*(\beta)$. Tę liczbę nazwano rzędem gwiaździstym klasy G. W pracy [H1] autor otrzymał rząd gwiaździsty klasy $M_p(\alpha)$.

TWIERDZENIE 1
Rząd gwiaździsty klasy $M_p(\alpha)$ wynosi

$$\beta(p, \alpha) = \begin{cases} 0 & \textit{dla} \quad -2p \leq \alpha < p, \\ \frac{\alpha\Gamma(1/2+p/\alpha)}{\sqrt{\pi}\Gamma(p/\alpha)} & \textit{dla} \quad \alpha \geq p. \end{cases}$$

Z twierdzenia 1, jako wniosek, autor wywodzi, że hipoteza Nunokawy z 1989 roku mówiąca, że rząd gwiaździsty klasy $p-$listnych funkcji wypukłych $S_p^c := M_p(1)$ jest równy $\beta(p) = \frac{\Gamma(1/2+p)}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)}$, nie jest prawdziwa dla $p \geq 2$.

W 1999 roku autor wspólnie ze Srivastavą zdefiniowali ciekawy operator. Niech $q, s \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dla ustalonych wektorów $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_q) \in \mathbb{C}^q$, $\overline{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_s) \in (\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\})^s$ niech

$${}_qF_s(\overline{\alpha}, \overline{\beta}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n ... (\alpha_q)_n}{(\beta_1)_n ... (\beta_s)_n} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in U),$$

gdzie

$$(\lambda)_n := \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad n = 0, \\ \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1) & \text{gdy} \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ivan Marchenko

Niech $f, g \in A$ mają postać $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ $(z \in U)$. Splotem funkcji f, g nazywamy funkcję

$$(f * g)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \qquad (z \in U).$$

Wykorzystując uogólnioną funkcję hipergeometryczną i pojęcie splotu funkcji autor wraz ze Srivastavą wprowadzili operator liniowy

$$H_p(\alpha_1, ..., \alpha_q; \beta_1, ..., \beta_s) =: H_p(\overline{\alpha}; \overline{\beta}) : A_p \to A_p$$

zdefiniowany jako

$$H_p(\overline{\alpha}; \overline{\beta}) = (z^p_q F_s(\overline{\alpha}, \overline{\beta}; z)) * f(z) \qquad (z \in U).$$

Powyższy operator jest powiązany z operatorami wprowadzonymi wcześniej przez Biernackiego, Liberę, Bernardiego, Ruscheweyha, Owę, Carlsona-Shaffera. W 1960 roku Biernacki przedstawił operator liniowy:

$$L_0 f(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt \qquad (f \in A_1).$$

W 1965 roku Libera przedstawił operator:

$$L_1 f(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t) dt \qquad (f \in A_1).$$

W 1969 roku Bernardi przedstawił operator:

$$L_\nu f(z) = \frac{\nu + 1}{z^\nu} \int_0^z t^{\nu-1} f(t) dt \qquad (f \in A_1,\ \nu > -1).$$

W 1975 roku Ruscheweyh przedstawił operator:

$$D^n f(z) = \frac{z(z^{n-1} f(z))^{(n)}}{n!} \qquad (f \in A_1,\ n \in \mathbb{N}_0).$$

W 1978 roku Owa przedstawił operator:

$$\Omega^\lambda = \Gamma(2 - \lambda) z^\lambda D_z^\lambda f(z) \qquad (f \in A_1,\ \lambda \neq 2, 3, ...),$$

gdzie

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{1-\lambda}} dt \qquad (\lambda < 0),$$

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{\lambda}} dt \qquad (0 \leq \lambda < 1),$$

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} D_z^\lambda f(z) \qquad (0 \leq \lambda < 1,\ n \in \mathbb{N}_0).$$

W 1984 roku Carlson-Shaffer przedstawili operator:

$$L(a, c) f(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{c-2} (1-t)^{c-a-1} f(tz) dt \qquad (f \in A_1,\ c > a > 0),$$

gdzie Γ oznacza funkcję Eulera. Proste obliczenia dają

$$L_\nu = H_1(1 + \nu, 1; \nu + 2),$$

Ivan Marchenko

$$D^n = H_1(1+n, 1; 1),$$
$$\Omega^\lambda = H_1(2, 1; 2-\lambda),$$
$$L(a, c) = H_1(a, 1; c).$$

Chciałbym tu zauważyć, że operatory Biernackiego, Libery, Bernardiego, Ruscheweyha, Owy oraz Carlsona-Shaffera zostały wprowadzone w celu otrzymania rezultatów geometrycznej teorii funkcji. Sformułujemy jeden z tych rezultatów.

TWIERDZENIE (Libera)
Niech $f \in S^c$ lub S^*. Wówczas $L_1 f(z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt$ należy do klasy S^c lub, odpowiednio, S^*.

Bardzo istotne byłoby gdyby autor rozprawy otrzymał rezultat ogólny dla operatora $H_p(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, z którego można by wywnioskować przynajmniej jeden z rezultatów Libery, Bernardiego, Ruscheweyha, Owy czy Carlsona-Shaffera. Niestety, takiego rezultatu nie udało się uzyskać. Za pomocą operatora $H_p(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ wprowadzono natomiast klasy funkcji analitycznych, dla których otrzymano oszacowania niektórych funkcjonałów: $|a_n|$, $|f(z)|$, $|f'(z)|$. Niech $p, k, q, s \in \mathbb{N}$ i $\alpha_1, ..., \alpha_q; \beta_1, ..., \beta_s$ będą liczbami dodatnimi, $0 \le B < 1$, $-B \le A \le B$. Funkcja f należy do klasy $V_k^p(q, s; A, B)$ jeżeli

$$f(z) = z^p - \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \qquad (a_n \ge 0, \ n = k, k+1, ...),$$

oraz jeżeli spełnia warunek

$$\alpha_1 \frac{H_p(\alpha_1 + 1, \alpha_2, ..., \alpha_q; \beta_1, ..., \beta_s) f(z)}{H_p(\alpha_1, ..., \alpha_q; \beta_1, ..., \beta_s) f(z)} + p - \alpha_1 \prec \frac{1+Az}{1+Bz}.$$

Niech

$$\Gamma_n = \frac{(\alpha_1)_{n-p} \cdots (\alpha_q)_{n-p}}{(\beta_1)_{n-p} \cdots (\beta_s)_{n-p}(n-p)!},$$
$$C_n = \{(B+1)n - (A+1)p\}\Gamma_n.$$

W pracy [H2] udowodniono następujący rezultat.

TWIERDZENIE 2
Niech $f \in V_k^p(q, s; A, B)$. Jeżeli ciąg $\{C_n\}$ jest niemalejący, to

$$r^p - \frac{p(B-A)}{C_k} r^k \le |f(z)| \le r^p + \frac{p(B-A)}{C_k} r^k \qquad (|z| = r < 1).$$

Jeżeli ciąg $\{\frac{C_n}{n}\}$ jest niemalejący, to

$$pr^{p-1} - \frac{kp(B-A)}{C_k} r^{k-1} \le |f'(z)| \le pr^{p-1} + \frac{kp(B-A)}{C_k} r^{k-1} \qquad (|z| = r < 1).$$

Oszacowania w twierdzeniu są dokładne. W definicji klasy $V_k^p(q, s; A, B)$ oraz w twierdzeniu 2 występują bardzo liczne warunki. Dlatego należałoby zbadać jak duża jest klasa funkcji spełniających te warunki.

W pracy [H3] wprowadzono klasę $T_\vartheta(\alpha, \beta)$ i otrzymano analog twierdzenia 2 dla tej klasy. Niech $p, k \in \mathbb{N}$, $A, B, \alpha, \beta, \vartheta \in \mathbb{R}$, $-\beta < p < k$, $\alpha + \beta > -p$, $0 \le \beta \le 1$, $-B \le A < B$ ($B \ne 1$ lub $\cos\vartheta < 0$). Niech $f \in A(p, k)$, to znaczy $f(z) = z^p + \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ i niech $\log(z - \xi)$ będzie rzeczywisty. Jeżeli $z - \xi > 0$, $z, \xi \in U$, dla $\alpha > 0$,

$$Q_\beta^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (1 - \xi/z)^{\alpha-1} \xi^{\beta-1} f(\xi) d\xi.$$

Ivan Marchenko

Funkcja f należy do klasy $T(\alpha, \beta)$ jeżeli $f \in A(p, k)$ i

$$\frac{\Omega_{\beta}^{\alpha} f(z)}{z^p} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}.$$

Funkcja f należy do klasy $T_{\vartheta}(\alpha, \beta)$ jeżeli $f \in T(\alpha, \beta)$ i $\arg a_n = \vartheta$. Wówczas $f(z) = z^p + e^{i\vartheta} \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| z^n$. W pracy [H3] udowodniono następujące twierdzenia.

TWIERDZENIE 3
Niech f należy do klasy $T_{\vartheta}(\alpha, \beta)$. Wówczas

$$\sum_{n=k}^{\infty} \Gamma_n^{-1} |a_n| \leq \delta(\vartheta, A, B),$$

gdzie $\delta(\vartheta, A, B) = \frac{B-A}{\sqrt{1-B^2 \sin^2 \vartheta - B \cos \vartheta}}$ *i* $\Gamma_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)\Gamma(p+\beta)}{\Gamma(n+\beta)\Gamma(p+\alpha+\beta)}$.

TWIERDZENIE 4
Niech f należy do klasy $T_{\vartheta}(\alpha, \beta)$, $|z| = r < 1$. Wówczas dla $\alpha \leq 0$

$$r^p - \delta(\vartheta, A, B)\Gamma_k r^k \leq |f(z)| \leq r^p + \delta(\vartheta, A, B)\Gamma_k r^k$$

i dla $\alpha \leq -1$

$$pr^{p-1} - k\delta(\vartheta, A, B)\Gamma_k r^{k-1} \leq |f'(z)| \leq pr^{p-1} + k\delta(\vartheta, A, B)\Gamma_k r^{k-1},$$

gdzie $\delta(\vartheta, A, B)$, Γ_n są określone w twierdzeniu 3.

Tu ponownie trzeba zauważyć, że zarówno w definicji klasy $T_{\vartheta}(\alpha, \beta)$, jak i w obu twierdzeniach występuje bardzo dużo parametrów. Należałoby zbadać jak duża jest klasa funkcji spełniających te warunki.

W pracy [H4] wprowadzono klasy funkcji analitycznych $T(p, k)$, $T^{\eta}(p, k)$. Są to klasy funkcji o zmiennych argumentach współczynników. Funkcja $f \in T^{\eta}(p, k)$ jeżeli $f(z) = a_p z^p - \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| e^{-(n+p)\eta} z^n \quad (z \in U)$, $\quad T(p, k) := \bigcup_{\eta \in \mathbb{R}} T^{\eta}(p, k)$. Funkcja f należy do klasy $M(p, k)$ jeżeli $f(z) = z^p + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n z^n$, $\lim_{z \to 0}(z^{1-p} f(z)) = 0$ i $\lim_{z \to 0}(z^{-p} f(z)) = 0$. Funkcja f należy do klasy $M_{\rho}(p, k)$ jeżeli $\lim_{z \to 0}(z^{1-p} f(z)) = 0$ i $z^{-p} f(z) \; |_{z=\rho} = 1$, $\rho = |\rho| e^{i\eta}$, $\rho \in U$. Stąd funkcja f należy do klasy $T^{\eta}(p, k)$, $\eta \in \mathbb{R}$, jeżeli $f \in M(p, k)$ i $f(z) = a_p z^p - \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| e^{-(n+p)\eta i} z^n$ $(z \in U)$.

Niech A, B, δ spełniają warunki $\delta \geq 0$, $0 \leq B \leq 1$, $-1 \leq A < B$ i niech $\varphi, \psi \in M(p, k)$. Funkcja f należy do klasy $W(p, k; \varphi, \psi; A, B, \delta)$ jeżeli $f \in M(p, k)$, $(\varphi * f)(z) \neq 0$ $(z \in U)$ i

$$\frac{(\psi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - \delta \left| \frac{(\psi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right| \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}.$$

Ponadto,

$$W_{\rho}(p, k; \varphi, \psi; A, B, \delta) = M_{\rho}(p, k) \cap W(p, k; \varphi, \psi; A, B, \delta).$$

Niech

$$TW_{\rho}^{\eta} = T^{\eta}(p, k) \cap W_{\rho}(p, k; \varphi, \psi; A, B, \delta),$$

$$\varphi(z) = z^p + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n z^n, \qquad \psi(z) = z^p + \sum_{n=k}^{\infty} \beta_n z^n, \qquad 0 \leq \alpha_n < \beta_n \; (n = k, k+1, \ldots),$$

$$d_n := (\delta + 1)(1 + B)\beta_n - (\delta(B + 1) + A + 1)\alpha_n \qquad (n = k, k+1, \ldots).$$

Ivan Marchenko

W pracy [H4] udowodniono nastepujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 5
Niech $f \in T^{\eta}(p,k)$. Funkcja f należy do klasy TW^{η}_{ρ} wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in M_{\rho}(p,k)$ i

$$\sum_{n=k}^{\infty}(d_n - (B-A)|\rho|^{n-p})|a_n| \leq B - A.$$

Tutaj też chciałbym zwrócić uwagę na kwestię dużej liczby parametrów występujących w określeniu klasy TW^{η}_{ρ} i w twierdzeniu 5. Klasa funkcji spełniających te warunki powinna być zbadana.

Pozostały dorobek

W pracach [D1]-[D41] za pomocą operatorów wprowadzone zostały inne klasy $p-$listnych funcji analitycznych w kole jednostkowym. Dla tych klas otrzymano oszacowania modułu współczynników, modułu funkcji, modułów pochodnej i pochodnej logarytmicznej.

Podsumowanie

Za pomocą operatorów autor rozprawy wprowadził kilka klas funkcji $p-$listnych analitycznych w kole i rozważył dla tych klas pytania związane z oszacowaniem funkcjonałów: modułu współczynników, modułu funkcji i modułu pochodnej. Uważam, że rozprawa habilitacyjna doktora Jacka Dzioka zawiera nowe rezultaty i może być dopuszczona do kolokwium habilitacyjnego.

Ivan Marchenko