Kraków, 19 stycznia 2014.

Prof. dr hab. Marek Jarnicki
Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
Tel. (12)–664-6634, fax (12)–664-6674
e-mail: Marek.Jarnicki@im.uj.edu.pl

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr. Jacka Dzioka

Pan dr. Jacek Dziok doktoryzował się w roku 1995 na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego na podstawie rozprawy *Zagadnienie gwiaździstości i klasy funkcji z ustalonym argumentem współczynników*, napisanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Jana Stankiewicza.

Ocena rozprawy habilitacyjnej.

Na rozprawę habilitacyjną „Klasy funkcji analitycznych definiowane przez operatory" składa się następujący cykl dziewięciu prac:

[H1] J. Dziok, *The order of starlikeness of the p-valent α-convex functions and Nunokawa's conjecture*, Demonstratio Math. 30 (1997), 655–660.
[H2] J. Dziok, H.M. Srivastava, *Classes of analytic functions assiociated with the generalized hypergeometric function*, Appl. Math. Comp. 103 (1999), 1–13.
[H3] J. Dziok, *Classess of functions defined by certain differential-integral operators*, J. Comp. Appl. Math. 105 (1999), 245–255.
[H4] J. Dziok, *Classes of analytic and meromorphic functions with two fixed points*, Fixed Points Theory Appl. (2013), 2013:86.
[H5] J. Dziok, *On the convex combination of the Dziok-Sreivastava operator*, Appl. Math. Comp. 188 (2007), 1214–1220.
[H6] J. Dziok, *On the extreme points of subordination families*, Ann. Polon. Math. 99 (2010). 23–37.
[H7] J. Dziok, *Classes of functions associated with bounded Mocanu variation*, J. Iequal. Appl. (2013), 2013:349.
[H8] J. Dziok, *On some applications of the Briot-Bouquet differential subordination*, J. Math. Anal. Apll. 328 (2007), 295–301.
[H9] J. Dziok, *A general solution of the Fekete-Szegö problem*, Bound. Value Prob. (2013), 2013:98

W dokumentacji znajdują się stosowne oświadczenia pokazujące, że udział dr. Dzioka w pracy [H2] był nie mniejszy niż 50%.

W powyższych pracach habilitant bada problemy ekstremalne dla pewnych klas funkcji holomorficznych w kole jednostkowym $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Istotną rolę w badaniach dr. Dzioka pełni własność podporządkowania $\prec$ definiowana następująco: dla $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{U})$ piszemy $f \prec g$, jeżeli istnieje funkcja $w \in \mathcal{O}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ taka, że $w(0) = 0$ oraz $f \equiv g \circ w$.

Klasami rozważanymi przez dr. Dzioka są miedzy innymi:
$\mathcal{A}^p_\ell := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{U}) : f(z) = z^p + \sum_{n=\ell}^\infty a_n z^n\}, , p < \ell, \mathcal{A}_p := \mathcal{A}^p_{p+1}, \mathcal{A}_0 := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{U}) : f(0) = 1\}$;
$\mathcal{M}_p(\alpha,\beta) := \left\{f \in \mathcal{A}_p : \mathrm{Re}\left((1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) > \beta,\ z \in \mathbb{U}\right\}$ = klasa p-listnych funkcji α-wypukłych rzędu β, $\mathcal{M}_p(\alpha) := \mathcal{M}_p(\alpha,0)$, $\mathcal{S}^c_p(\beta) := \mathcal{M}_p(1,\beta)$ = klasa p-listnych funkcji wypukłych rzędu β; $\mathcal{S}^*_p(\beta) := \mathcal{M}_p(0,\beta)$ = klasa p-listnych funkcji gwiaździstych rzędu β;

Poniżej omówię krótko wybrane wyniki znajdujące się w pracach [H1] – [H9].

[H1] $\mathcal{M}_p(\alpha) \subset \mathcal{S}^*_p(\beta(p,\alpha))$, gdzie

$$\beta(p,\alpha) := 0 \text{ dla } -2p \le \alpha < p \text{ oraz } \beta(p,\alpha) := \frac{\alpha\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{p}{\alpha})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{p}{\alpha})} \text{ dla } \alpha \ge p.$$

Wynik ten jest dokładny.

Biorąc $\alpha = 1$, dostajemy kontrprzykład dowodzący, iż dowód hipotezy Nunokawy z 1988 (podany przez Nunokawę w roku 1989) był błędny, a sama hipoteza jest nieprawdziwa.

[H2] Praca ta, to moim zdaniem najważniejsza praca wchodząca w skład rozprawy. Dla $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_q) \in \mathbb{C}^q$ oraz $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_s) \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-)^s$, autorzy definiują operator liniowy $H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) : \mathcal{A}_p \longrightarrow \mathcal{A}_p$, $H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})f(z) := ((z^p{}_qF_s(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};z)) * f(z)$, gdzie

${}_qF_s(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_q)_n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_s)_n}\frac{z^n}{n!}$, $(\lambda)_n := 1$ dla $n = 0$ oraz $(\lambda)_n := \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)$ dla $n \in \mathbb{N}$,

$(\sum_{n=0}^\infty a_n z^n) * (\sum_{n=0}^\infty b_n z^n) = \sum_{n=0}^\infty a_n b_n z^n$ jest iloczynem Hadamarda. Operator ten (po stosownym dobraniu parametrów) stanowi jednoczesne uogólnienie bardzo wielu operatorów rozważanych wcześniej przez innych matematyków. Praca [H2] została szeroko zauważona, o czym może m.in. świadczyć liczba cytowań. W pracy [H2] autorzy podali również oszacowania dla współczynników, twierdzenia o zniekształcaniu, punkty ekstremalne, promienie gwiaździstości i wypukłości dla funkcji klasy $V^p_\ell(q,s,;A,B) := \mathcal{V}^p_\ell(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};A,B) \cap \{f \in \mathcal{A}^p_\ell : a_n \le 0,\ n \ge \ell\}$, gdzie

$\mathcal{V}^p_\ell(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};A,B) := \left\{f \in \mathcal{A}^p_\ell : \frac{z(H_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})f)'(z)}{pH_p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz},\ z \in \mathbb{U}\right\}$, $-1 \le A < B \le 1$, $B \ge 0$. Wyniki te stanowią rozwinięcie badań zapoczątkowanych w [H3].

[H4] Badania problemów ekstremalnych z [H3] i [H2] były kontynuowane w [H4] dla klasy funkcji z dwoma punktami stałymi o stałym argumencie współczynników $\mathcal{T}^\eta(p,k) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{U}) : f(z) = a_p z^p - \sum_{n=k}^\infty |a_n| e^{-(n+p)\eta} z^n,\ z^{1-p}f(z)|_{z=0} = 0,\ z^{-p}f(z)|_{z=\varrho} = 1\}$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\varrho \in \mathbb{U}$. Wyniki uzyskane w [H2], [H3] i [H4] stanowią wspólne uogólnienie licznych wcześniejszych wyników pochodzących od wielu autorów.

[H5], [H6] Prace te są poświęcone zastosowaniom metody punktów ekstremalnych do oszacowanie pewnych funkcjonałów wypukłych, takich jak: $f \longmapsto |a_n|$, $f \longmapsto |f^{(m)}(z)|$, $f \longmapsto (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{n)}(re^{i\theta}|^\lambda d\theta)^{1/\lambda}$.

[H7] Praca ta jest poświęcona badaniu klasy $\mathcal{K}_\mu(h) := \{\mu q_1 + (1-\mu)q_2 : q_1, q_2 \prec h\}$, $\mu \ge 1$, $h \in \mathcal{S}^c_0$. Wykazano w niej m.in. następujące twierdzenia:

— Dla $k \ge 2$ klasa $\mathcal{K}_{k/4+1/2}(h)$ pokrywa się z rodziną tych funkcji $q \in \mathcal{A}_0$, dla których istnieje funkcja ograniczona $m : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, o ograniczonej wariacji, taka że

$\int_0^{2\pi} dm(t) = 2$, $\int_0^{2\pi} |dm(t)| \le k$ oraz $q(z) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h(ze^{-it})dm(t)$, $z \in \mathbb{U}$.

— Niech $\sigma_h : h(\mathbb{U}) \longrightarrow \{\mathrm{Re}\, w > 0\}$ będzie odwzorowaniem biholomorficznym unormowanym warunkiem $\sigma_h(1) = 1$. Niech

$\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \{q \in \mathcal{A}_0 : q(\mathbb{U}) \subset$ obszar istnienia funkcji $\sigma_h\}$ (funkcja $\sigma_h \circ q$ jest dobrze określona dla $q \in \widetilde{\mathcal{A}}_0$). Wtedy

$$\left\{q \in \widetilde{\mathcal{A}}_0 : \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}(\sigma_h \circ q)(re^{it})dt \leq k\pi,\ 0 < r < 1\right\} = \left\{q \in \widetilde{\mathcal{A}}_0 : \sigma_h \circ q \in \mathcal{K}_{k/4+1/2}(\tfrac{1+z}{1-z})\right\}.$$

[H8] Praca jest poświęcona badaniu warunków charakteryzujących klasę $\mathcal{V}_2^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; A, B)$. Habilitant rozważa w niej następujący problem. Niech $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ i $h \in \mathcal{S}_0^c$ będą takie, że $\operatorname{Re}(\beta h + \gamma) \geq 0$ i $q + \frac{zq'}{\beta q+\gamma} \in \mathcal{K}_\mu(h)$. Pytamy, czy wtedy $q \in \mathcal{K}_\mu(h)$. Powyższa implikacja dla $\beta = 0$ jest prawdziwa, zaś w ogólnym przypadku pozostaje problemem otwartym.

[H9] W pracy podano m.in. oszacowania uogólnionego funkcjonału Fekete–Szegö $f \longmapsto a_3 - \mu a_2^2$ ($\mu \in \mathbb{C}$) dla kilku klas funkcji.

Idea badania różnych podklas klasy $\mathcal{A}$ powstawała jak wiadomo w czasach, gdy słynna Hipoteza Bieberbacha (HB) pozostawała przez prawie 70 lat nieudowodniona. Wtedy też badanie różnych podklas klasy $\mathcal{A}$ było uzasadnione usilnym poszukiwaniem dowodu HB (ewentualnie kontrprzykładu). Odnoszę wrażenie, że po udowodnieniu HB badanie najrozmaitszych podklas klasy $\mathcal{A}$ zaczęło żyć własnym życiem. Definiuje się coraz to nowe i coraz to bardziej skomplikowane klasy funkcji, dla których podawane są różnego typu charakteryzacje, wzajemne powiązania oraz rozwiązywane są najrozmaitsze problemy ekstremalne. Stawiane są (a następnie rozwiązywane) kolejne hipotezy dotyczące tych klas. W zakresie właśnie takiej tematyki pozostają badania habilitanta. Z drugiej strony, badaniom dr. Dzioka nie można odmówić tego, iż poszerzają i systematyzują naszą wiedzę w zakresie pewnych aspektów geometrycznej teorii funkcji holomorficznych jednej zmiennej. Stanowi to istotny, ważny wkład w budowę tej teorii.

Ocena pozostałego dorobku naukowego.

Pozostały, przedstawiony w „Autoreferacie", dorobek naukowy dr. J. Dzioka składa się z 41 prac. Nie jest to cały dorobek habilitanta — Zentralblatt für Mathematik odnotował 61 prac, zaś Mathematical Review 74 prace. Jest to dorobek imponujący. Prace dotyczą zasadniczo tej samej tematyki, której dotyczyły prace wchodzące w skład rozprawy. Około 1/3 prac to prace samodzielne. Pozostałe prace mają (łącznie) 12. współautorów. Najczęściej dr Dziok współpracował z R.K. Rainą i J. Sokołem (po 8 prac). Prace są niejednokrotnie ściśle ze sobą powiązane. Tak szeroka współpraca krajowa i międzynarodowa budzi moje uznanie. Część prac została opublikowana w czasopismach o charakterze lokalnym. Pewne moje zdziwienie budzi fakt, iż spora część prac została opublikowana w czasopismach zorientowanych na zastosowania i metody komputerowe. Uwaga ta dotyczy również części prac wchodzących w skład rozprawy. Rozumiem jednak, że taka jest specyfika dziedziny (inny autorzy też tak robią) oraz, iż są to czasopisma bardzo wysoko punktowane (wg Ministerstwa), co oczywiście zachęca do publikowania właśnie w nich. Problem w tym, że prace dr. Dzioka mają niewiele wspólnego z zastosowaniami, a fakt ich publikowania w czasopismach zorientowanych na zastosowania w sposób naturalny ogranicza grono potencjalnych czytelników zainteresowanych teorią funkcji holomorficznych jednej zmiennej. Być może właśnie dlatego jedynie ok. 1/3 (Zentralblatt für Mathematik) i ok. 1/2 (Mathematical Review) prac dr. Dzioka była „istotnie" recenzowana (dla pozostałych prac zacytowano co najwyżej „Summary").

Według MathSciNet wszystkie prace dr. Dzioka były cytowane 158 razy przez 72 autorów. Jest to bardzo dobry wynik. Dwie najliczniej cytowane prace to prace wspólne ze Srivastavą: [H2] (49 cytowań) i [D10] (43 cytowania).

Reasumując powyższe opinie i uwagi, jestem całkowicie przekonany, iż zarówno rozprawa, jak i pozostały dorobek naukowy dr. Jacka Dzioka stanowią trwały wkład do analizy zespolonej jednej zmiennej i spełniają zarówno zwyczajowe, jak i ustawowe wymagania stawiane przy habilitacji. Dlatego też wnioskuję o dopuszczenie Go do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.