Poznań 20 marca 2016

Grzegorz Banaszak
Profesor zwyczajny
Wydział Matematyki i Informatyki
UAM Poznań

**Opinia dotycząca wniosku dra Macieja Ulasa
o nadanie stopnia doktora habilitowanego**

Dr Maciej Ulas zajmuje się równaniami diofantycznymi. Bada rozwiązania tych równań z punktu widzenia Teorii Liczb jak również z punktu widzenia Geometrii Algebraicznej. Jego wyniki dotyczą klasycznych równań diofantycznych jak też ich naturalnych uogólnień. Zagadnienia wokół których koncentrują się prace składające się na rozprawę habilitacyjną ([H1] - [H8]) dotyczą rozwiązań kilku typów równań diofantycznych i zagadnień z nimi bezpośrednio związanych:

- (1) Typy rozkładalności wielomianów $x^n + Ax^m + B$ parametryzowane przez krzywe ([H2])
- (2) Równania diagonalnego typu $ax^p + by^q + cz^r + dw^s = 0$ ([H1], [H7])
- (3) Równania diagonalnego typu $a(x^2 - y^q) = b(z^r - w^s)$ ([H5])
- (4) Układy 2 i 3 równań postaci $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) = a$ ([H3], [H4])
- (5) Równania typu $N_{K/k}(x_1\omega_1 + \cdots + x_n\omega_n) = f(t)$. ([H5], [H6])
- (6) Locus punktów wymiernych o wymiernej odległości od danych punktów wymiernych ([H8]).

Współczynniki wszystkich typów równań (1)-(6) są zwykle w następujących pierścieniach: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_n]$ poza przypadkiem (5) gdzie współczynniki są w ciele k. Jednym z głównych zagadnień podjętych w pracach [H1] - [H8]) jest uzyskanie nieskończenie wielu rozwiązań (całkowitych lub wymiernych) rozpatrywanych równań diofantycznych. Jedną z naturalnych metod służącą rozwiązaniu tego zagadnienia jest pokazanie rozwiązań parametryzowanych przez krzywe, najlepiej krzywe wymierne lub znajdowanie innych krzywych, w szczególności eliptycznych, na rozmaitości odpowiadającej danemu równaniu diofantycznemu. Omówię poniżej wyniki prac Macieja Ulasa składających się na rozprawę habilitacyjną, które moim zdaniem zasługują na szczególną uwagę i które zaznaczają jego wkład do teorii równań diofantycznych.

W pracy [H1] opisane są rozwiązania równań postaci $x^p \pm y^q \pm z^r \pm w^s = 0$ dla wszystkich układów (p, q, r, s) takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Autorzy znajdują w wielu przypadkach wymierne rozwiązania a pozostałych przypadkach rozwiązania leżące na krzywych eliptycznych rangi > 0 położonych na odpowiedniej powierzchni rzutowej danej powyższym równaniem. Jednymi z ciekawszych obliczeń są te dotyczące powierzchni $x^6 + y^6 + z^6 - w^2 = 0$. Autorzy do uzyskania rezultatów w tej pracy posługują się elementarnymi przekształceniami i podstawieniami algebraicznymi.

Praca [H2] dotyczy typów rozkładalności wielomianów postaci $x^n + Ax^m + B \in \mathbb{Q}[x]$. Z definicji ten trójmian ma typ rozkładalności $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ dla $n_1 \leqslant \dots \leqslant n_k$ gdy $x^n + Ax^m + B = f_1(x) \dots f_k(x)$ dla pewnych unormowanych, nierozkładalnych $f_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stopni n_i. Traktując współczynniki wielomianów $f_i(x)$ jak zmienne i porównując ze współczynnikami trójmianu poza współczynnikami przy x^m i przy x^0 otrzymujemy równania rozmaitości która jest krzywą. Autorzy badają w większości typy rozkładalności które prowadzą do krzywych niskiego genusu g w szczególności $g = 0$ lub $g = 1$. Aby uchwycić ogólniejszą zasadę która kryje się za danymi typami rozkładalności, autorzy działaja również z trojmianami o współczynnikach w $\mathbb{Q}[u]$. Główne wyniki pracy dotyczą warunków dla istnienia typów $(1, 1, 2), (1, 2, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (2, 2, 2), (3, 4), (3.5)$ i bardziej skomplikowanych typów z dużymi n_i (Twierdzenia 5.3, 5.4, 5.5, 6.2, 6.3, 6.5).

W Pracy [H4] głównym zagadnieniem jest badanie układów 2 równań:

$$\sigma_i(x_1, \dots, x_n) = a$$

$$\sigma_j(x_1, \dots, x_n) = b$$

dla ustalonych i oraz j takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Symbol σ_i oznacza i-ty elementarny, symetryczny wielomian $\sigma_i(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leqslant k_1 < \dots < k_i \leqslant n} x_{k_1} \dots x_{k_i}$. Rezultaty uzyskane przez M. Ulasa rozszerzają wyniki badań A. Schinzela ($n = 3$, $i = 1$, $j = 3$) oraz wyniki Y. Zhanga i T. Cai (n dowolne, $i = 1$ lub $i = 2$ oraz $j = n$). Rozwiązania rozpatrywane przez A. Schinzela były w liczbach całkowitych dodatnich natomiast rozwiązania w pracach Y. Zhanga i T. Cai były w liczbach wymiernych dodatnich. W [H4] M. Ulas zajmuje się rozwiązaniami parametrycznymi. Pokazał on , między innnymi, że dla $i = 1$, $j = n$ oraz $n \geqslant 4$ układ ma ∞ wiele rozwiązań zależnych od $n - 3$ niezależnych parametrów. Podobny wynik uzyskał dla układu w którym $n \geqslant 4$ oraz $2 \leqslant i < j = n$. Jako wniosek, dla każdego $k \in \mathbb{N}$, otrzymuje ∞ wiele zbiorów mocy k, złożonych z układów o n współrzędnych w $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, które są rozwiązaniami w/w układu równań. Podobny rezultat zachodzi dla układów przy $n \geqslant 3$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ gdzie $a = \sigma_i(t_1, \dots, t_n)$, $b = \sigma_j(t_1, \dots, t_n)$ dla parametrów $t_1, \dots, t_n$ przy czym rozwiązania mają współrzędne w $\mathbb{Q}(t_1,\dots,t_n)$. W końcu pracy pokazano, że dla każdego $n \geqslant 5$ istnieje ∞ wiele trójek liczb $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{Q}^3$ takich, że układ 3 równań:

$$\sigma_i(x_1,\dots,x_n) = a_i, \qquad i = 1,2,3,$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{Q}^n$.

Praca [H3] jest kontynuacją pracy [H4]. M. Ulas, pokazuje, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $n \geqslant 2$ istnieje ∞ wiele $a \in \mathbb{Q}$ takich, że układ:

$$\sigma_i(x_1,\dots,x_{2n}) = a$$
$$\sigma_{2n-i}(x_1,\dots,x_{2n}) = a$$
$$\sigma_{2n}(x_1,\dots,x_{2n}) = 1$$

ma ∞ wiele rozwiązań $(x_1,\dots,x_{2n}) \in \mathbb{Q}_+^{2n}$. Autor bada też układy 3 równań $s_{i_k}(x_1,\dots,x_n) = a_{i_k}$ dla $k = 1,2,3$, gdzie $s_i(x_1,\dots,x_n) := \sum_{j=1}^n x_j^i$. Wynik dotyczący rozwiązań tych układów jest w dużej mierze podobny do powyższego wyniku dla układów zawierających wielomiany elementarne, symetryczne.

Praca [H5] jest kontynuacją [H1] dla równań typu $a(x^2-y^q) = b(z^r-w^s)$ dla a,b całkowitych $ab \neq 0$. Autorzy pokazują, że na rozmaitości $a(x^2-y^6) = b(z^6-w^6)$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań w pierścieniu $\mathbb{Z}[t]$ spełniających warunek $\mathrm{NWD}(x,y,z) = 1$. To daje ∞ wiele rozwiązań w $\mathbb{Z}$. Ponadto pokazują, że zbiór rozwiązań w $\mathbb{Q}$ jest gęsty w zbiorze rozwiązań w $\mathbb{R}$ w topologii Euklidesowej. Podobnie, dla rozmaitości $a(x^2-y^q) = b(z^r-w^s)$ z $(p,q,r,s) = (2,4,8,8)$ lub $(2,8,4,8)$ lub $(2,4,6,12)$ pokazano, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań w pierścieniu $\mathbb{Z}[t]$ spełniających $\mathrm{NWD}(x,y,z,w) = 1$. Trochę bardziej skomplikowane, ale nadal elementarne, jest badanie rozmaitości dla $(p,q,r,s) = (2,6,4,12)$ lub $(2,12,4,6)$. W tym przypadku autorzy znajdują rozwiązania wymierne sprowadzając do przypadku krzywych eliptycznych rangi > 0 na tych rozmaitościach. Jednak nie udało się pokazać, że te rozwiązania mają współrzędne względnie pierwsze. W pracy [H5] badane są również inne powierzchnie np. $x^4-y^4 = h(z^4-w^4)$ a także wyżej wymiarowe rozmaitości $a(y_1^4 - f_1(x_1,\dots,x_n)^2) = b(y_2^4 - f_2(x_1,\dots,x_n)^2)$, gdzie $f_i(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ są formami jednorodnymi.

W Pracy [H6] jednym z głównych zagadnień jest badanie arytmetycznych własności rozmaitości normowej (norm variety) S_f opisanej równaniem:

$$N_{K/k}(x_1\omega_1 + \cdots + x_n\omega_n) = f(t),$$

gdzie K/k jest skończonym rozszerzeniem z bazą $(\omega_1,\dots,\omega_n)$ oraz $f(t) \in k[t]$. Główne wyniki pracy pokazują, że jeśli $k(\alpha)/k$ jest rozszerzeniem stopnia 3, gdzie α jest pierwiastkiem $x^3+b=0$ oraz $f(t)$ jest pewnym wielomianem stopnia 4 lub 6 to przy dodatkowych założeniach np. na istnienie punktu k wymiernego na S_f lub na współczynniki $f(t)$ rozmaitość S_f jest k-uniwymierna. Jeżeli k ma zanurzenie w $\mathbb{R}$ to dla K/k stopnia 3 i pewnej szerokiej klasy $f(t)$ stopnia 6 można znaleźć dowolnie bliski do $f(t)$ (topologia Zariskiego ze względu na współczynniki) wielomian $g(t) \in k[t]$ stopnia 6 taki, że S_g jest uniwymierna.

W Pracy [H7] konstruowane są pewne rodziny diagonalnych powierzchni 4 i 6 stopnia posiadające nieskończenie wiele wymiernych punktów. Autorzy pokazują, że istnieją nieskończone rodziny powierzchni nad $\mathbb{Q}$ stopnia 4 o liczbie Picarda 2 lub 3 posiadające gęsty zbiór punktów wymiernych w topologii Zariskiego. Ponadto pokazują, że istnieją nieskończone rodziny powierzchni nad $\mathbb{Q}$ stopnia 4 o liczbie Picarda 1 posiadające nieskończony zbiór punktów wymiernych. Autorzy konstruują również, dla każdego $m \in \mathbb{Z}$, powierzchnię $ax^4 + by^4 + cz^4 + dw^4 = 0$ taką, że $abcd \equiv m \mod \mathbb{Q}^2$ która ma ∞ wiele punktów wymiernych o wszystkich współrzędnych niezerowych. W dalszej części pracy [H7] konstruowane są specjalne typy diagonalnych powierzchni 6 stopnia które posiadają ∞ wiele punktów wymiernych.

Wyniki pracy [H8] skupiaja się wokół nierozwiązanego i pozornie elementarnego problemu dotyczącego istnienia punktów wymiernych na płaszczyźnie xy, których odległość od wierzchołków kwadratu jednostkowego tzn. of punktów $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ jest wymierna. Autorzy uzyskują szereg rezultatów, które są rozwiązaniem pokrewnych problemów powstałych podczas prób zrozumienia i rozwiązania wyżej wymienionego otwartego problemu. Przykładem jest wynik M. Ulasa i A. Bremnera, którzy deformując kwadrat jednostkowy równolegle do osi x dowodzą, że zbiór elementów $a \in \mathbb{Q}$ takich, że zbiór punktów wymiernych (na płaszczyźnie xy) których odległość od wierzchołków prostokąta $(0,0), (a,0), (0,1), (a,1)$ jest wymierna jest nieskończony jest gesty w $\mathbb{R}$ w topologi euklidesowej. Biorąc roszerzenie $K/\mathbb{Q}$ takie, że $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset K$ pokazano, że zbiór punktów K-wymiernych (na płaszczyźnie xy) których odległość od wierzchołków $(0,0), (a,0), (0,1), (a,1)$ jest elementem ciała K jest nieskończony. Wszystkie wyniki pracy [H8] dotyczą zagadnienia istnienia i mocy wymiernych punktów na płaszczyźnie bądź w $\mathbb{R}^3$ odległych o liczby wymierne od wierzchołków pewnej figury (np. kwadratu jednostkowego rozpatrywanego w $\mathbb{R}^3$, czworościanu, sześcianu). Te zagadnienia prowadzą od razu do układów równań kwadratowych, gdzie autorzy mogą posłużyć się swoim doświadczeniem z równań diofantycznych.

Badania Macieja Ulasa koncentrują się wokół zagadnień dotyczących równań diofantycznych. Aparat używany w pracach [H1]-[H8] jest raczej elementarny ale potrzeba szerokiej wiedzy z Algebry, Geometrii Algebricznej i Teorii Liczb aby umiejętnie identyfikować problemy, przeszkody i możliwe rozwiązania oraz znajdować istotne uogólnienia znanych problemów. Taka praca badawcza wymaga bardzo dobrego wykształcenia matematycznego które Maciej Ulas posiada i dzięki temu uzyskuje bardzo dobre wyniki. W zbiorze prac przedstawionych jako rozprawa habilitacyjna najbardziej podobały mi się wyniki dotyczące form diagonalnych [H1], [H5], [H7]. Prace Macieja Ulasa są w większości opublikowane w dobrych i bardzo dobrych czasopismach, między innymi w takich jak: Acta Arithmetica, Acta Math. Hungar., Bull. Australian Math. Soc., Bull. Polish Math. Soc., Canadian Math. Jour., Coll. Math., Journal of Number Theory, International Journal of Number Theory, Galsgow Math. Jour., Rocky Mountain Jour. Math.. Prace Macieja Ulasa są napisane w jasny i przejrzysty sposób. Prace [H3], [H4], [H6] są samodzielne. Pozostałych 5 prac rozprawy jest współautorskich. Złożone oświadczenia współautorów pokazują jasno, że wkład M. Ulasa w te prace był znaczący. Odnośnie cytowań MathSciNet podaje, że prace Macieja Ulasa cytowało 57 autorów 97 razy. Jest to wykładnia tego, że jego wyniki spotkały się z dużym zainteresowaniem.

Uzyskane wyniki przez dra Macieja Ulasa zawarte w zbiorze prac stanowiących rozprawę habilitacyjną, jak i wyniki zawarte w innych publikacjach, oceniam bardzo pozytywnie. Jego dorobek naukowy spełnia wymogi ustawowe i zwyczajowe dla uzyskania stopnia doktora habilitowanego. Wnoszę o nadanie stopnia doktora habilitowanego doktorowi Maciejowi Ulasowi.

Grzegorz Banaszak