Recenzja rozprawy doktorskej pana Tomasza Kobosa

Rozprawa pana Tomasza Kobosa składa się z dwóch niezależnych części poświęconych różnym zagadnieniom skończenie wymiarowej geometrii przestrzeni Banacha. Pierwsza część dotyczy problemu wektorów ekwilateralnych, to znaczy takich układów wektorów $x_1, x_2, \dots x_k$ z ustalonej n-wymiarowej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|$, których wzajemne odległości są równe 1, tzn. $\|x_j - x_j\| = 1$ dla $i, j = 1, \dots, k, i \neq j$. Naczelnym zagadnieniem teorii zbiorów ekwilateralnych jest słynna hipoteza Petty'ego, która przypuszcza, że w każdej n-wymiarowej przestrzeni Banacha można znaleźć $n+1$ wektorów równoodległych. Jest to problem wciąż otwarty, który udało się do tej pory rozwiązać zaledwie w pewnych dość szczególnych przypadkach, a istniejące oszacowania dla zbiorów równoodległych w dowolnych przestrzeniach są dalece niesatysfakcjonujące. Aktualny stan wiedzy przedstawia się następująco. Wiadomo, że hipoteza Petty'ego jest prawdziwa do wymiaru 4 włącznie, że jest prawdziwa dla przestrzeni których odległość od przestrzeni Hilberta w sensie Banacha - Mazura nie przekracza $1+\frac{1}{n+1}$ oraz dla przestrzeni odległych od ℓ_n^∞ o nie więcej niż 2. W swojej rozprawie p. Kobos rozszerza klasę przestrzeni spełniających hipotezę Petty'ego o przestrzenie z normą permutacyjnie niezmiennicza (Twierdzenie 4.2) oraz dowodzi, że przestrzenie z normą gładką których odległość od pewnej przestrzeni z normą symetryczną nie przekracza $1+\frac{\epsilon}{n}$ (tu ϵ zależy od modułu gładkości normy) posiadają n-elementowy zbiór wektorów równoodległych. Ten ostatni wynik otrzymany jest przy użyciu twierdzenia Brouwera - rozumowanie jest zaadaptowane z dowodu Swanepoela i Villi, jednak zastosowane do sytuacji znacznie bardziej ogólnej. Kolejnym osiągnięciem p. Kobosa jest dowód hipotezy Petty'ego dla skończenie wymiarowych przestrzeni Musielaka-Orlicza (Twierdzenie 4.6), oraz podobnie jak przy uprzednim rezultacie - w przestrzeni odpowiednio bliskich przestrzeniom Musielaka - Orlicza istnieja n-elementowe zbiory równoodległe (Twierdzenie 4.8). Kolejnym przypadkiem rozważonym przez p. Kobosa są podprzestrzenie ℓ_n^∞ kowymiaru 1. Dowodzi on że dla takich podprzestrzeni zawsze moc maksymalnego zbioru ekwilateralnego jest co najmniej $2^{[\frac{n}{2}]}$ (Twierdzenie 4.9),p a nawet otrzymuje dokładniejsze oszacowania w zależności od podprzestrzeni. I znów, tak jak poprzednio, dowodzi pewnej częściowej słabej stabilności rezultatów, pokazując że dla nieodległych (odległość niewiększa niż 2) przestrzeni można znaleźć $[\frac{n}{2}]$ wektorów równoodległych.

Kolejnym wynikiem związanym z problemem Petty'ego jest konstrukcja przestrzeni Banacha dla której można znaleźć układ czterech wektorów równoodległych którego nie można powiększyć. Jest to związanie z wynikiem Petty'ego o tym, że dowolny układ trzech wektorów równoodległych zawsze można powiększyć użytym przez Petty'ego do dowodu istnienia czterech wektorów równoodległych w przestrzeni trójwymiarowej. Skonstruowano (Twierdzenie 3.9) dowolnie wysoko wymiarową gładką ściśle wypukłą przestrzeń Banacha w której istnieje maksymalny układ czterech wektorów równoodległych. Poprzednio znane przykłady nie były ani gładkie ani ściśle wypukłe.

Jeszcze jednym składnikiem pracy jest nowy dowód trójwymiarowego twierdzenia Petty'ego oparty o wynik Kramera i Nemetha o możliwości wpisania w gładką bryłę wypukłą jednokładnej kopii dowolnego sympleksu i jej jedyności w przypadku ściśle wypukłego ciała dwuwymiarowego.

Druga część pracy poświęcona jest zagadnieniu projekcji minimalnych na podprzestrzenie kowymiaru 1 skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha. Tutaj podstawą do rozważań z rozprawy jest rezultat Bohnenblusta który stanowi, że w każdej n-wymiarowej przestrzeni Banacha istnieje projekcja o normie co najwyżej $2 - \frac{2}{n}$ na jej dowolną podprzestrzeń kowymiaru 1.

Pierwszym wynikiem tej części rozprawy jest podanie oszacowania na liczbę podprzestrzeni kowymiaru 1 z maksymalną możliwą normą minimalnej projekcji, tzn z norma $n - \frac{2}{n}$. Pokazano, że liczba takich podprzestrzeni nie przekracza $2^{n-1}C(N,n)$, gdzie $2N$ jest liczbą $n-1$ wymiarowych ścian kuli jednostkowej. Dowód oparty jest na charakteryzacji przestrzeni dla których istnieje podprzestrzeń kowymiaru 1 z maksymalną relatywną stałą projekcji (Wniosek 7.6) oraz ciekawej własności (Wniosek 7.7) - przestrzeń która zawiera podprzestrzeń kowymiaru 1 z maksymalną możliwą relatywną stałą projekcji zawiera również dwuwymiarową podprzestrzeń 1-uzupełnialną. W przypadku przestrzeni trójwymiarowej uzyskano mocniejszy wynik. Mianowicie dowolna przestrzeń trójwymiarowa może posiadać co najwyżej 4 podprzestrzenie z relatywną stałą projekcji $\frac{4}{3}$ (Twierdzenie 7.11).

Kolejny wynik pokazuje, że Wniosek 7.7 jest w pewnym sensie stabilny. Dowodzi się (Twierdzenie 7.14) , że istnieje ciągła funkcja $f(r)$ taka, że $f(0) = 0$ o tej własności, że jeśli trójwymiarowa przestrzeń Banacha posiada podprzestrzeń dwuwymiarową z relatywną stałą projekcji $\frac{3}{4} - r$ to posiada również dwuwymiarową podprzestrzeń z rzutem o normie mniejszej niż $1 + f(r)$ (przy tym funkcja f jest zadana jawnym wzorem). Jako wniosek pokazano, że dowolna trójwymiarowa przestrzeń Banacha posiada dwuwymiarową podprzestrzeń z rzutem o normie mniejszej niż $\frac{4}{3} - 0,0007$.

Kolejnym wynikiem pracy jest ilościowy wariant twierdzenia Bohnenblusta, które mówi, że istnieją skończenie wymiarowe podprzestrzenie przestrzeni ℓ^p bez nietrywialnych podprzestrzeni 1-uzupełnialnych. To znaczy każdy rzut na dowolną podprzestrzeń właściwą ma normę większą niż 1. Twierdzenie Bohnenblusta nie daje oszacowania jak dalece rzuty różnią się od kontrakcji. W rozprawie dowodzi się (Wniosek 8.2), że dla $n > 3$ istnieje n-wymiarowa przestrzeń Banacha taka, że dowolny rzut na jej podprzestrzeń kowymiaru 1 ma normę co najmniej $1 + (2(n+3)^2)^{-100(n+3)^2}$. Jest to częściowa odpowiedź na pytanie Bosznaya i Garaya o tego typu oszacowanie dla dowolnych podprzestrzeni (nie tylko kowymiaru 1). Żadne tego typu oszacowanie nie było wcześniej znane. Na podkreślenie zasługuje fakt, że dowód opiera się na bardzo subtelnych i pomysłowych rachunkach.

Wyniki uzyskane przez p. Kobosa i zamieszczone w pracy doktorskiej są wg. mojej wiedzy oryginalne. Ich uzyskanie dowodzi znakomitej orientacji w skończenie wymiarowej geometrii (izometryczna teoria przestrzeni Banacha) oraz dużej biegłości dowodowej. Obie części część pracy wydają się bardzo obiecujące i perspektywiczne, a pojawiające się w nich metody z całą pewnością będą miały dalsze zastosowanie w teorii. Praca napisana jest bardzo dobrze, ma przejrzysty układ, zawiera wprowadzenie zarówno techniczne jak i historyczne. Na koniec autor formułuje kilka problemów, naturalnych w kontekście uzyskanych wyników.

Podsumowując uważam że praca z naddatkiem spełnia wymagania stawiane rozprawie doktorskiej i wnioskuję o nadanie p. Tomaszowi Kobosowi stopnia naukowego doktora.

Michał Wojciechowski