Prof. dr hab. Mieczysław Mastyło
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Poznań, 25.01.2016 r.

Ocena

rozprawy doktorskiej mgra Tomasza Kobosa
„Wybrane zagadnienia geometrii ciał wypukłych"

Rozprawa doktorska mgra Tomasza Kobosa poświęcona jest badaniu zbiorów ekwilateralnych oraz projekcji minimalnych w skończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha. Rozprawa składa się ze wstępu oraz dziewięciu rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera podstawowe pojęcia z geometrii przestrzeni Banacha oraz teorii ciał wypukłych; natomiast drugi podstawowe definicje i przykłady. W tym rozdziale mgr Kobos omawia również pewne znane klasyczne wyniki o oszacowaniach dolnych i górnych wymiarów ekwilateralnych skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha. Przypomnijmy, że jeśli X jest skończenie wymiarową przestrzenią Banacha, to niepusty zbiór $S \subset X$ nazywamy ekwilateralnym, jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że $\|x - y\| = c$ dla dowolnych $x, y \in S$, $x \neq y$. Wymiarem ekwilateralnym przestrzeni Banacha X nazywamy maksymalną liczbę $e(X)$ wektorów przestrzeni X, które tworzą zbiór ekwilateralny. W rozdziale drugim rozprawy autor naświetla również historię nierozwiązanej do tej pory hipotezy, która głosi, że $e(X) \geqslant n+1$ dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni Banacha i prezentuje dowody pewnych ważnych wyników o oszacowaniach wymiarów ekwilateralnych. Warto odnotować wynik (Twierdzenie 2.14) udowodnione przez Swanepoela i Villę w artykule opublikowanym w Proc. Amer. Math. Soc. (2008), z którego wynika prawdziwość wspomnianej powyżej hipotezy dla przestrzeni Banacha, dla których odległość Banacha-Mazura od przestrzeni ℓ_∞^n nie przekracza 3/2. Metody zawarte w tym dowodzie zostały rozwinięte przez mgra Kobosa w Jego rozprawie.

Rozdział trzeci dotyczy twierdzenia Petty'ego które głosi, że jeżeli X jest przestrzenią Banacha o wymiarze $\dim(X) \geqslant 3$, to dowolny 3-elementowy zbiór ekwilateralny można rozszerzyć do 4-elementowego zbioru ekwilateralnego (w szczególności z tego twierdzenia wynika prawdziwość wspomnianej powyżej hipotezy dla $n = 3$). W rozdziale tym mgr Kobos podaje alternatywny dowód twierdzenia Petty'ego, który opiera się na twierdzeniu Kramera i Németha o możliwości wpisania sympleksu w gładkie i ściśle wypukłe ciało. Uzyskany wynik zawarty jest w artykule opublikowanym w Ann. Pol. Math. (2013). Tutaj należy zwrócić uwagę, że Petty pokazał, że jeśli $n \geqslant 4$, to w przestrzeni $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ z normą $\|\cdot\|$ określoną wzorem $\|(x_1, \ldots, x_n)\| := |x_1| + (x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ dla $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ istnieją zbiory ekwilateralne o 4 elementach, których nie da się rozszerzyć do 5-elementowych zbiorów ekwilateralnych. Następnie Swanepoel i Villa podali konstrukcję szerokiej klasy przestrzeni Banacha, które nie są gładkie ani ściśle wypukłe; ponadto wykazali, że dla dowolnego $1 < p < 1.32$ i $n \geqslant 4$ przestrzeń ℓ_p^n również posiada powyższą własność. W związku z tymi wynikami interesującym rezultatem rozdziału 3 rozprawy jest Twierdzenie 3.9, z którego wynika, że dla dowolnego $n \geqslant 4$ istnieją gładkie i ściśle wypukłe n-wymiarowe przestrzenie Banacha, które posiadają 4-elementowy zbiór ekwilateralny maksymalny w sensie inkluzji.

Celem czwartego rozdziału rozprawy jest udowodnienie dolnych oszacowań wymiaru ekwilateralnego dla pewnych klas skończenie wymiarowych przestrzeni. W rozdziale tym mgr Tomasz Kobos bada m.in. klasy skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha, dla których prawdziwa jest wspomniana hipoteza. Dowodzi (Twierdzenie 4.2), że jeżeli X jest n-wymiarową przestrzenią permutacyjnie niezmienniczą, to $e(X) \geqslant n+1$. Za wartościowe uważam Twierdzenie 4.4; autor rozprawy dowodzi, że $e(Y) \geqslant n$ dla dowolnej n-wymiarowej przestrzeni Banacha, której odległość Banacha-Mazura od gładkiej i symetrycznej n-wymiarowej przestrzeni Banacha X jest większa od pewnej stałej $R(X) > 1$ zależnej od modułu gładkości ρ_X. Ponadto pokazuje, że $R(X) \geqslant 1 + \varepsilon_0/6n$, gdzie $\varepsilon_0 > 0$ spełnia nierówność $\rho_X(\varepsilon_0)/\varepsilon_0 \leqslant 1/6n$. Dowód tego rezultatu opiera się na rozumowaniu Swanepoela i Villi zaprezentowanym w dowodzie twierdzenia 2.14, w którym kluczową rolę odgrywa twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. W rozdziale czwartym mgr Kobos bada również dolne oszacowania wymiaru ekwilateralnego podprzestrzeni kowymiaru 1 przestrzeni ℓ_∞^n. Główne wyniki tego rozdziału zawarte są w twierdzeniach 4.9 i 4.11. Ze względu na złożoność opisu przytoczę jedynie dwa oryginalne wnioski wynikające z tych twierdzeń. Pierwszy wniosek głosi, że dla dowolnej $(n-1)$-wymiarowej podprzestrzeni X przestrzeni ℓ_∞^n wymiar ekwilateralny $e(X) \geqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Uzyskany wynik potwierdza prawdziwość wspomnianej hipotezy, gdyż dla $n \geqslant 5$ wymiar $\dim(X) \leqslant 4$. Natomiast drugi wniosek (wynikający z twierdzenia 4.11) głosi, że jeżeli Y jest $(n-1)$-wymiarową przestrzenią Banacha, której odległość Banacha-Mazura od $(n-1)$-wymiarowej podprzestrzeni X przestrzeni ℓ_∞^n jest nie większa od 2, to prawdziwa jest nierówność $e(Y) \geqslant 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

W rozdziale piątym mgr Kobos przypomina dwie kolejne hipotezy znane od wielu lat, które wiążą się z wynikami uzyskanymi w rozprawie. Ponadto formułuje pięć problemów dotyczących oszacowań wymiarów ekwilateralnych skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha.

Pozostałe rozdziały rozprawy poświęcone są własnościom projekcji minimalnych. Rozdział szósty zawiera wprowadzenie do problematyki oraz podstawowe definicje. W celu omówienia pewnych najbardziej wartościowych wyników zawartych w kolejnych rozdziałach przypomnijmy, że jeśli X jest przestrzenią Banacha i Y jest domkniętą podprzestrzenią w X, to operator (liniowy i ograniczony) $P\colon X \to Y$ nazywamy projekcją, jeśli $P|_Y = \mathrm{Id}_Y$. Zbiór wszystkich projekcji z X na Y oznaczamy $\mathcal{P}(X,Y)$. Relatywna stała projekcji wyraża się wzorem $\lambda(Y,X) = \inf\{\|P\| : P \in \mathcal{P}(X,Y)\}$, przy czym $\lambda(Y,X) := \infty$, gdy zbiór $\mathcal{P}(X,Y)$ jest pusty.

Rozdział siódmy rozprawy zawiera autorskie wyniki związane z problemem, postawionym przez Bosznaya i Garaya w 1986 roku, dotyczącym wyznaczenia dla danej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wartości $\sup_X \inf_{Y \subset X} \lambda(Y,X)$, gdzie X przebiega zbiór n-wymiarowych przestrzeni Banacha, natomiast $Y \subset X$ jest podprzestrzenią taką, że $2 \leqslant \dim(Y) \leqslant n-1$. Główne wyniki rozdziału zawarte są w twierdzeniach 7.5 i 7.14. Pierwsze z tych twierdzeń podaje warunki konieczne i dostateczne na istnienie hiperpłaszczyzny $Y = \ker f$ generowanej przez funkcjonał f ze sfery jednostkowej n-wymiarowej $(n \geqslant 3)$ przestrzeni Banacha X, dla której relatywna stała projekcji $\lambda(Y,X) = 2 - \frac{2}{n}$. Autor podaje zastosowania; w szczególności dowodzi (Wniosek 7.7), że jeśli skończenie wymiarowa przestrzeń Banacha X posiada hiperpłaszczyznę o maksymalnej relatywnej stałej projekcji, to posiada dwuwymiarową podprzestrzeń Z taką, że $\lambda(Z,X) = 1$. Interesującym wnioskiem z twierdzenia 7.5 jest Twierdzenie 7.8, które podaje oszacowanie górne na liczbę hiperpłaszczyzn o maksymalnej stałej projekcji dla przestrzeni X, których kule jednostkowe posiadają $2N$ ścian $(n-1)$-wymiarowych.

Głównym wynikiem rozdziału 8 jest Twierdzenie 8.1, w którym dla danych liczb całkowitych $n \geqslant 4$, $p \geqslant m/2$ oraz $m \geqslant n+2$ autor dowodzi, że jeżeli Y jest $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ z normą $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m |f_i(x)|^{2p}\right)^{1/2p}$ generowaną przez niezerowe funkcjonały liniowe $f_1, \ldots, f_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, to $\lambda(Y,X) \geqslant 1 + \varepsilon_0$. Złożony dowód tego twierdzenia oparty jest na wielu interesujących ogólnych lematach i twierdzeniach, które autor dowodzi w omawianym rozdziale. Należy zwrócić uwagę na subtelny fakt, że kombinacja oszacowań, które uzyskał mgr Kobos w dowodzie Twierdzenia 8.1 daje $\varepsilon_0 = (m+2\beta^{2p})^{-7}(\alpha^{-6}2^{14}n^{12}m^{11}p^4)^{-12pm}$, gdzie parametry $0 < \alpha \leqslant 1/2$, $\beta > 0$ pojawiają się w warunkach na funkcjonały $f_1, ..., f_m$. W szczególności przy odpowiednim wyborze liczb całkowitych p, m oraz funkcjonałów f_i dla $1 \leqslant i \leqslant m$, mgr Kobos otrzymuje interesujący wniosek: dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 4$ istnieje n-wymiarowa przestrzeń Banacha X taka, że dla dowolnej $(n-1)$-wymiarowej podprzestrzeni $Y \subset X$ prawdziwa jest nierówność $\lambda(Y, X) > 1 + (2(n+3)^2)^{-100(n+3)^2}$.

W ostatnim krótkim rozdziale mgr Kobos stawia i dyskutuje trzy naturalne problemy dotyczące projekcji minimalnych, które związane są z badaniami zaprezentowanymi w rozprawie.

Ocena rozprawy Rozprawa doktorska mgra Tomasza Kobosa została bardzo dobrze zredagowana. Zaprezentowany materiał przedstawiony został jasno i zrozumiale. Wychwyciłem kilka drobnych usterek redakcyjnych. Ponadto na str. 75 pole powierzchni wycinka sfery jest obliczone niepoprawnie. Korekta standardowych obliczeń została przesłana przez autora rozprawy. Wskazana usterka nie wpływa na dalszy tok rozumowania w rozprawie. Mgr Kobos znakomicie motywuje swoje badania. Liczne przykłady, które podaje oraz dojrzała merytoryczna dyskusja naukowa dowodzą, że znakomicie orientuje się w obszarze swojej tematyki badawczej. Rozprawa dotyczy aktualnych i trudnych problemów w lokalnej teorii skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha związanych z geometrią ciał wypukłych i teorią projekcji. Autor rozprawy jest bardzo dobrze zorientowany w literaturze przedmiotu związanej z tematyką badawczą. Uzyskał wiele wartościowych wyników, które omówiłem powyżej. Pewne oryginalne wyniki w zakresie teorii zbiorów ekwilateralnych oraz teorii projekcji minimalnych w skończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha, które uzyskał, zostaną z pewnością docenione przez znawców przedmiotu, gdyż mgr Kobos wnosi swój wartościowy wkład do badania słynnej hipotezy o dolnym oszacowaniu wymiaru ekwilateralnego skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha. Należy zwrócić uwagę, że tym problemem zajmowało się wielu wybitnych matematyków. Autor rozprawy uzyskane wyniki buduje na bardzo dobrej znajomości wcześniej znanych rezultatów oraz dowodów i dodaje swój oryginalny istotny wkład. Rozumowania zawarte w rozprawie pokazują, że mgr Kobos potrafi stosować zaawansowane techniki i jednocześnie wprowadza własne niebanalne metody za pomocą, których dowodzi w swojej rozprawie ogólne twierdzenia.

Dobrze wiadomo, że problematyka dotycząca oszacowań relatywnych stałych projekcji jest niezwykle ważna w wielu działach współczesnej analizy funkcjonalnej; lokalnej teorii przestrzeni Banacha; teorii operatorów. Rezultaty uzyskane w rozdziałach 7 i 8 rozprawy dotyczące relatywnych stałych projekcji zasługują już na wyróżnienie. Wyniki zaprezentowane w rozdziale 7 zawarte są w artykule opublikowanym w Bull. Austral. Math. Soc. (2015); natomiast wyniki zawarte w rozdziale 8 wchodzą w skład Jego samodzielnej, złożonej do druku pracy pt. *A uniform estimate of the relative projection constant.*

Podsumowując swoją ocenę stwierdzam, że rozprawa doktorska mgra Tomasza Kobosa dowodzi o Jego kreatywności i potencjale twórczym. Rozprawa ta wnosi wartościowy wkład do oryginalnej i zaawansowanej tematyki badawczej. Ponadto uważam, że ze względu na wysoką rangę uzyskanych i już opublikowanych w trzech artykułach naukowych rezultatów rozprawa zasługuje na wyróżnienie.

Konkluzja. Uważam, że rozprawa doktorska mgra Kobosa spełnia wszystkie wymogi określone w Ustawie o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dnia 14 marca 2003 roku. Wnoszę wobec tego o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgra Tomasza Kobosa do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

M. Mastyło