31 maja 2016 r.

dr hab. Dariusz Idczak
prof. nadzw. UŁ
Katedra Równań Różniczkowych
i Informatyki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana Jiangfeng Hana „Evolutionary multivalued hemivariational inequalities modeling dynamic unilateral contact problems”

Przedstawiona rozprawa poświęcona jest ewolucyjnym wielowartościowym nierównościom hemiwariacyjnym, które mają zastosowanie do modelowania dynamicznych lepkosprężystych jednostronnych zjawisk kontaktowych z normalną tłumioną odpowiedzią i tarciem. W pracy zbadano istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego typu nierówności oraz jego numeryczną aproksymację, podając oszacowanie błędu tej aproksymacji. Ponadto, zbadano istnienie rozwiązań trzech zadań sterowania optymalnego, związanych z takimi nierównościami.

Teoria nierówności hemiwariacyjnych jest nową, intensywnie rozwijaną gałęzią rachunku wariacyjnego. Rozwój ten wynika z licznych zastosowań nierówności hemiwariacyjnych, m.in do modelowania zjawisk mechanicznych, związanych z zachowaniem ciał sprężystych i lepkosprężystych. Twórcą i prekursorem badań nierówności hemiwariacyjnych jest Panagiotopoulos, który w latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia zaproponował uogólnienie nierówności wariacyjnych na przypadek niewypukłych i niegładkich funkcjonałów energii, wykorzystując pojęcie subróżniczki Clarke'a funkcji lokalnie lipschitzowskiej.

Praca napisana jest w języku angielskim, liczy 62 strony i składa się ze wstępu (rozdział 1), pięciu zasadniczych części (rozdziały 2, 3, 4, 5, 6), uwag końcowych (rozdział 7) i spisu cytowanej literatury.

Omówię teraz krótko treść rozprawy.

We wstępie Autor opisuje powstanie i rozwój teorii nierównosci hemiwariacyjnych, w zakresie zagadnień badanych w pracy.

Rozdział 2 zawiera preliminaria. Podane są tutaj wykorzystywane w pracy pojęcia i fakty z zakresu przestrzeni funkcji o wartościach wektorowych (przestrzenie L^p, przestrzenie Bochnera-Soboleva), teorii operatorów monotonicznych (twierdzenie o surjektywności sumy trzech operatorów), subróżniczki wypukłej i subróżniczki Clarke'a (charakteryzacja subróżniczek funkcjonałów całkowych i twierdzenie o subróżniczce Clarke'a złożenia funkcji lokalnie lipschitzowskiej z odwzorowaniem afinicznym).

W rozdziale 3 podany jest matematyczny model opisujący kontakt ciała lepkosprężystego z podłożem, z uwzględnieniem tarcia (Problem 3.1). Następnie model ten zapisany jest w postaci wariacyjnej (Problem 3.2) i zdefiniowane jest słabe rozwiązanie Problemu

3.1. W tej części wyprowadzone są także wybrane własności odwzorowań j_v, j_τ występujących w sformułowaniu Problemu 3.2 (m.in. mierzalność, ciągłość, regularność), a także monotoniczność subróżniczek tych odwzorowań.

Rozdział 4 poświęcony jest udowodnieniu twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania Problemu 3.2 (Twierdzenia 4.1 i 4.2). W tej części Autor zanurza badany problem w klasie problemów ogólniejszych, a mianowicie zapisuje Problem 3.2 w postaci abstrakcyjnej inkluzji ewolucyjnej (Problem 4.1, a także jego równoważna postać (60)). Następnie wyprowadza twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania takiej inkluzji (Twierdzenia 4.3 i 4.4) i korzystając z tych twierdzeń uzyskuje twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania Problemu 3.2. Dowód Twierdzenia 4.3 polega na skorzystaniu z twierdzenia o surjektywności sumy trzech operatorów, zastosowanego do operatorów opisujących inkluzję (60).

Rozdział 5 zawiera twierdzenia o istnieniu rozwiązań optymalnych dla trzech zadań sterowania optymalnego związanych z układem sterowania opisanym w Problemie 4.1.

W pierwszym zadaniu sterowaniami są: prawa strona inkluzji i dane opisujące wartości początkowe rozwiązania. Rozważany jest ogólny funkcjonał kosztu, przy założeniu jego słabej półciągłości z dołu. W tym zadaniu, podobnie, jak w dwóch następnych, Autor nie zakłada warunków gwarantujących jednoznaczność rozwiązania inkluzji ewolucyjnej (układu sterowania) przy ustalonym sterowaniu. Gł ówna część dowodu istnienia rozwiązań optymalnych polega na pokazaniu, że wykres odwzorowania wieloznacznego, które sterowaniu przyporządkowuje zbiór rozwiązań układu sterowania, jest domknięty w słabych topologiach dziedziny i przeciwdziedziny.

W drugim zadaniu rozważany jest układ sterowania opisany w Problemie 4.1 ze sterowaniem ϕ działającym na układ w sposób liniowy, o wartościach ograniczonych przez domknięte i wypukłe wartości odwzorowania wieloznacznego $\mathcal{C}$. Zadanie polega na wyznaczeniu sterowania, zapewniającego osiągnięcie przez trajektorię ruchomego celu w minimalnym czasie. Ruchomy cel opisany jest przy pomocy mierzalnego odwzorowania wieloznacznego $\mathcal{T}$ zmiennej czasowej o wartościach w przestrzeni stanu układu sterowania, posiadającego domknięty wykres. Zakładając niepustość zbioru sterowań przeprowadzających układ do celu, Autor wyprowadza twierdzenie o istnieniu rozwiązania optymalnego. W dowodzie wykorzystane jest (udowodnione w rozprawie) twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań od sterowań, które orzeka, że słaba zbieżność sterowań w klasie funkcji całkowalnych z kwadratem pociąga za sobą silną zbieżność rozwiązań (z dokładnością do podciągu) w klasie funkcji ciągłych.

Trzecim zadaniem sterowania optymalnego jest zadanie maksymalneogo pozostawania trajektorii w zbiorze docelowym (być może z „przerwami"). Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o istnieniu punktu maksimum funkcji ciągowo półciągłej z góry na zbiorze ciągowo zwartym, Autor wyprowadza twierdzenie o istnieniu rozwiązania optymalnego.

Ostatnia zasadnicza część pracy (rozdział 6) traktuje o numerycznej aproksymacji rozwiązań Problemu 4.1. Pierwsze z dwóch udowodnionych tutaj twierdzeń zawiera oszacowanie błędu przybliżenia rozwiązania Problemu 4.1 rozwiązaniem Problemu 6.1, który otrzymujemy z Problemu 4.1 przez zastąpienie przestrzeni stanu V jej skończenie wymiarową podprzestrzenią V_h. W przypadku obu problemów zakłada się, że spełnione są warunki gwarantujące istnienie ich jednoznacznych rozwiązań. Ponadto, zakłada się, że operator lepkości spełnia globalny warunek Lipschitza względem ostatniej zmiennej. Drugie z w/w twierdzeń, uzyskane przy pomocy pierwszego w przypadku, gdy przestrzeń V jest przestrzenią Sobolewa, a przestrzeń V_h jest przestrzenią ciągłych i kawałkami afinicznych funkcji określonych na triangulacji zbioru $\overline{\Omega}$, o średnicy $h > 0$, podaje oszacowanie błędu aproksymacji przez wartość średnicy triangulacji (z dokładnością do stałej niezależnej od h).

W rozdziale 7 Author podsumowuje wyniki uzyskane w pracy i nakreśla możliwości kontynuacji prezentowanych badań.

Wyniki uzyskane w rozprawie są oryginalne. W zakresie istnienia i jednoznaczności rozwiązania stanowią one rozszerzenie, na przypadek układów uwzględniających tarcie, wyników tego typu uzyskanych dla układów bez tarcia we współautorskiej pracy [28] (wg spisu literatury umieszczonego w rozprawie), opublikowanej w bieżącym roku w czasopiśmie *Nonlinear Analysis: Real World and Applications*. Z tej pracy pochodzi idea zastosowania twierdzenia o surjektywności sumy trzech operatorów, o czym Autor pisze we wstępie do rozprawy. Warto również nadmienić, że w istocie rozprawa zawiera ogólniejsze wyniki, aniżeli sugeruje to jej tytuł, bowiem zasadnicze twierdzenia dotyczą inkluzji ewolucyjnej (Problem 4.1).

W rozprawie, Autor w przejrzysty sposób przedstawia główne idee, rozumowania i uzyskane wyniki. Biegle posługuje się bogatym i zaawansowanym aparatem matematycznym. Cytowana literatura świadczy o dobrym rozeznaniu Autora w przedstawianej tematyce. To potwierdza dobre przygotowanie Autora do samodzielnej pracy naukowej i realny wydaje się plan dalszych badań nakreślony w rozdziale 7 rozprawy.

Redakcja rozprawy jest poprawna, choć w kilku miejscach mogłaby być bardziej precyzyjna. Na przyklad, Autor unika czasami stosowania kwantyfikatorów, zastępując je innymi sformułowaniami, co nie zawsze czyni tekst dostatecznie czytelnym, jak w definicji koercytywnego operatora wieloznacznego, czy w sformułowaniu założenia $H(j)$ (c). Niektóre symbole i pojęcia stosowane są bez uprzedniego zdefiniowania lub podania odpowiedniego źródła, np. ułamkowe przestrzenie Soboleva. Szczegóły dowodowe są czasami zbyt „oszczędnie" zredagowane, np. końcowa część dowodu Twierdzenia 5.3, w której należy wykazać zwartość dziedziny odwzorowania λ. Wymienione niedokładności są łatwe do usunięcia i nie wpływają na moją ocenę rozprawy.

Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska spełnia ustawowe wymagania i wnoszę o dopuszczenie Pana Jiangfeng Hana do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

D. Idczak