Recenzja rozprawy doktorskiej
'Nonstandard perturbations of the spectral action'
złożonej przez Artura Zająca na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Adam Skalski
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Rozprawa doktorska 'Nonstandard perturbations of the spectral action' złożona przez mgr Artura Zająca, napisana pod kierunkiem prof. dr hab. Andrzeja Sitarza dotyczy rozmaitych zagadnień związanych z widmem operatora Diraca, a w szczególności jego zaburzonych wersji takiego operatora. Tematy rozważane w rozprawie, a zwłaszcza stosowany w niej aparat pojęciowy są inspirowane geometrią nieprzemienną, ale w przeważającej części dotyczą klasycznej geometrii różniczkowej i algebraicznego podejścia do tejże oraz (w drugiej połowie rozprawy) klasycznych problemów analizy dotyczących badania pewnych rozwinięć funkcyjnych.

Rozprawa doktorska mgr Artura Zająca, licząca ponad 100 stron, została napisana według podejścia 'od ogółu do szczegółu'. Jej plan wygląda następująco: po krótkim podsumowaniu we wstepie głównych wyników i konwencji oznaczeniowych autor zamieszcza rozdział o charakterze przeglądowym. Przedstawia w nim podstawy geometrii spinowej, konstrukcję operatora Diraca na rozmaitościach typu $Spin^{\mathbb{C}}$, a następnie przechodzi do omówienia geometrii spektralnej poprzez aksjomatykę geometrii nieprzemiennej à la Connes, rozumianej jako rozważanie trójek spektralnych o odpowiednich własnościach. Na zakończenie rozdziału autor omawia krótko pojęcie operatorów pseudoróżniczkowych powiązanych z takimi trójkami.

Krótki rozdział drugi ma zasadniczo charakter algebraiczny i omawia pewne klasy zaburzeń ogólnych operatorów Diraca, skupiając się na tym, kiedy powiązane z nimi trójki spektralne spełniają tak zwane warunki regularności. Rozważania te sa kontynuowane w rozdziale trzecim, gdzie pojawiają się pierwsze oryginalne wyniki rozprawy. Tym razem autor zajmuje się zachowaniem pierwszych współczynników w asymptotycznym wielomianowym rozwinięciu tak zwanego "śladu ciepła", zadanego dla ustalonego operatora Diraca wzorem

$$htr_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t\mu_n}, \quad t > 0,$$

gdzie $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ oznacza ciąg wartości własnych (wraz z krotnościami) operatora D, o którym zakładamy, że ma dyskretne czysto rzeczywiste widmo o skończeniewymiarowych przestrzeniach własnych. Po opartej na algebraicznych rachunkach analizie zachowania takich współczynników pod wpływem zaburzeń wprowadzonych w rozdziale drugim (w podrozdziale 3.1), autor przechodzi do obliczania widm dla zaburzeń klasycznych operatorów Diraca na płaskich torusach (Twierdzenia 3.2.6-3.2.8).

Rozdział czwarty, z mojego (analitycznego) punktu widzenia najbardziej interesujący, dotyczy badania zagadnienia faktycznej zbieżności asymptotycznych rozwinięć uzyskiwanych formalnie. Z logicznego punktu widzenia rozważane tu problemy dotyczą bardzo klasycznej analizy transformacji ciągów liczbowych i związanych z nimi funkcji. Jedną z nich jest wspomniany wyżej ślad ciepła, kolejną funkcja zeta skojarzona z ciągiem $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\zeta_D(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n)^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Autor rozprawy, korzystając z klasycznej transformaty Mellina, bada relacje między zbieżnością i własnościami odpowiednich szeregów. Formalizacja abstrakcyjnego pojęcia "asymptotycznego rozwinięcia" umożliwia eleganckie sformułowanie rezultatów wyrażających własności pewnych rozwinięć funkcji htr_D w zależności od własności odpowiedniej funkcji ζ_D. Choć jak wspomniano wcześniej problemy te można rozważać dla dowolnego wyjściowego ciągu $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$, niekoniecznie o pochodzeniu geometrycznym, podrozdział 4.4 prezentuje przykłady związane z klasycznymi operatorami Diraca, w których spełnione są założenia pojawiające się wcześniej w wynikach ogólnych.

Rozdział piąty zawiera konkretne obliczenia asymptotycznych rozwinięć funkcji zeta i śladu ciepła skojarzonych z ciągami pochodzącymi od klasycznych operatorów Diraca na sferach. Odmienne zachowanie obserwujemy w przypadku parzysto- i nieparzystowymiarowym; pewne zamieszczone tu wyniki dotyczą też operatorów zaburzonych.

Wyniki uzyskane w rozprawie, połączone wspólnym tłem i inspiracją wywodzącą się z nieprzemiennej geometrii, mają w istocie urozmaicony charakter. Choć wiele z nich opiera się przede wszystkim na konkretnych rachunkach, wiodące ku nim rozumowania wymagały od autora zrozumienia niebanalnych klasycznych koncepcji geometrycznych oraz ich niekomutatywnych odpowiedników, pomysłowości związanej z przekształceniami algebraicznymi, a także pewnej wiedzy związanej z wlasnościami funkcji specjalnych. Za najsilniejsze strony rozprawy uważam właśnie jej wszechstronność, oraz rezultaty rozdziału czwartego wraz z ilustrującymi ich zastosowanie przykładami rozważanymi w rozdziale piątym. Pewnym zarzutem wobec rozprawy może być brak interpretacji uzyskanych wyników oraz szerszego odniesienia ich do współcześnie prowadzonych w podobnych obszarach tematycznych badań.

Napisana po angielsku rozprawa została przygotowana starannie, poprawnym, eleganckim językiem i przy bardzo niewielkiej liczbie usterek redakcyjnych i matematycznych (patrz poniżej). Bibliografia wydaje się satysfakcjonująca i prezentująca dokładnie źródła rozważanych problemów, choć jednocześnie odzwierciedla ona wspomniany wcześniej pewien brak szerszego spojrzenia na współczesną aktywność naukową dotyczącą problematyki asymptotycznej rozwinięć śladu ciepła (już proste zerknięcie do Mathscinetu na listę prac cytujących klasyczną już do pewnego stopnia w tej dziedzinie pozycję [38] pokazuje liczne współczesne badania takich rozwinięć, niewymienione choćby we wstępie rozprawy).

Wyniki rozprawy zostały częściowo opublikowane w artykułach [11] i [35] (odpowiednio wspólnych z dr Michałem Ecksteinem i prof. dr hab. Andrzejem Sitarzem) i uważam, że zostaną one zauważone przez matematyków i fizyków matematycznych zajmujących się geometrią spektralną w kontekście nieprzemiennym. Z punktu widzenia logiki argumentacji wyniki są poprawne, nie znalazłem też błędów w tych rachunkach, które sprawdziłem. Poniżej zamieszczam listę konkretnych uwag i sugestii poprawek dotyczących rozprawy. Zostały one podzielone na dwie części; w pierwszej wymieniam nieliczne punkty wymagające pewnych dodatkowych wyjaśnień bądź stwarzające perspektywy dalszych badań, w drugiej zaś usterki redakcyjne i językowe.

Miejsca wymagające pewnych uzupełnień/wyjaśnień

– w rozprawie kilkukrotnie pojawiają się zaburzenia operatorów nieograniczonych (podrozdział 1.6 – choćby definicja 1.6.2, potem podrozdział 2.1 – Stwierdzenie 2.1.2, i tak dalej). Autor nie wspomina kwestii dziedzin i samosprzężenia otrzymywanych tak operatorów (są one oczywiście symetryczne, ale już choćby gęstość dziedziny jest potencjalnie nieoczywista). W większości wypadków założenia o postaci zaburzeń pozwalają udowodnić gęstość dziedziny i samosprzężoność, ale kontekst rozważań wymaga przynajmniej odpowiedniego komentarza, a nie tylko rachunków algebraicznych.

– u podstaw podejścia Connesa do geometrii leży obserwacja, że cała struktura rozmaitości typu $Spin^{\mathbb{C}}$ jest wyznaczona w pewnym sensie przez operator Diraca. Wobec tego powiedzmy Stwierdzenie 2.2.6 prosi się o komentarz mówiący o tym, jak rozważane zaburzenie klasycznego operatora – prowadzące do kolejnej "przemiennej" trójki spektralnej – zmienia rozważaną rozmaitość: topologicznie czy tylko różniczkowo? Czy daje się taką informację zinterpretować geometrycznie?

– czy w przypadku rozważań prowadzonych w podrozdziałach 3.1.3-3.1.5 autor ma podejrzenia/hipotezę dotyczące ogólnej postaci współczynników wyższego rzędu?

– w dowodach twierdzeń o postaci widm w podrozdziale 3.2.2 autor formalnie rzecz biorąc wyznacza tylko część widma – brak tam jakichkolwiek (nietrudnych) uzasadnień, że otrzymany zbiór wektorów własnych jest kompletny. Należałoby to uzupełnić.

(Niepełna) lista drobnych usterek redakcyjnych

– w tekście często pojawiają się przecinki przed 'that' – to akurat interpunkcyjna kalka z polskiego, należy je wykreślić

– s.10, l.13: 'both denote'->'denote both'

– s.10, l.21: 'retain'->'retains'

– s.10, l.-6: 'have'->'has'

– s.12, l.12: brakujące 'irreducible'

– s.18: przypis 6 powinien zawierać odwołanie bibliograficzne

– s.20: definicja 1.5.1 (regularność) – nie ma potrzeby wspominać o tym, że a jest ograniczony, skoro wcześniej założono, że $A \subset B(H)$

– s.22, l.-8: 'arise'->'arises'

– s.23, l.17: 'ones'->'one's'

– s.24, l.10: '$|D|$'->'$|D|^{\alpha}$'

– s.31, l.12: 'these'->'this'

– s.31, l.-1: słowo 'validity' nie ma tu sensu

– s.33, l.13: 'vanish'->'vanishes'

– s.34, l.12: 'have'->'has'

– s.34, l.-7: 'cease'->'ceases'

– s.35, l.8, l.-4: 'vanish'->'vanishes'

– s.36, l.-9: 'multi-index'

– s.43, l.17: 'vanish'->'vanishes'

– s.44, l.-8: 'vanish'->'vanishes'

– s.50, l.-9: 'much less'->'many fewer'

– s.54: Twierdzenie 3.2.6 nie wymaga dowodu, cały podrozdział 3.2.2 można skreślić

– s.60, Definicja 4.1.2: 'if the form'->'of the form'

– s.71, Definicja 4.3.4: należy skreślić 'identically'

– s.72, l.-8: 'vanish'->'vanishes'

– s.73, l.-6: w jakim sensie rozważane tu deformacje są trywialne?

– s.82, l.8: sformułowanie 'only one zeta function' jest nienajszczęśliwsze

– s.83, l.-2: 'where'->'were'

– s.93: warto przypomnieć tu definicję współczynników c_m

– s.93, l.-1: brakujące 'are' albo 'denote'

– s.94, l.-11: 'says what is'->'identifies'

– s.97, l.1: 'you'->'one'

– s.101, podrozdział 5.5: czy nie należy od początku założyć, że G jest skończona?

– s.102, l.-7: sformułowanie 'work up to' nie ma tu sensu

– bibliografia wymaga ujednolicenia – czasami autor używa imion, czasami inicjałów, zmienia się też kolejność imię-nazwisko (choćby w [11])

KONKLUZJA

Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe fakty, uważam że **praca spełnia wszystkie ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim i rekomenduję dopuszczenie pana mgr Artura Zająca do dalszych etapów przewodu doktorskiego**.

Warszawa, 21 lutego 2016 roku

Adam Skalski