dr hab. Robert Wolak, prof. UJ
Wydział Matematyki i Informatyki

Kraków, 28 lutego 2016 roku

Recenzja pracy doktorskiej mgr Artura Zająca pt.

Nonstandard perturbations of the spectral action

Praca doktorska jjest napisana w języku angielskim. Jest poświęcona pewnym elementom geometrii nieprzemiennej mającym bezpośrednie zastosowania w teoriach fizycznych, a mianowicie podstawom elementom teorii działań spektralnych, działań zdefiniowanych przez zdeformowany operator Dirac'a. Ogólna teoria dla rozmaitości riemannowskich jest oparta na istnieniu i własnościach śladu ciepła (heat trace).

Mgr Zając badał rozwinął teorię deformacji działań spektralnych tak by moc rozważać deformacje operatora Diraca zadane w języku algebraicznym. Podstawowe pytanie to czy standardowe metody maja także zastosowanie tym przypadku.Autor skupił się dokładnym zbadaniu asymptotycznych rozwinięciach śladu jądra ciepła.

Rozprawa składa się z 5 rozdziałów.

W rozdziale pierwszym doktorant przedstawił podstawowe pojęcia geometrii różniczkowej i geometrii nieprzemiennej potrzebne do zrozumienia najważniejszych wyników rozprawy. Rozdział drugi także nie zawiera nowych wyników, ale zawiera definicje i twierdzenia dotyczące rozwinięcia asymptotycznego działania spektralnego, pochodzące z dwóch niedawno opublikowanych prac autorstwa A. Connes'a i A. H. Chamaseddine'a (2006) oraz D. Essouabri, B. Iochum, C. Levi'ego i A. Sitarza (2008).

Rozdział 3 wprowadza ogólne wzory dla trzech pierwszych współczynników Seeley-De Witt'a dla dowolnej deformacji operatora Dirac'a jak też szczegółowe wzory w przypadku deformacji skalarnej, wektorowej jak i chiralnej. Formuły w przypadku ogólnym oraz chiralnym są oryginalnymi wynikami, a przypadek skalarny został wyliczony wspólnie z promotorem, patrz Letters in Mathematical Physics 98, 333-348 (2011). Natomiast przypadek wektorowy jest wynikiem klasycznym.

W części drugiej tego rozdziału jest dokładnie obliczone spektrum dla stałych perturbacji operatora Dirac'a na d-wymiarowym płaskim torusie. W tej części autor uogólnia/rozszerza/ wzoruje się na wyniku pochodzącym z monografii Th. Friedricha i A. Nestke, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, AMS 2000, który przedstawia explicite spektrum operatora Dirac'a działającego na polach spinorowych na płaskim torusie. Mgr Zając zajmuje się stałymi perturbacjami tego operatora Dirac'a: perturbacjami danymi przez stałą, Theorem 3.2.6, przez stałą 1-formę, Theorem 3.27, a na koniec stałą chiralną perturbacją, Theorem 3.2.8. Dowody pierwszych dwóch wymienionych twierdzeń to prosta adaptacja dowodu twierdzenia Friedricha, natomiast dowód przypadku chiralnego jest trochę bardziej wymagający.

Rozdział czwarty zawiera rozważania na temat istnienia rozwinięcia (asymptotycznego) dla śladu ciepła (heat trace). W chwili obecnej ważnym ciągle nierozwiązanym jest udowodnienie istnienia takiego rozwinięcia dla dowolnego operatora Dirac'a lub pewnych szczególnych klas tego operatora. Autor wspólnie z Michałem Ecksteinem udowodnili istnienie rozwinięcia dla szczególnych klas operatora, wyniki pochodzą z niedawno opublikowanej wspólnej pracy. Zasadniczym narzędziem jest transformata Mellin'a umożliwiająca skorelować własności (funkcji spektralnej) śladu ciepła i funkcji zeta dla danego nieograniczonego operatora. Wyniki udowodnione w tym rozdziale przedstawiają warunki konieczne wyrażone przy pomocy funkcji zeta operatora Dirac'a. Najogólniejszym wynikiem jest Theorem 4.3.3 w którym przedstawiono bardzo ogólne warunki konieczne na istnienie rozwinięcia asymptotycznego. Następnie mgr Zając zastanawia się kiedy te rozwinięcia są dokładne lub prawie dokładne (exact and almost exact), czyli lokalnie jednostajnie zbieżne, (Definition 4.3.4). Rozdział zamykają dokładnie wyliczone proste przykłady gdzie rozwinięcie śladu ciepła jest dokładne, prawie dokładne oraz rozbieżne asymptotycznie, odpowiednio.

Ostatni, piąty rozdział, poświęcony jest wynikom i obliczeniom rozwinięcia śladu ciepła dla operatora Dirac'a na sferach. W pierwszej części doktorant przedstawia wzory na współczynniki śladu ciepła dla operatorów, dla których wartości własne tworzą ciąg arytmetyczny z wielokrotnościami wyrażonymi poprzez wielomian. Takimi operatorami są operatory Dirac'a na sferach. W części drugiej mgr Zając pokazuje, że rozwinięcie jest rozbieżne dla wszystkich sfer parzysto-wymiarowych, a w przypadku sfer nieparzysto-wymiarowych rozwinięcie jest skończone i ma specjalną postać. Następnie wylicza dokładne przedstawienia rozwinięć dla sfer o wymiarach od 1 do 6. Rozdział zamykają pewne uogólnienia, można zwrócić uwagę na Theorem 5.5.1 w którym autor pokazuje, że część osobliwa śladu ciepła na przestrzeni ilorazowej sfery względem wolnego działania skończonej grupy izometrii jest proporcjonalna do części osobliwej śladu ciepła sfery o współczynniku będącym odwrotnością rzędu grupy.

Autor rozprawy wykazuje bardzo dobra znajomość aktualnej literatury tematu. Widać, że dogłębnie przeanalizował dowody interesujących go własności tak, że mógł wyabstrahować najważniejsze ich elementy i kroki.

Praca jest napisana solidnie, wyliczenia są precyzyjne. Elementy dowodów i wyliczeń, kolejne kroki są przejrzyście przedstawione. Pomimo tego autor nie uniknął pewnych drobnych błędów czy to terminologicznych, językowych czy też pomyłek w oznaczeniach.

Uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wszystkie wymagania ustawowe i wnioskuję o dopuszczenie mgr Artura Zająca do dalszych etapów przewodu doktorskiego.