prof. Andrzej Kisielewicz
Uniwersytet Wrocławski

Ocena rozprawy habilitacyjnej oraz dorobku naukowego

dr Konrada Pióro

Dr Konrad Pióro jest autorem 26 prac opublikowanych pismach o zasięgu międzynarodowym (25 wyłącznego autorstwa i jedna z trzema współautorami). Jego rozprawa doktorska dotyczyła związków grafu unarnej algebry częściowej z kratą jej słabych podalgebr i podobna jest tematyka, chociaż odpowiednio rozszerzona, przedłożonej rozprawy habilitacyjnej zatytułowanej *Hipergrafowe podejście do krat podalgebr algebry częściowej.* Rozprawa jest zestawem 7 prac:

(P1) *On connections between hypergraphs and algebras.* Arch. Math. (Brno) 36 (2000), no. 1, 45–60.

(P2) *Some properties of the weak subalgebra lattice of a partial algebra of a fixed type.* Arch. Math.(Brno) 38 (2002), no. 2, 81–94.

(P3) *On the subalgebra lattice of unary algebras.* Acta Math. Hungar. 84 (1999), no. 1-2, 27–45.

(P4) *On some unary algebras and their subalgebra lattices.* Math. Slovaca 56 (2006), no. 3, 255–273.

(P5) *A property of the weak subalgebra lattice for algebras with some non-equalities.* Kyungpook Math. J. 50 (2010), no. 2, 195–211.

(P6) *An example of a quasigroup with a distributive subquasigroup lattice.* Results Math. 58 (2010), no. 1-2, 55–67.

(P7) *Hypergraphs induced by algebras of fixed type. Discrete Math.* 311 (2011), no. 16, 1735–1753.

Krata podalgebr $S(A)$ algebry A była przedmiotem pewnych badań w początkowym okresie rozwoju algebry ogólnej i teorii krat. W szczególności, już w 1948 Birkhoff i Frinke pokazali, że klasa takich krat tożsama jest z klasą krat algebraicznych (zupełnych i takich, w których każdy element jest sumą elementów zwartych). W 1967 roku Jonsson i Seifer udowodnili, że ograniczając się do algebr unarnych, na to aby krata L była izomorficzna z kratą podalgebr unarnej algebry potrzeba i wystarcza, żeby była algebraiczna, dystrybutywna i każdy element był kresem górnym zbioru elementów kompletnie $\vee$-nieredukowalnych. Dr Pióro w swoich badaniach próbuje uzyskać dokładniejsze rezultaty na temat krat podalgebr, najpierw algebr unarnych, później algebr dowolnego typu, odwołując się do pewnego naturalnego związku algebr unarnych (pełnych i częściowych) z grafami.

Algebra unarna (zarówno pełna jak i częściowa) może być traktowana w naturalny sposób jako graf skierowany z krawędziami oznaczonymi symbolami operacji algebry. Pojęcie podalgebry nie zależy przy tym od oznaczeń krawędzi, więc przy rozważaniu podalgebr można od nich abstrahować i oznaczyć symbolem $D(A)$ graf skierowany (bez oznaczeń krawędzi) algebry unarnej A. Jeśli teraz przez $S(A)$ oznaczymy kratę podalgebr algebry A, to oczywiste jest, że dla dwóch algebr unarnych A i B, jeśli ich grafy $D(A)$ i $D(B)$ są izomorficzne, to kraty podalgebr $S(A)$ i $S(B)$ są izomorficzne, ale z izomorfizmu krat nie wynika izomorfizm grafów. Można postawić pytania: co wynika z izomorfizmu $S(A) \cong S(B)$ dla grafów? czy ten algebraiczny warunek da się wyrazić w terminach grafów $D(A)$ i $D(B)$? czy w terminach grafów można scharakteryzować relację $L \cong S(A)$ pomiędzy kratami i algebrami? Innymi słowy, czy ów naturalny związek z grafami da się wykorzystać do lepszego zrozumienia struktury kraty podalgebr?

Pytanie to podjął dr Pióro w pracach (P3) i (P4). W pierwszej z nich pokazał, że (dla krat spełniających warunki konieczne wskazane przez Jonssona i Seifera) $L \cong S(A)$ wtedy i tylko wtedy gdy pewien naturalny porządek częściowy związany z grafem skierowanym $D(A)$ algebry A jest izomorficzny z porządkiem na elementach kompletnie $\vee$-nieredukowalnych kraty L. Jeśli ten ostatni porządek spełnia pewien warunek skończoności, wówczas kratę L autor nazywa *normalną*, a także odpowiadające jej grafy i algebry, i dla takich „normalnych" obiektów dowodzi w (P4), że $L \cong S(A)$ wtedy i tylko wtedy gdy pewne grafy skonstruowane (w sposób bardziej skomplikowany) z L i z $S(A)$ są izomorficzne. Przy pomocy podobnych warunków dotyczących izomorfizmu pochodnych porządków i grafów charakteryzuje też izomorfizm krat podalgebr $S(A) \cong S(B)$. Niestety warunki są dość techniczne, a nazwanie rozważanych obiektów „normalnymi" nie bardzo uzasadnione. Na podstawie uzyskanych rezultatów nie da się powiedzieć, że rozważane warunki algebraiczne dotyczące kraty podalgebr wyrażają się naturalnie lub prościej w terminach grafów. Rezultaty te sprawiają raczej wrażenie technicznych lematów, które na razie nie mają konkretnych zastosowań. W pracy (P4) znajdujemy jeszcze pewną charakteryzację par krat L i K takich, że istnieje algebra unarna A o tej własności, że L jest izomorficzna z $S(A)$, a K jest izomorficzna z $S_w(A)$ kratą słabych podalgebr A. Charakteryzacja odwołuje się do podobnych technicznych pojęć i nie bardzo rozjaśnia całe zagadnienie. Bez wejścia w techniczne definicje trudno ją tu opisać. Niemniej próba zgłębienia naturalnych związków między algebrami unarnymi i grafami wydaje się podejściem matematycznie naturalnym i prawidłowym. Niestety otrzymane rezultaty są rozczarowujące.

W pracach (P1) i (P2) habilitant podejmuje próbę uogólnienia tego związku na algebry częściowe dowolnego typu. Rozbudowana terminologia i notacja, formułowanie każdego prostego faktu jako twierdzenia (*Proposition*) utrudnia dostrzeżenie i zrozumienie, że mamy do czynienia z dość prostym uogólnieniem, w którym większość rezultatów ma charakter oczywisty. Spróbuję streścić pracę (P1), bo jest ona charakterystyczna dla całej twórczości dr Pióro i stanowi jej podstawę.

Dla danej częściowej algebry A rozważamy wszystkie pary $\langle (a_1, \dots, a_n), b\rangle$ złożone z n-ki $(a_1, \dots, a_n)$ i obrazu b tej n-ki przez operację fundamentalną f algebry A odpowiadające równości $f(a_1, \dots, a_n) = b$ (o ile na danej n-ce operacja jest określona). Taki multizbiór (bo takie same pary mogą powstać dla dwóch różnych operacji fundamentalnych) autor nazywa *algebraicznym hipergrafem*. Ignorujemy w ten sposób podział na różne operacje, ale zachowujemy własność pozwalającą odtworzyć podalgebry (i ich kratę). Można nawet zapomnieć o porządku n-ki zastępując ją zbiorem $\{a_1, \dots, a_n\}$. Multizbiór takich par $\langle \{a_1, \dots, a_n\}, b\rangle$ autor nazywa *skierowanym hipergrafem*. I wreszcie można n-zbiór i wynik b złączyć w jeden zbiór $\{a_1, \ldots, a_n, b\}$ – wówczas multizbiór tak otrzymanych zbiorów autor nazywa *hipergrafem* związanym z algebrą A. Ten hipergraf nie zachowuje już podalgebr i jego związek z kratą podalgebr nie jest bezpośredni, ale zachowuje *słabe podalgebry* algebr częściowych, bo te są zdeterminowane właśnie poprzez zbiory $\{a_1, \ldots, a_n, b\}$ odpowiadające wybranym równościom $f(a_1, \ldots, a_n) = b$.

Autor zużywa 6 stron na opisanie tego w bardziej formalnej terminologii, a oczywiste fakty o zachowywaniu odpowiednich podalgebr sformułowane są w mało czytelnym języku symbolicznym (Twierdzenie 2.10) i cała strona druku poświęcona jest formalnemu dowodowi tego twierdzenia. Dopiero wtedy, w kolejnym rozdziale można znaleźć definicje podalgebr różnych rodzajów, i definicje hipergrafów dla danych algebr, żeby zobaczyć, że wszystko to polega na stopniowym ignorowaniu kolejnych elementów struktury algebry, tak żeby zachować własność podzbioru bycia podalgebrą (ignorujemy tylko taką część struktury algebry, żeby nadal móc mówić o podalgebrach, chociaż teraz nazywamy je podhipergrafami).

Dość naturalnie można przenieść również pojęcie typu algebry. Jeśli przez typ algebry rozumieć ciąg wskazujący ile jest operacji fundamentalnych danej arności, to w hipergrafie (algebraicznym lub skierowanym) będzie to opowiadało maksymalnej ilości różnych obrazów związanych z danymi n-kami lub n-zbiorami. Oczywiste jest, że dla hipergrafu danego typu istnieje algebra odpowiedniego typu mająca taki właśnie hipergraf. Jest to Twierdzenie 3.3, które dzięki niepotrzebnej komplikacji (różnym formom definicji typów dla algebry i dla hipergrafu) ma w pracy (P1) półstronicowy formalny dowód. Kolejne oczywiste Twierdzenie 3.8 mówi o tym, że tak dobrane hipergrafy, przy tak dobranych definicjach, mają takie same kraty algebr różnych rodzajów co wyjściowe algebry – ja to ująłem już wyżej jako taki naturalny dobór struktury hipergrafów, żeby tak właśnie było. Jedno z głównych (bo zapowiadane w abstrakcie) twierdzeń (Twierdzenie 3.13) mówi, że jeśli dwa nieskierowane hipergrafy są izomorficzne, to nie tylko ich kraty słabych podalgebr (podhipergrafów) są izomorficzne, ale i odwrotnie: z izomorfizmu krat słabych podhipergrafów można wywnioskować izomorfizm nieskierowanych hipergrafów. To twierdzenie nie jest całkiem oczywiste, mówi że w przeciwieństwie do kraty zwykłych (silnych) podalgebr, krata słabych podalgebr $S_w(A)$ determinuje strukturę nieskierowanego hipergrafu $H(A)$ odpowiadającego algebrze – ale w sumie nie jest to nic zaskakującego. Rzecz w tym, że w świetle definicji prawie każdy podzbiór wierzchołków i krawędzi jest słabą podalgebrą, i w szczególności krata tych podalgebr zawiera kopie zbioru wierzchołków i kopię zbioru krawędzi, więc determinuje hipergraf. Krata słabych podalgebr $S_w(A)$ to struktura, która w przeciwieństwie do kraty podalgebr $S(A)$, zawiera dużo informacji o samej algebrze, więc nic dziwnego, że można o niej dowieść bez trudu różne twierdzenia, których nie da się (tak łatwo albo w ogóle) udowodnić dla kraty podalgebr.

W szczególności, Twierdzenie 3.16 stwierdza, że dla ustalonej kraty L, krata słabych podalgebr $S_w(A)$ algebry częściowej A jest izomorficzna z L wtedy i tylko wtedy gdy istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmu) hipergraf H taki że $S_w(H) \cong L$. Jest to reminiscencją (innym ujęciem, powtórzeniem) wspomnianych już wyników. Główną częścią tego twierdzenia, na pierwszy rzut oka, wydaje się charakteryzacja z punktu (d) mówiąca, że L jest taką kratą wtedy i tylko wtedy gdy:

(a) jest algebraiczna i dystrybutywna,
(b) każdy element jest kresem górnym zbioru elementów $\vee$-nieredukowalnych,
(c) każdy niezerowy $\vee$-nieredukowalny element zawiera jedynie skończony, ale niepusty zbiór atomów,
(d) zbiór niezerowych i nieatomowych $\vee$-nieredukowalnych elementów tworzy antyłańcuch.

Jest to jednak jedynie przypomnienie charakteryzacji autorstwa W. Bartola [Comment. Math. Univ. Carolinae 31 (1990), 405-410]. Ta charakteryzacja na taką nazwę rzeczywiście zasługuje. Jest analogonem klasycznych charakteryzacji wspomnianych na wstępie, chociaż ze względu na wspomnianą bogatą strukturę kraty słabych podalgebr otrzymuje się ją dużo łatwiej niż charakteryzacje klasyczne. Wspominam o tym, bo ten rezultat Bartola stanowi punkt wyjścia dla wielu prac dra Pióro, w których skupił się właśnie na algebrach częściowyych i kratach słabych podalgebr.

Ostatnie dwie strony pracy (P1) stanowią już właściwie rozpoczęcie pracy (P2). Autor zauważa, że (zgodnie z rezultatem Bartola) krata słabych podalgebr $S_w(A)$ zawiera też w pewnym sensie kopię definiowanego przez autora hipergrafu algebry A (fakt ten przewija się zresztą w dowodach wcześniejszych). W związku z tym, dla dowolnej kraty L spełniającej warunki Bartola można zdefiniować łatwo hipergraf $U(L)$. Zdeterminowany jest on przez atomy i elementy $\vee$-nieredukowalne w L. (Wcześniej autor stwierdził, że taki hipergraf wyznaczony jest jednoznacznie przez $L \cong S_w(A)$, teraz wskazuje jak go odtworzyć z L; Twierdzenie 3.18). Gdy się już zauważy, że taki hipergraf można wyznaczyć wprost z L, wyłania się możliwość scharakteryzowania krat słabych podalgebr algebry częściowej ustalonego typu. Sformułowane jest odpowiednie twierdzenie pomocnicze (Proposition), a dalszy ciąg jest w pracy (P2).

Praca (P1) oprócz wskazanych twierdzeń (Theorems) zawiera jeszcze mnóstwo twierdzeń pomocniczych (Propositions). Wiele rezultatów powtarzanych jest w różnych wersjach. Całość sprawia wrażenie językowych gier (przeformułowywania różnych rezultatów), nadmiernie sformalizowanych rozważań, w których trudno się zorientować i odnaleźć cele tych gier. Powyższe streszczenie kosztowało mnie sporo wysiłku, żeby się w tym gąszczu symboliki i dziesiątków formalnych rezultatów zorientować, i żeby w końcu dojść do wniosku, że sprawy są stosunkowo proste i mogłyby być przejrzyście sformułowane. W abstrakcie autor pisze, że celem pracy jest otrzymanie nowego języka „bardzo użytecznego w badaniu krat podalgebr częściowych i pełnych algebr". O ile ze stwierdzeniem, że jest to próba stworzenia nowego języka mogę się zgodzić, to nie bardzo widzę jego szczególną użyteczność (dla algebr pełnych). Na dodatek uważam, że autor stworzył nowy język stanowczo przeformalizowany, a więc nie służący rozjaśnianiu spraw, lecz ich gmatwaniu.

Tu zwrócę uwagę, że pojęcia różnych hipergrafów, tak jak je autor definiuje, nie są typowe w literaturze. Generalnie, hipergrafami nazywamy po postu rodziny podzbiorów danego zbioru i nazwy tej używamy, gdy rozważamy zagadnienie analogiczne to zagadnień teorii grafów. Tymczasem zdefiniowane przez autora hipergrafy skierowane i algebraiczne to po prostu zdegenerowane algebry częściowe, i nie wiadomo mi, żeby ktoś takich pojęć używał wcześniej (autor też w żadnej ze swoich prac na to nie wskazuje). Użycie nazwy hipergraf, tak jakby to było przejście do innej teorii, jest więc nieco mylące. Z kolei hipergraf nieskierowany to multihipergraf występujący w literaturze raczej doraźnie (na potrzeby konkretnego zagadnienia). Zresztą autor używa wyłącznie *terminologii* hipergrafów. Żadnych znanych rezultatów związanych z hipergrafami, ani z grafami, w pracach swoich nie stosuje.

Praca (P2) podejmuje próbę charakteryzacji krat słabych podalgebr $S_w(A)$ dla algebr A ustalonego typu. Wspomniane twierdzenie pomocnicze w (P1) jest przeformułowaniem zagadnienia na język algberaiczynch hipergrafów. Dalej autor przeformułowuje to na język skierowanych hipergrafów – trudnością jest tu to, że zapomnienie o uporządkowaniu n-ki powoduje konieczność uwzględnienia różnych możliwości uporządkowania n-zbioru w typie, co prowadzi do dość oczywistej zależności kombinatorycznej pomiędzy typem algebraicznego hipergrafu i typem skierowanego hipergrafu. Dalej, wykorzystanie faktu, że nieskierowany hipergraf pochodzi od algebry pozwala na scharakteryzowanie takich hipergrafów przez rodzinę podhipergrafów odpowiadającą rodzinie operacji fundamentalnych algebry, a więc takich, dla których moce krawędzi (zbiorów) mogą wynosić tylko k lub $k+1$ dla pewnego k. Takie hipergrafy możemy nazywać $(k, k+1)$-hipergrafami. Praca zawiera jeszcze pewne warunki konieczne i warunki wystarczające, które jednak się nie domykają. Te wszystkie rezultaty ciągle sprawiają wrażenie jedynie mniej lub bardziej głębokich przeformułowań językowych.

Kontynuacją (P2) jest praca (P7), gdzie w świetle wskazanych wyżej rezultatów zadanie charakteryzacji sprowadza się do wykazania kiedy nieskierowany hipergraf da się przekształcić (zorientować) w skierowany hipergraf danego typu. Po pierwsze autor zauważa, że możliwe to jest wtedy i tylko wtedy gdy każdy skończony słaby (lub relatywny) podhipergraf da się zorientować w ten typ (Twierdzenie 2.1). Wynik nie jest trudny, stosuje rutynową indukcję pozaskończoną, ale w świetle innych rezultatów autora, jest istotny i przejrzysty. Dalej problem rozbity jest na dwa różne przypadki: typu skończonego i nieskończonego. Dla typu skończonego warunkiem koniecznym i dostatecznym na to żeby nieskierowany $(k, k+1)$-hipergraf dał się zorientować w typ $\langle m\rangle$ jest, żeby dla każdego słabego podhipergrafu liczba krawędzi nie przekraczała m razy wziętą ilość potencjalnych k-podzbiorów. Warunek jest oczywiście konieczny, natomiast dostateczność wymaga nietrywialnego dowodu indukcyjnego. W przypadku typu nieskończonego rozważania są bardziej skomplikowane, ale też bardziej skomplikowana i techniczna jest „charakteryzacja" odwołująca się do istnienia operatora domknięcia o odpowiednich własnościach.

Spójrzmy na ostateczny wynik w przypadku typu skończonego, bo dopiero to, a nie dziesiątki rezultatów nazwane twierdzeniami zasługuje na miano osiągniętego rezultatu. Mówi on (gdyby został sformułowany), że dla ustalonego typu τ krata $L \cong S_w(A)$ dla pewnej algebry częściowej A wtedy i tylko wtedy gdy

(1) spełnia warunki Bartola,
(2) hipergraf $U(L)$ (wyznaczony przez atomy i elementy $\vee$-nieredukowalne w L) da się rozłożyć na rodzinę $\{H_k\}_{k\in N}$ $(k, k+1)$-podhipergrafów typu $T(\tau)_k$, (gdzie T jest pewną funkcją o kombinatorycznym charakterze),
(3) liczba krawędzi w każdym podhipergrafie H_k nie przekracza $m \cdot U(H_k)$ (gdzie $U(H_k)$ oznacza ilość k-podzbiorów zawartych w krawędziach H_k).

Większość poprzednich twierdzeń, to lematy, twierdzenia pomocnicze do uzyskania tej właśnie charakteryzacji. (P1), (P2), (P7), mogłyby więc być przekształcone w jedną pracę, którą moim zdaniem można by łącznie znacznie skrócić, i uczynić bardziej przejrzystą. Jako taka nadawałyby się na (dobrą) rozprawę doktorską, w której systematyczne badanie umożliwiło osiągnięcie wyznaczonego celu: scharakteryzowania krat słabych podalgebr algebr częściowych.

Zauważmy, że sposobów rozłożenia hipergrafu w punkcie (2) może być wiele (każda krawędź mocy k może być zaliczona albo do H_k albo do H_{k+1}), co osłabia wartość tej charakteryzacji. Słabym punktem rezultatu jest również to, że dotyczy on kraty $S_w(A)$ słabych podalgebr, która nie wydaje się matematycznie zbyt interesująca; nie była przez nikogo innego badana i nie bardzo widać, do czego mogłaby być zastosowana. Niemniej można to uznać za wynik satysfakcjonujący, wart jednej solidnej pracy.

w pracy (P5) znajdujemy uogólnienie rezultatu dla algebr unarnych opublikowanego przez autora w 1998 w *Algebra Universalis*, zgodnie z którym krata słabych podalgebr lokalnie skończonej (pełnej) algebry unarnej wyznacza jednoznacznie kratę (silnych) podalgebr. Obecnie autor pokazuje, że to samo można udowodnić dla lokalnie skończonej algebry pełnej A dowolnego skończonego typu, ale o dodatkowej własności takiej, że wartość każdej n-arnej operacji fundamentalnej na dowolnej n-ce jest różna od elementów tej n-ki. Sam fakt, jak już wcześniej napisałem, jest spodziewany, bo krata słabych podalgebr zawiera dużą informację o algebrze, znacznie większą niż krata (silnych) podalgebr. Nie znaczy to, że dowód jest łatwy. Wymaga kombinatorycznego wydobycia tych elementów kraty słabych podalgebr, które o tym przesądzają. Autor nawiązuje oczywiście do poprzednich rezultatów, z których wynika, że wystarczy zająć się sprawdzeniem, jak można przeorientować krawędzie hipergrafu skierowanego. W przeciwieństwie do zwykłych digrafów (przypadek algebry unarnej), przeorientowanie można tu zrobić na wiele sposobów i to jest zasadniczy przedmiot rozważań w (P5). Problemem jest czy wspomniana dodatkowa własność jest tu istotna. Wydaje się, że nie, ale pozostaje to (niestety) jako problem otwarty, a rezultat (P5) jest w ten sposób rezultatem częściowym.

I wreszcie ostatnia praca (P6) jest być może najciekawszą pracą w zestawie (i nieco odstającą tematycznie). Autor dowodzi w niej, że jeśli skończenie generowalna quasigrupa (lub ogólniej algebra mająca odpowiednią kwasigrupową własność), skończona lub spełniająca warunek łańcuchów zstępujących (*DCC condition*), ma dystrybutywną kratę podalgebr, to jest cykliczna (generowana przez jeden element). Jest to analogon klasycznego rezultatu O.Ore dla grup i uogólnienie własnego wcześniejszego rezultatu (P9). Ważniejszą częścią pracy jest konstrukcja nieskończonej niecyklicznej dwu-generowanej quasigrupy z dystrybutywną kratą podalgebr, pokazujący, że przypadek quasigrup jest jednak inny i bardziej skomplikowany niż przypadek grup. Co do stosowanej techniki, idei i kierunku badań pracę tą można zaliczyć do typowych prac dobrego nurtu algebry uniwersalnej.

*

Pozostały dorobek naukowy habilitanta składa się z 19 prac (co jest sporą ilością jak na zwyczajowe wymagania), niestety wiele tych prac ma charakter przyczynków. Ponieważ mimo tego uważam, że ten dorobek można uznać za wystarczający jako dodatkowy dorobek do rozprawy habilitacyjnej, wskażę tylko jego najciekawsze punkty. Są to wspomniane w omówieniu rozprawy habilitacyjnej prace (P9) o skończonych quasigrupach z rodzielną kratą podalgebr, (P11), (P12) i (P26) o częściowych algebrach unarnych, w których krata słabych podalgebr determinuje kratę (silnych) podalgebr, i (P27) stanowiąca punkt wyjścia do prac (P1) i (P2). Prace (P20-P25) zawierają różne rezultaty częściowe dotyczące algebr częściowych i ich krat podalgebr, szczególnie kraty słabych podalgebr.

Szczególną pracą w dorobku K. Pióro, i to z różnych względów, jest praca (P13) [W. Bartol, J. Miró, K. Pióro, F. Rosselló, F., *On the coverings by tolerance classes*, Inform. Sci. 166 (2004), 193–211]. Autor nie poświęca jej specjalnej uwagi w swoim autoreferacie, chociaż jest to właściwie jedyna cytowana praca w jego dorobku. Praca dotyczy relacji zwrotnych i symetrycznych zwanych *tolerancjami*, a w szczególności zbiorów wyznaczonych przez elementy będące w relacji z ustalonym elementem, zwanych *klasami* tolerancji. Autorzy rozważają problem kiedy dowolne pokrycie zbioru bazowego jest zbiorem klas tolerancji i kiedy takie pokrycie jest zbiorem klas więcej niż jednej tolerancji. Nawiązują tu do analogicznego problemu dla *bloków* tolerancji i jako motywację wskazują zastosowania pojęcia tolerancji w teorii zbiorów rozmytych. Same rozważania mają dość elementarny charakter z punktu widzenia matematyki, jednakże bardzo wysoka wzajemna cytowalność w dziedzinie zbiorów i logik rozmytych powoduje, że pismo *Information Sciences* ma bardzo wysoki *impact factor*, a w związku z tym wysoką punktację na liście ministerialnej czasopism. Sama praca (P13) ma 21 cytowań według bazy *Web of Science*. Odnotować trzeba też, że jest to jedyna praca K. Pióro ze współautorami i jedyny ślad w jego dorobku współpracy z innymi badaczami.

*

Podsumowując, głównym tematem badawczym w dorobku dr Pióro są kraty podalgebr algber częściowych, szczególnie krata słabych podalgebr, a główną metodą - użycie nowego wypracowanego przez siebie języka nawiązującego do języka hipergrafów. Trzeba stwierdzić, że jest to tematyka izolowana i marginalna, czego znamiennym dowodem jest to, że autor cytuje głównie pozycje książkowe, nie nawiązuje praktycznie do żadnych współczesnych badań poza swoimi własnymi, znaczną część prac publikuje w słabych niszowych pismach, a bazy danych wykazują tylko jedno cytowanie prac K. Pióro innych niż współautorska praca w *Information Sciences*.

W pracach poświęconych tej tematyce, i w większości dorobku naukowego K. Pióro, razi nadmierny formalizm, wielokrotne formułowanie faktów mających charakter językowych przeformułowań, brak odpowiedniego wyeksponowania głównych rezultatów i celów pracy, ukrywanie prostych idei za nadmiernie rozbudowaną terminologią. Takie podejście budzi wrażenie, że chodzi tylko o zwiększenie objętości prac (i że nie zostały one solidnie zrecenzowane).

Wbrew temu, co sugeruje autor, nie wydaje się, aby krata słabych podalgebr znalazła jakiekolwiek zastosowanie, na przykład, w bardziej znaczących nurtach algebry uniwersalnej. Warsztat badawczy habilitanta należy uznać za niedojrzały. Gdybym był opiekunem naukowym dr Konrada Pióro już dawno odradziłbym mu kontynuowanie tej tematyki. Można ją było potraktować jako dobry trening w badaniach matematycznych, ale w pewnym momencie należało się przerzucić na ciekawsze i mniej marginalne tematy. Trzeba było dążyć do konfrontowania swoich badań z pracami innych badaczy. Nie wiem czy nikt na Uniwersytecie Warszawskim nie zwrócił na to uwagi habilitantowi, czy też zwracano mu uwagę, a habilitant nie chciał słuchać.

Najciekawszym elementem przedłożonej rozprawy habilitacyjnej jest konstrukcja niecyklicznej kwasigrupy z dystrybutywną kratą podalgebr zawarta w pracy (P6), która wskazuje na pewien potencjał w twórczości dr Pióro i możliwości tworzenia lepszej matematyki. Prace (P3) i (P4) są próbą scharakteryzowania kraty podalgebr algebry unarnej przez odwołanie się do grafu skierowanego związanego z algebrą unarną. Rezultaty są niestety rozczarowujące: albo dość trywialne, albo nazbyt techniczne i częściowe, niewiele wnoszące do pogłębienia rozumienia kraty podalgebr algebr unarnych. Prace (P1), (P2) i (P7), jak już pisałem, mogłyby być przekształcone w jedną solidną rozprawę, której rezultatem jest charakteryzacja krat słabych podalgebr algebr częściowych. Chociaż temat jest marginalny i brakuje mu dobrej motywacji, to jest to konkretny, wymagający pewnego wysiłku intelektualnego rezultat. I wreszcie pracę (P5) o tym, że krata słabych podalgebr determinuje kratę podalgebr, wobec częściowego tylko rezultatu, trzeba ocenić jako element najmniej znaczący w całym zestawie.

Mamy zatem materiał na trzy, cztery przyzwoite publikacje, ale raczej bez szans na opublikowanie którejkolwiek z nich w bardzo dobrym czasopiśmie matematycznym. To samo w sobie budzi już wątpliwość, czy jest to materiał wystarczający na rozprawę habilitacyjną. Jeśli do tego dodać słaby, niedojrzały warsztat matematyczny, brak cytowań, brak współpracy nie tylko międzynarodowej, ale i krajowej, brak informacji o udziale w jakichkolwiek konferencjach, to niestety, moim zdaniem, konkluzja nie może być pozytywna. Muszę zatem stwierdzić, że w mojej opinii przedłożona rozprawa i dorobek naukowy nie spełniają ani zwyczajowych ani ustawowych wymagań stawianych osiągnięciom i dorobkowi naukowemu koniecznym do nadania stopnia doktora habilitowanego.

Wrocław, 12 stycznia 2013r. *Andrzej Kisielewicz*

Andrzej Kisielewicz