Opinia o rozprawie habilitacyjnej dra Marcina Bilskiego "*Aproksymacja algebraiczna w teorii osobliwości*"

Dr Marcin Bielski 11 lat temu obronił rozprawę doktorską pisaną pod opieką prof. P. Tworzewskiego. Wtedy miał w dorobku 3 prace z tym, że jedna dotyczyła teorii pólgrup a inna ukazała się w 2005 roku. W sumie opublikował 14 prac w dobrych czasopismach, z tego 7 złożyło się na habilitację. Według *MathSciNet* jego prace były cytowane 30 razy przez 13 autorów.

Dr Bielski jest kolejnym wychowankiem krakowskiej szkoły geometrii analitycznej. Ta szkoła wywodzi się w głównej mierze od badań rzeczywistych zbiorów semi-analitycznych i subanalitycznych zapoczątkowanych przez prof. S. Łojasiewicza. Początkowo istniał tylko preprint Łojasiewicza z IHES, ale pod koniec XX wieku J. Bochnak, M. Coste i M.-F. Roy opublikowali pierwszą monografię z tej dziedziny.

Tematyka rozprawy dra Bilskiego to aproksymacja podzbiorów analitycznych w $\mathbb{C}^n$ zbiorami algebraicznymi. Jak pisze w autorefereacie, przez dłuższy czas studiowano problem aproksymacji analitycznych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ zbiorami algebraicznymi; jednak okazało się, że rozwinięte metody można zastosować do przypadku zespolonego.

Istotnym nowym elementem w pracach składających się na habilitację jest fakt, że zbiory aproksymowane mogą mieć osobliwości. W tych pracach pojawiaja się też klasa pośrednia pomiędzy zbiorami analitycznymi i algebraicznymi, tzw. klasa zbiorów Nasha. Dokładniej, zbiory Nasha są sumami składowych nieprzywiedlnych zbiorów algebraicznych. W pracach dra Bilskiego aproksymacja jest często realizowana w dwóch krokach: najpierw mamy aproksymację zbiorami Nasha a potem zbiorami algebraicznymi, przy czym zwykle w przestrzeni o większym wymiarze. Ponadto, w przypadku osobliwych zbiorów analitycznych, aproksymacja zbiorami algebraicznymi (lub zbiorami Nasha) nie jest dosłowna; jest to aproksymacja w sensie łańcuchów analitycznych (ale chyba nie cykli, jak dr Bilski pisze w autoreferacie).

Mam świadomość, że tematy poruszane w rozprawie są ważne; nawiązują one do takich klasycznych wyników jak twierdzenie Stone'a–Weierstrassa i twierdzenie Rungego. Jednak miałem spore opory przy lekturze dostarczonych mi materiałów. Oczywiście, wszystko jest poprawne i ścisłe matematycznie; ponadto, dowody nie są zbyt wysublimowane. Jednak nieco brakło mi zarysowania głównych idei i oraz przykładów.

W pracach z *Constr. Approx.* (2012) i z *C. R. Acad. Sci. Paris* (2013) habilitanta dowodzi się istnienia algebraicznych aproksymacji (w sensie analitycznych łańcuchów) podzbiorów analitycznych X w $\Omega \times \mathbb{C}$, z właściwym rzutowaniem na obszar Rungego Ω. W pracy (z J. Adamusem) w *J. Math. Anal. Appl.* (2015) udowodniono chyba najsilniejsze twierdzenie o aproksymacji (w sensie łańcuchów) zbioru analitycznego X w obszarze Rungego Ω wzdłuż zadanego podzbioru Nasha $Y \subset X$, tzn. aproksymujące zbiory Nasha X_ν zawierają Y.

W pracach z *Math. Zeit.* (2007) i z *Bull. Sci. Math.* (2015) dr Bilski bada problem przybliżania kiełków (Y, a) zbiorów analitycznych kiełkami algebraicznymi (Y_ν, a) tak, aby rząd przybliżenia był dowolnie wysoki. Tutaj aproksymacja realizuje się w podzbiorach typu $B \times \mathbb{C}^k$ (gdzie B jest kulą w $\mathbb{C}^n$) i w sensie łańcuchów.

W przypadku, gdy zadadany zbiór analityczny nie jest zupełnym przecięciem, np., gdy liczba funkcji definiujących go jest większa niż jego kowymiar lub gdy posiada składowe nieprzywiedlne różnych wymiarów, to pojawiają się dodatkowe komplikacje techniczne. W pracy z *J. Math. Pure Appl.* (2008) dr Bilski podaje warunki na zbiór aproksymowny X i na jego ciąg aproksymujący X_ν, aby zachodziła zbieżność składowych nieprzywiedlnych $Y_\nu \subset X_\nu$ do odpowiednich składowych $Y \subset X$.

Dr Bilski opublikował jeszcze kilka innych prac po doktoracie. Niektóre z nich są związane z aproksymacjami, przy czym jedna z nich (z K. Ruskiem) używa tzw. struktur o-minimalnych. Jedna (z A. Parusińskim i G. Rondem), przyjęta w *J. Alg. Geometry*, zawiera uproszczony dowód twierdzenia Varchenki o topologicznej równoważności kiełków analitycznych funkcji i funkcji algebraicznych. Na uwagę zasługuje praca (z W. Kucharzem. A. Valette i G. Valette) w *Math. Zeit.* poświęcona (pre-)algebraicznym wiązkom wektorowym i ich klasom charakterystycznym. Pokazano, że prealgebraiczna wiązka staje się algebraiczną po jej 'cofnięciu' przy odpowiednim rozwiązaniu osobliwości bazy.

Konkluzja mojej recenzji jest pozytywna. Złożona dysetracja i ogólny doorobek habilitanta spełniają wszystkie kryteria dla tego typu rozpraw.

Henryk Żołądek

Uniwersytet Warszawski

HŻołądek

Warszawa, dn. 21 maja 2015 r.