Sylwester Zając - streszczenie pracy doktorskiej

Moja praca doktorska nosi tytuł „Geometryczna teoria funkcji w wypukłych obszarach tubowych i w dynamice operatorowej". Zajmuję się w niej następującymi dwoma zagadnieniami: „Geodezyjne zespolone w wypukłych obszarach tubowych" (rozdział 1) oraz „Operatory kompozycji na rozmaitościach Steina" (rozdział 2). Rozdział 1 bazuje na wynikach przedstawionych w artykułach [Zaj14a] oraz [Zaj14b], natomiast rozdział 2 oparty jest na wynikach zawartych w artykule [Zaj12].

W pierwszym rozdziale zajmuję się badaniem wypukłych obszarów tubowych z punktu widzenia geometrycznej teorii funkcji. Obszary tubowe w $\mathbb{C}^n$ to zbiory postaci $D = \Omega + i\mathbb{R}^n$, gdzie Ω jest obszarem w $\mathbb{R}^n$. Moje rozważania dotyczą *geodezyjnych zespolonych* w takich obszarach, tj. takich odwzorowań holomorficznych $\varphi : \mathbb{D} \to D$, dla których istnieje *lewa odwrotna*, czyli funkcja holomorficzna $f : D \to \mathbb{D}$ taka, że $f(\varphi(\lambda)) = \lambda$ dla $\lambda \in \mathbb{D}$ (przez $\mathbb{D}$ oznaczamy tutaj dysk jednostkowy w $\mathbb{C}$). Geodezyjne zespolone są fundamentalnymi obiektami badań w analizie zespolonej. Twierdzenie Lemperta, będące jednym z najważniejszych wyników w tej dziedzinie, związane jest właśnie z tym pojęciem: mówi ono, że w wypukłym obszarze w $\mathbb{C}^n$, nie zawierającym afinicznych prostych zespolonych, przez dowolne dwa punkty przechodzi pewna geodezyjna zespolona. Jego konsekwencją jest równość wszystkich odległości holomorficznie niezmienniczych w obszarach wypukłych.

Głównym wynikiem pierwszego rozdziału mojej pracy jest warunek równoważny na to, aby odwzorowanie holomorficzne φ było geodezyjną zespoloną dla wypukłego obszaru tubowego D. Punktem wyjścia dla moich rozważań był znany już od dawna warunek równoważny na geodezyjne zespolone w *ograniczonych* obszarach wypukłych w $\mathbb{C}^n$, autorstwa H. L. Roydena i P. M. Wonga [Roy-Won]. Zarówno w jego dowodzie, jaki i zastosowaniu, w sposób istotny korzystano z ograniczoności obszaru D pociągającej za sobą ograniczoność odwzorowań $\varphi : \mathbb{D} \to D$. Wspomniany warunek dawał bardzo dużo informacji o tzw. *granicach radialnych* geodezyjnej zespolonej φ (niejednokrotnie pozwalając na dokładne ich wyznaczenie), które z kolei wyznaczały tę geodezyjną jednoznacznie, w czym znów istotną rolę odgrywała jej ograniczoność. Przy próbie przejścia z wypukłych obszarów ograniczonych na wypukłe obszary tubowe (a więc nieograniczone) pojawiały się jednak niemałe trudności, zarówno z samym dowodem warunku, jak i z tym, że w tej sytuacji nieograniczoność ewentualnych geodezyjnych sprawiała, iż nawet wyznaczenie ich wartości radialnych nie dawało o nich samych zbyt wiele informacji. Mój pomysł polegał na tym, aby wartości radialne zastąpić przez tzw. *miary graniczne* odwzorowań holomorficznych. Jeżeli dany wypukły obszar tubowy D nie zawiera prostych zespolonych (zawsze możliwe jest zawężenie rozważań do takich obszarów), to każde odwzorowanie holomorficzne $\varphi : \mathbb{D} \to D$ ma miarę graniczną i, co jest bardzo ważne, miara ta wyznacza odwzorowanie φ jednoznacznie z dokładnością do stałej urojonej. Okazało się, że przy użyciu miar granicznych nie tylko jest możliwe sformułowanie (w języku teorii miary) warunku równoważnego na geodezyjną zespoloną w wypukłym obszarze tubowym przypominającego warunek znany z obszarów ograniczonych, ale dodatkowo warunek ten jest bardzo użyteczny przy wyznaczaniu dokładnych wzorów na wszystkie geodezyjne zespolone w dużej klasie wypukłych obszarów tubowych w $\mathbb{C}^n$. Korzystając z uzyskanego w ten sposób twierdzenia, w mojej pracy doktorskiej wyznaczam dokładne wzory na geodezyjne zespolone w tych obszarach tubowych w $\mathbb{C}^n$, które przez odwzorowanie $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (e^{z_1}, \ldots, e^{z_n})$ nakrywają pełne, ograniczone i pseudowypukłe obszary Reinhardta z usuniętymi osiami. Otrzymane formuły wykorzystuję następnie do wyznaczenia wzorów na odwzorowania ekstremalne dla funkcji Lemperta i pseudometryki Kobayashi'ego-Roydena w pełnych, ograniczonych i pseudowypukłych obszarach Reinhardta w $\mathbb{C}^2$.

W drugim rozdziale mojej pracy doktorskiej zajmuję się operatorami kompozycji (składania) na przestrzeniach $\mathcal{O}(\Omega)$ funkcji analitycznych na spójnej rozmaitości Steina Ω, wyposażonych w standardową topologię zbieżności niemal jednostajnej. Jeżeli $\varphi : \Omega \to \Omega$ jest odwzorowaniem holomorficznym, to *operatorem kompozycji* zadanym przez φ nazywamy operator $C_\varphi : \mathcal{O}(\Omega) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$. Rozważana tematyka leży na pograniczu analizy zespolonej i analizy funkcjonalnej, jednak metody, jakie stosuje się do jej zgłębiania, pochodzą już w dużej mierze z analizy zespolonej.

Moje badania skupiają się na pojęciu hipercykliczności operatora C_φ, tj. posiadaniu przez niego gęstej orbity. Zagadnienie to było już rozważane zarówno w przypadku jednowymiarowym, gdy Ω jest obszarem na płaszczyźnie zespolonej ([Gro-Mor]), jak i wielowymiarowym, dla pewnych bardzo szczególnych obszarów Ω lub odwzorowań φ (np. [Ber]). Spośród znanych wyników warto wspomnieć tu przede wszystkim o tych uzyskanych przez K. Grosse-Erdmana i R. Mortiniego w publikacji [Gro-Mor], którzy w jednej ze swoich prac rozważali sytuację jednowymiarową i podali (dla ogólniejszego problemu) warunek równoważny (dotyczący φ i Ω) na to, aby operator C_φ był hipercykliczny. W drugim rozdziale mojej pracy badam hipercykliczność C_φ dla dowolnej N-wymiarowej, spójnej rozmaitości Steina Ω i dowolnego odwzorowania holomorficznego $\varphi : \Omega \to \Omega$. Głównym twierdzeniem, jakie tam udowadniam, jest warunek równoważny na hipercykliczność, dotyczący odwzorowania φ i rozmaitości Ω i wyrażony w języku tzw. *otoczek holomorficznych* zbiorów zwartych. Chociaż stosowane przeze mnie metody są dość podobne do tych z pracy K. Grosse-Erdmanna i R. Mortiniego, to jednak otrzymany warunek znacząco się różni od tego uzyskanego przez nich dla obszarów jednowymiarowych. W mojej pracy uzyskuję też pewne wnioski ze wspomnianego twierdzenia. Przykładowo, pokazuję, że gdy rozmaitość Ω jest *c-skończenie zwarta*, to wspomniany warunek równoważny daje się uprościć do postaci takiej, jaka występuje w sytuacji jednowymiarowej, a każdy hipercykliczny operator C_φ jest automatycznie *dziedzicznie hipercykliczny* (co w ogólności jest własnością dużo mocniejszą).

Literatura

[Ber] L. Bernal-Gonzalez, *Universal entire functions for affine endomorphisms in* $\mathbb{C}^N$, J. Math. Anal. Appl. 305 (2005) 690-697.

[Gro-Mor] K.-G. Grosse-Erdmann, R. Mortini, *Universal functions for composition operators with non-automorphic symbol*, J. Anal. Math. 107 (2009), 355-376.

[Lem] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 427-474.

[Roy-Won] H.L. Royden and P.-M. Wong, *Carathéodory and Kobayashi metric on convex domains*, preprint (1983).

[Zaj12] S. Zając, *Hypercyclicity of composition operators in Stein manifolds*, preprint (2012), arXiv:1202.6638v3.

[Zaj14a] S. Zając, *Complex geodesics in convex tube domains*, przyjęte do druku w Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.

[Zaj14b] S. Zając, *Complex geodesics in convex tube domains II*, preprint (2014), arXiv:1406.0549.

Sylwester Zając