Prof. Arkadiusz Ploski

Katedra Matematyki

Politechnika Świętokrzyska

Al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7

25 – 314 Kielce

12 grudnia 2014 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani Anny Tatarczak pt. „ **Properties of orthogonal polynomials and typically real functions related to generalized Koebe function**"

Recenzowana praca napisana jest po angielsku, liczy 98 stron, w tym 8 stron zajmuje bibliografia, a pierwszych 27 stron streszczenie, wstęp i rozdział pierwszy będący zestawieniem używanych dalej pojęć i twierdzeń. Tematyka pracy związana jest z klasycznymi zagadnieniami funkcji jednej zmiennej zespolonej: głównym obiektem rozważań jest klasa $T^{p,q}$ funkcji holomorficznych w dysku jednostkowym uogólniająca przez wprowadzenie pary parametrów rzeczywistych p, q dobrze znaną w klasycznej teorii funkcji klasę funkcji typowo rzeczywistych. Z klasą $T^{p,q}$ związana jest w naturalny sposób uogólniona funkcja Koebego $k_{p,q}$ oraz wielomiany trygonometryczne $U_n\,(p,q\,;e^{i\theta})$ $T_n(p,q\,;\,e^{i\theta})$ będące odpowiednikiem wielomianów Czebyszewa 2-ego i 1-go rodzaju. W mniejszym stopniu związane z głównym tematem pracy są uogólnione wielomiany Meixnera – Pollaczka, którym Autorka poświęciła odrębny rozdział pracy. Przedstawiona rozprawa jest oparta na artykułach już opublikowanych bądź wysłanych do druku cytowanych w rozprawie jako [75], [76], [77], [104] (wyniki uzyskane z innymi autorami) oraz [148] (praca samodzielna oddana do druku). Ponieważ rozdział pierwszy jest powtórzeniem rzeczy znanych, dokładniejszy opis rozprawy rozpocznę od rozdziału drugiego. Poświęcony jest on uogólnionej funkcji Koebego $k_{p,q}$ określonej wzorem $k_{p,q}(z) = \frac{z}{(1-pz)(1-qz)}$ dla $|z| < 1$. Główne rezultaty przedstawione w tym rozdziale to opis obrazu dysku jednostkowego przez funkcję $k_{p,q}$, wyznaczenie maksimum i minimum funkcji Re $k_{p,q}$, wyznaczenie maksimum $|Im\, k_{p,q}|$ na okręgu $|z| = 1$. Pochodzą one z pracy [77] napisanej wspólnie z Promotor, jeszcze nie opublikowanej.

Rozdział trzeci rozprawy dotyczy wspomnianych wyżej uogólnionych wielomianów Czebyszewa. Udowodnione są relacje rekurencyjne dla tych wielomianów, równania różniczkowe, relacje ortogonalności, a także inne własności znane w przypadku klasycznym. Rezultaty te pochodzą z pracy [104], której Doktorantka jest współautorką razem z I. Naraniecką i J. Szynalem oraz z samodzielnej pracy [148].

Rozdział czwarty rozprawy poświęcony jest badaniu wspomnianej wyżej klasy $T^{p,q}$. Składa się ona z funkcji holomorficznych $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ dopuszczających reprezentację całkową $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z}{(1-e^{i\Theta}pz)(1-e^{-i\Theta}qz)} d\mu(\Theta)$,

gdzie $\mu(\Theta)$ jest miarą probabilistyczną na przedziale $[0, 2\pi]$

Gdy $p = q = 1$ klasa $T^{1,1}$ jest identyczną z dobrze znaną klasą funkcji typowo rzeczywistych. Jądro całki definiującej $T^{p,q}$ jest funkcją tworzącą dla wielomianów trygonometrycznych $U_n\,(p, q\,; e^{i\theta})$, które zostały zbadane w rozdziale trzecim. Główne twierdzenia, o klasie $T^{p,q}$ dotyczą obszaru lokalnej jednolistności, oszacowań promienia jednolistności oraz problemu współczynników. Są one przedstawione w drugiej części rozdziału (strony 68-74 rozprawy) i pochodzą z pracy [104] napisanej wspólnie z I. Naraniecką i J. Szynalem.

Pierwsza część rozdziału czwartego dotyczy klasy $P^{p,q}$ będącej uogólnieniem znanej klasy Caratheodoriego. Klasa ta jest ściśle związana z klasą $T^{p,q}$. Jeżeli $f \in T^{p,q} to\ \frac{1-pqz^2}{z} f(z) \in P^{p,q}$ i odwrotnie (por. theorem 4.2, p.57). Rezultaty dotyczące klasy $P^{p,q}$ pochodzą z pracy [77] napisanej wspólnie z Promotor pracy.

Rozprawę kończy rozdział piąty poświęcony uogólnieniu znanych w literaturze wielomianów Meixnera – Pollaczka. Jest on niemal identyczny z pracą [76] opublikowaną wspólnie z Promotor rozprawy. Autorki definiującą tam wspomniane wyżej wielomiany w terminach funkcji tworzącej, a następnie dowodzą relacji rekurencyjnej, reprezentacji hipergeometrycznej i równania różniczkowego dla tych wielomianów. Dowodzą też ortogonalności tych wielomianów.

Jak widać z powyższego przeglądu uzyskanych wyników przedstawiona rozprawa dotyczy problematyki kiedyś popularnej wśród matematyków zajmujących się teorią funkcji zespolonych jednej zmiennej i teorią funkcji specjalnych. Metoda intensywnie stosowana w rozprawie jest standardowa i polega na uogólnianiu zbadanych dobrze klas funkcji przez wprowadzenie parametrów. **Mimo, że praca nie przynosi wyników, które można**

by uznać za zaskakujące, jest ona przykładem poprawnej roboty matematycznej spełniającej warunki ustawowe uzyskania stopnia doktora nauk matematycznych.

Szkoda tylko, że Autorka kompilując już opublikowane prace nie zadbała o lepszą redakcję rozprawy – np. w tytule rozdziału trzeciego traktującego o wielomianach typu Czebyszewa pojawia się klasa $T^{p,q}$ zdefiniowana dopiero w rozdziale następnym, zdanie otwierające rozdział drugi jest niezrozumiałe, rozdział pierwszy poświęcony preliminariom nie jest dalej właściwie wykorzystany (brak odsyłaczy do preliminariów). Język angielski pracy również pozostawia do życzenia (szczegółowe uwagi przekazałem bezpośrednio Doktorantce). W sumie są to drobne usterki ale powodują, że tekst nie jest przyjazny dla czytelnika. Przyjmując, że udział doktorantki w pracach, z których składa się rozprawa jest taki jak udział pozostałych współautorów (a więc 50% przy dwóch i 33.3% przy trzech autorach) **uważam, że uzyskane wyniki dają podstawę do przyjęcia przedstawionej rozprawy jako dysertacji doktorskiej i wnioskuję o dopuszczenie Pani mgr Anny Tatarczak do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Arkadiusz Płoski