Poznań, 14 lipca 2014 r.

Prof. dr hab. Ryszard Płuciennik
Instytut Matematyki
Wydział Elektryczny
POLITECHNIKA POZNAŃSKA
Piotrowo 3A
60-965 Poznań
e-mail: ryszard.pluciennik@put.poznan.pl

RECENZJA
rozprawy doktorskiej zatytułowanej
„Projekcje minimalne i absolutne stałe projekcji"
przedłożonej przez mgra Filipa Sokołowskiego

Motywacją do zajęcia się problematyką projekcji minimalnych było udowodnione w latach czterdziestych ubiegłego stulecia twierdzenie Kharshiladze-Łozińskiego o minimalności n-tej projekcji Fouriera L_n określonej na $C_0(2\pi)$ i o wartościach w przestrzeni wielomianów trygonometrycznych stopnia mniejszego lub równego n. Począwszy od połowy lat sześćdziesiątych, pojawiło się wiele prac poświęconych rozmaitym aspektom badań projekcji minimalnych. Mimo upływu czasu, teoria projekcji minimalnych od początku dwudziestego pierwszego wieku nie straciła na aktualności. Powstają wciąż nowe prace, w których rozważa się istnienie projekcji minimalnych, poszukuje się wzorów na projekcje minimalne, bada się ich jednoznaczność oraz poszukuje się oszacowań rozmaitych stałych projekcji.

Za cel rozprawy postawił sobie zarówno konstrukcję n-wymiarowych podprzestrzeni l_∞^N oraz l_1^N dla $n \leq N$, przy których relatywne i absolutne stałe projekcji są "odpowiednio duże", jak i efektywne znalezienie projekcji minimalnych na te podprzestrzenie.

Praca składa się z sześciu rozdziałów.

Rozdział pierwszy jest zatytułowany "Wstęp" Doktorant przedstawia w nim genezę omawianej tematyki, częściowo uzasadnia motywy jej podjęcia oraz podaje krótkie streszczenie rozprawy. Ponadto podaje zarówno podstawowe definicje pojęć występujących w rozprawie jak i ważniejsze twierdzenia, na które będzie powoływał się w dalszej jej części. Uważam, że byłoby lepiej, gdyby wstęp był umieszczony na początku pracy, natomiast preliminaria stanowiłyby treść rozdziału pierwszego.

W rozdziale drugim autor uogólnia wyniki L. Skrzypka i B. Shekhtmana zawarte w pracy cytowanej w rozprawie jako [38] i dotyczącej między innymi projekcji minimalnych z $\mathcal{C}(S)$ na span$[\mathbf{1}, x_1, x_2]$, gdzie S jest czworokątem wypukłym w $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}(S)$ jest przestrzenią funkcji ciągłych na S z naturalną normą, x_i $(i = 1, 2)$ jest projekcją na i-tą oś i $\mathbf{1}$ jest funkcją tożsamościowo równą 1. Doktorant zajmuje się projekcjami minimalnymi z $\mathcal{C}(S)$ na span$[\mathbf{1}, x_1, ..., x_n]$ w przypadku, gdy S jest wypukłym wielościanem w $\mathbb{R}^n$ o $(n + 2)$

wierzchołkach, natomiast x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ jest projekcją na i-tą oś. Za najważniejszy wynik rozdziału drugiego uważam opisanie sytuacji, w której norma projekcji minimalnej z $\mathcal{C}(S)$ na E jest maksymalna.

W rozdziale trzecim Autor zajmuje się absolutnymi stałymi projekcji λ_n^N z przestrzeni l_∞^N na izometryczną kopię w l_∞ n-wymiarowej przestrzeni V $(n \leq N)$. Przedstawia tu zależności między rozmaitymi stałymi projekcji. W dowodach otrzymanych twierdzeń wykorzystuje wyniki uzyskane przez B.L. Chalmersa i G. Lewickiego z pracy [7] i dotyczące związków między stałymi projekcji a sumą największych wartości własnych pewnych macierzy symetrycznych.

Rozdział czwarty i piąty poświęcony jest między innymi znajdowaniu efektywnych wzorów na projekcje minimalne z przestrzeni l_∞^N lub l_1^N na ich podprzestrzenie. Wykazuje się w nim, że wyznaczone projekcje nie są jedynymi. Ponadto Autor znajduje oszacowania z dołu różnych stałych projekcji oraz granic ciągów, w których wyrazami są stałe projekcji. Doktorant otrzymuje również dokładne wartości stałych projekcji w pewnych przypadkach szczególnych .

Ostatni szósty rozdział zawiera szereg przykladów macierzy i oszacowań związanych z nimi stałych. Uzyskuje się dolne ograniczenia absolutnej stałej projekcji λ_n^N (dokładniej stałej $\widetilde{\lambda}_n^N \leq \lambda_n^N$) dla $n = 4$ oraz N równego kolejno 7, 8, 9, 10 i 11, a także $n = 3$ i $N = 8$.

Rozprawa doktorska pana magistra Filipa Sokołowskiego z merytorycznego punktu widzenia jest bardzo dobra i stanowi znaczący wkład w rozwój teorii projekcji minimalnych. Wyniki w niej zawarte są oryginalne i głębokie. Jej logiczny i zwarty układ oraz precyzyjny sposób dowodzenia twierdzeń i lematów świadczą o wysokim poziomie profesjonalnym Autora.

Tematyka rozprawy jest bardzo dobrze osadzona w literaturze. Nawiązuje między innymi do wyników uzyskanych przez tak znanych matematyków jak H. Kőnig, B. Shekhtman, P.K. Lin, N. Tomczak-Jaegarmann, B.L. Chalmers i G. Lewicki.

Cel pracy został zrealizowany w rozdziałach od trzeciego do szóstego. Rozdział drugi nieco tematycznie odbiega od głównego nurtu, jednak nie na tyle daleko, aby należało go pominąć. Co więcej, uważam, że opisanie warunków, przy których norma projekcji minimalnej na podprzestrzeń funkcji afinicznych span$[\mathbf{1}, x_1, ..., x_n]$ z przestrzeni $\mathcal{C}(S)$ funkcji ciągłych określonych na wypukłym wielościanie $S \subset \mathbb{R}^n$ o $(n+2)$ wierzchołkach jest maksymalna jest bardzo ważne dla teorii, którą zajmuje się Doktorant. Warto podkreślić, że Autorowi udało się obliczyć efektywnie tę maksymalną wartość. Mimo, że w przypadku parzystego wymiaru wielościanu S (twierdzenie 2.8) mógł częściowo korzystać z idei zawartych we wspomnianej powyżej pracy L. Skrzypka i B. Shekhtmana cytowanej w rozprawie jako [38], to jednak uzyskanie tego rezultatu wymagało sporej pomysłowości. Przypadek nieparzystego wymiaru wielościanu S (twierdzenie 2.9) okazał się znacznie trudniejszym wyzwaniem, gdyż wymagał zupełnie nowego podejścia do zagadnienia. Sprostanie temu wyzwaniu świadczy bardzo dobrze o potencjale badawczym Autora niniejszej rozprawy.

Rozdziały czwarty i piąty łączy ten sam schemat postępowania. W rozdziale czwartym najpierw szacuje się stałą λ_{N-2}^N, następnie znajduje się projekcję minimalną z przestrzeni l_∞^N (odpowiednio l_1^N) na jej $(N-2)$-wymiarową podprzestrzeń, by w końcu wykazać, że nie jest ona jedyną projekcją minimalną. W rozdziale piątym powtarza się ten sam sposób postępowania w stosunku do stałej λ_{N-3}^{N}. Mam wątpliwość, czy rozpatrywanie przypadku $n = N - 2$ oraz $n = N - 3$ wymagało rzeczywiście rozbicia ich na osobne rozdziały. Z drugiej strony na korzyść Autora przemawia konieczność zastosowania dla $n = N - 3$ zupełnie innych technik dowodowych niż dla $n = N - 2$.

Praca zredagowana jest wzorowo. Zawiera bardzo nieliczne i mało istotne usterki typograficzne, których nawet nie warto wymieniać. Ponadto na stronie 7 w sformułowaniu twierdzenia 1.13 definiuje się zbiór Ext_P, a następnie w dalszej części tego twierdzenia występuje on jako $Ext(P)$. Na stronie 30 w definicji 3.1 liczbę $Tr_n(A)$ określa się jako sumę n największych wartości własnych macierzy A, a na następnej stronie w dowodzie twierdzenia 3.3 Autor ponownie wyjaśnia ten symbol. Wydaje mi się, że oznaczenia, którym poświęca się definicję nie wymagają przypomnienia.

Powyższe negatywne uwagi nie dotyczyły strony merytorycznej pracy i w żaden sposób nie umniejszają wartości rozprawy. Wobec tego nie wpłynęły na końcową konkluzję recenzji.

Uważam, że rozprawa doktorska pana mgra Filipa Sokołowskiego odpowiada w pełni warunkom określonym w Ustawie z dnia 10 lipca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki oraz jest zgodna Rozporządzeniem Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 22 września 2011 roku w sprawie szczegółowego trybu i warunków przeprowadzania czynności w przewodach doktorskich w postępowaniu habilitacyjnym oraz w postępowaniu o nadanie tytułu profesora.

Z pełnym przekonaniem wnioskuję o dopuszczenie pana mgra Filipa Sokołowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto stawiam wniosek o wyróżnienie pracy.