Autor: Paweł Biernat
Temat: Osobliwości w potoku gradientowym dla odwzorowań harmonicznych. / Singularities in heat flow for harmonic maps.

Streszczenie rozprawy doktorskiej:

Na przestrzeni odwzorowań $F : M \to N$ pomiędzy riemannowskimi rozmaitościami M i N można zdefiniować rzeczywisty funkcjonał, oznaczany $E(F)$, nazywany energią Dirichleta. Punkty krytyczne tego funkcjonału, nazywane odwzorowaniami harmonicznymi, są naturalnym uogólnieniem funkcji harmonicznych i grają istotną rolę w matematyce i fizyce.

Na pytanie o istnienie nietrywialnych odwzorowań harmonicznych dla N o niedodatniej krzywiźnie odpowiedzieli Eells i Samspon w pionierskiej pracy z 1964 r. Autorzy pracy wynaleźli technikę potoku gradientowego, która polega na wprowadzeniu ciągłej deformacji dowolnego gładkiego odwzorowania zgodnie z równaniem $\frac{\partial F(t)}{\partial t} = -\delta E(F(t))$, gdzie $\delta E(F(t))$ to gradient energii Dirichleta.

Przy założeniu, że N ma wszędzie niedodatnią krzywiznę Riemanna Eells i Sampson pokazali, że rozwiązania takiego potoku gradientowego istnieją dla dowolnie dużych czasów oraz, że $F(t)$ dąży jednostajnie do $F_\infty = \lim_{t\to\infty} F(t)$, gdzie F_∞ jest odwzorowaniem harmonicznym. Wyniki te pozwalają użyć rozwiązań potoku gradientowego jako homotopii pomiędzy początkowym odwzorowaniem $F(0) = F_0$ i asymptotycznym odwzorowaniem F_∞, co dowodzi istnienia odwzorowania harmonicznego homotopicznego do F_0.

Metoda potoku gradientowego nie działa jednak dla rozmaitości N o dodatniej krzywiźnie Riemanna ze względu na powstające osobliwości: gradient odwzorowań $\nabla F(t)$ staje się nieograniczony w skończonym czasie. Osobliwości te sprawiają, że rozwiązania potoku gradientowego można zdefiniować jedynie w słabym sensie, używając przestrzeni Sobolewa. Słabe rozwiązania nie gwarantują jednak zachowania klasy homotopii odwzorowania $F(t)$ w trakcie ewolucji, co uniemożliwia przeprowadzenie dowodu w duchu pracy Eellsa i Sampsona.

W mojej rozprawie doktorskiej analizuję potok gradientowy dla odwzorowań $F : \mathbb{R}^d \to S^d$, postaci

$$F : (r, \omega) \to (u(r, t), \omega). \tag{1}$$

W powyższym sformułowaniu użyłem skrótowej notacji, gdzie ω to położenie na S^{d-1}, czyli (r, ω) to standartowe współrzędne sferyczne na $\mathbb{R}^d$, a $(u(r, t), \omega)$ określa punkt na S^d. Odwzorowania klasy (**??**) są w literaturze nazywane odwzorowaniami korotacyjnymi i są popularnym uproszczeniem potoku gradientowego.

Dla odwzorowań korotacyjnych potok gradientowy redukuje się do efektywnie jednego równania na u

$$\partial_t u = \partial_{rr} u + \frac{d-1}{r}\partial_r u - \frac{d-1}{2r^2}\sin(2u). \tag{2}$$

Wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi

$$u(r, 0) = u_0(r), \qquad u(0, t) = 0, \qquad u(\infty, t) = n\pi$$

(z $n \in \mathbb{N}$) równanie (2) może być traktowane jako problemem Cauchy'ego. Ogólne twierdzenie o istnieniu rozwiązań dla potoku gradientowego gwarantuje, że dla krótkich czasów u istnieje i jest gładkie. Z drugiej strony, ponieważ S^d ma (stałą) dodatnią krzywiznę, dla niektórych danych początkowych u_0 powstaną osobliwośći w skończonym czasie.

Z symetrii odwzorowania (1) można wywnioskować, że osobliwości mogą powstać jedynie w punkcie $r = 0$ i przejawiają się jako

$$\lim_{t \nearrow T} |\partial_r u(0, t)| = +\infty$$

dla pewnego $0 < T < \infty$ (jednocześnie samo rozwiązanie $u(r, t)$ pozostaje ograniczone). Dla wszystkich wcześniejszych czasów $t < T$ rozwiązanie $u(r, t)$ jest gładkie. Ponadto, osobliwości w rozwiązaniach równania (2) cechują się natychmiastową regularyzacją, co oznacza że rozwiązanie $u(r, t)$ ponownie staje się gładkie dla $t > T$. Użycie rozwiązań (2) w słabym sensie jest więc konieczne jedynie w momencie powstania osobliwości, czyli w $t = T$. Przejście do przestrzeni słabych rozwiązań wiąże się jednak z utratą kontroli nad topologią odwzorowań (1) oraz jednoznacznością rozwiązań.

Celem mojej pracy jest przeanalizowanie zachowania regularnych rozwiązań $u(r,t)$ przed i po czasie, w którym powstaje osobliwość. Wyniki takiej analizy pozwalają na określenie w jaki sposób zmienia się stopień homotopii odwzorowania zadanego przez u oraz skąd bierze się niejednoznaczność słabych rozwiązań.

W pierwszej części mojej pracy analizuję osobliwości powstające dla wymiarów $d = 3, 4, 5$ oraz 6. W tym przypadku rozwiązania osobliwe mają postać rozwiązań samopodobnych, czyli że

$$u(r,t) \approx f\left(\frac{r}{\sqrt{T-t}}\right)$$

zaraz przed powstaniem osobliwości. Profil f jest zadany przez rozwiązania równania zwyczajnego

$$0 = f'' + \left(\frac{d-1}{y} - \frac{y}{2}\right) f' - \frac{d-1}{2y^2}\sin(2f) \tag{3}$$

z warunkami $f(0) = 0$ oraz $f(\infty) = b$ dla pewnego skończonego b. W pracy pokazuję, że spośród przeliczalnej rodziny $\{f_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ rozwiązań problemu brzegowego (3) tylko f_1 jest rozwiązaniem stabilnym. Dojście do osobliwości wzdłuż f_1 gwarantuje, że

$$u(r,T-) = \lim_{t \nearrow T} f_1\left(\frac{r}{\sqrt{T-t}}\right) = f_1(\infty)$$

dla $r > 0$. Następnie pokazuję, że problem Cauchy'ego (2) z $u_0(r) = u(r,T-)$ ma tylko jedno rozwiązanie. Dla pozostałych profili $\{f_n\}_{n=2,3,\ldots}$ analogiczny problem Cauchy'ego może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

W drugiej części pracy doktorskiej opisuję asymptotykę rozwiązań osobliwych w wymiarach $d \geq 7$. W takich wymiarach rozwiązania samopodobne nie istnieją, a mechanizm powstawania osobliwości jest bardziej skomplikowany: osobliwości realizowane są jako rozwiązania wieloskalowe. Rezultatem mojej analizy jest następujący opis ilościowy tempa przyrostu gradientu dla stabilnych osobliwości (produktem ubocznym jest również opis niestabilnych osobliwości). Tempo przyrostu gradientu dla wymiaru $d \geq 8$ ma postać (dla $t \nearrow T$)

$$|\partial_r u(0,t)| \sim \frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{2}+\beta_1}}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{d-2-\omega} > 0, \qquad \omega = \sqrt{d^2 - 8d + 8},$$

a więc dla $d \geq 8$ przyrost gradientu jest szybszy niż w przypadku osobliwości samopodobnych, gdzie $|\partial_r u(0,t)| \sim 1/(T-t)^{1/2}$. Wymiar $d = 7$ odgrywa rolę przypadku granicznego pomiędzy osobliwościami samopodobnymi (dla $d = 3, 4, 5$ oraz 6) a osoblwiościami wieloskalowymi (dla $d \geq 7$) i cechuje się nietypowym tempem zadanym przez

$$|\partial_r u(0,t)| \sim \frac{|\log(T-t)|}{\sqrt{T-t}}$$

dla $t \nearrow T$. Jak w przypadku $d = 3, 4, 5$ lub 6, dla wymiarów $d \geq 7$ opis powstawania osobliwośći jest kluczowy dla konstrukcji rozwiązań słabych.

Do tej pory badania nad powstawaniem osobliwości w potoku harmonicznym skupiały się na wymiarze $d = 2$. Moja praca poszerza tę wiedzę o klasyfikację osobliwości w wyższych wymiarach. Jednocześnie, badania nad przejściem przez osobliwość pozwalają na wysunięcie hipotezy, że dla wyższych wymiarów przejście przez osobliwość jest jednoznaczne dla generycznych osobliwości, niezależnie od mechanizmu wybuchu.