prof. dr hab. Oleksandr Gomilko
Wydział Matematyki
i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 4 czerwca 2014

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
Wybrane nierówności wielomianowe w koNtekście funkcji Greena
i dorobku naukowego dr Leokadii Białas-Cież

Na dorobek naukowy dr Leokadii Białas-Cież, w chwili obecnej, składa się 16 opublikowanych artykułów naukowych. Większość z nich została opublikowana w czasopismach matematycznych rangi międzynarodowej. Pięć z nich zostało opublikowanych przed doktoratem lub wchodzą w jego skład.

W niniejszej recenzji skoncentruję się na ocenie dorobku naukowego uzyskanego przez Kandydata po doktoracie. Dorobek ten składa się z 6 prac tworzących rozprawę habilitacyjną oraz 5 prac poza rozprawą.

Nierówności wielomianowe, związane z oszacowaniem wielomianów i ich pochodnych na zwartych podzbiorach przestrzeni jedno- lub wielowymiarowej, odgrywają znaczącą rolę w różnorodnych dziedzinach matematyki. Chodzi tutaj przede wszystkim o konstruktywną teorię funkcji, teorię potencjału oraz analizię rzeczywistą i zespoloną. Znaczenie omawianych nierówności podkreśla fakt, że znalazły one ważne zastosowania w metodach numerycznych z powodu ich związków z interpolacją wielomianową i aproksymacją funkcji. W szczególności, algorytmy wykorzystujące wielomianowe nierówności są stosowane w metodach przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych.

Niech $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\mathrm{K}^N)$ będzie przestrzenią wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n określonych na przestrzeni N zmiennych, o współczynnikach z ciała $\mathrm{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Najbardziej znanym oszacowaniem wielomianowym jest nierowność (typu) Markowa, która mówi, że

$$\| |\nabla P| \|_E \leqslant M n^m \|P\|_E, \quad P \in \mathcal{P}_n(\mathrm{K}^N), \tag{1}$$

gdzie stałe $M, m > 0$ są niezależne od wielomianu P, a $\| \cdot \|_E$ jest normą sup na zbiorze zwartym $E \subset \mathrm{K}^N$. Klasyczna nierówność Markowa (A. Markow, 1889 dla $k = 1$, W. Markow, 1892 dla $k \geqslant 2$) ma postać

$$\|P^{(k)}\|_{C[-1,1]} \leqslant T_n^{(k)}(1) \|P\|_{C[-1,1]}, \quad P \in \mathcal{P}_n, \tag{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz T_n jest n-tym wielomianem Czebyszewa pierwszego rodzaju oraz

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}, \quad n \geqslant k.$$

Piękno nierówności Markowa leży w jej prostej formie oraz w przydatności w rozwiązywaniu różnych problemów. Zbiór zwarty E, na którym zachodzi nierowność Markowa (1), z pewnym wykładnikiem m, nazywa się zbiorem Markowa i zapisuje się $E \in AMI(m)$.

Istnieje pewna lokalna wersja nierówności wielomianowej (1). Mianowicie, z definicji zbiór zwarty $E \subset \mathbb{K}^N$ ma lokalną własność Markowa z wykładnikiem $m \geqslant 1$, w skrócie $E \in LMP(m)$, jeśli istnieją stałe $s \geqslant 1$, $c > 0$ takie, że dla wszystkich $z_0 \in E$ oraz $r \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ zachodzi

$$|D^\alpha P(z_0)| \leqslant \left(\frac{cn^s}{r^m}\right)^{|\alpha|} \|P\|_{E\cap B(z_0,r)}, \quad P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K}^N), \tag{3}$$

gdzie $B(z_0, r) := \{z : |z - z_0| \leqslant r\}$. W pracach L. Bosa i P. Milmana (1993, 1995) udowodniono, że w przypadku rzeczywistym oszacowania (1) i (3) są równoważne.

Warto podkreślić, że omawiane nierówności, a szczególnie $LMP(1)$, są związane z zagadnieniami rozważanymi w odniesieniu do przestrzeni funkcyjnych Lipschitza i Hardy'ego. Nierówności typu Markowa wykorzystuje się również przy rozwiązywaniu pewnych problemów dotyczących wielomianów ortogonalnych.

Szerokie zainteresowanie nierównościami typu Markowa generuje naturalne pytanią o przykłady, strukturę i geometrię zbiorów, na których zachodzą te nierówności. W tej chwili lista znanych zbiorów z własnością (1) zawiera m.in. każdy niejednopunktowy spójny zwarty podzbiór płaszczyzny $\mathbb{C}$, tłuste zwarte zbiory subanalityczne w $\mathbb{R}^n$, a także pewne zbiory niespójne, np. zbiory typu Cantora. W ten sposób pojawia się pytanie o najmnieszy dopuszczalny „rozmiar" zbiorów z własnością (1) lub (3).

Jednym z najciekawszych i ważnych zagadnień jest związek nierówności wielomianowych z teorią potencjału. Funkcja Greena zbioru zwartego $E \subset \mathbb{C}^N$ może zostać zdefiniowana wzorem

$$V_E(z) := \sup\{u(z) : u \in \mathcal{L}_N,\ u(z_0) \leqslant 0\ \ z_0 \in E\}, \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

gdzie $\mathcal{L}_N$ jest klasą Lelonga funkcji plurisubharmonicznych w $\mathbb{C}^N$ o logarytmicznym wzroście w pobliżu nieskończoności. Jedną z globalną własności V_E, która zależy jedynie od jej zachowania w pobliżu zbioru E, jest własność Höldera, w skrócie HCP, funkcji Greena: dla $\alpha \in (0,1]$ zbiór $E \in HCP(\alpha)$, gdy

$$|V_E(w) - V_E(z)| \leqslant A|w - z|^\alpha, \tag{4}$$

z pewną stałą $A > 0$. Wiadomo, że z warunku $E \in HCP(1/m)$ wynika nierówność Markowa z wykładnikiem m, czyli istnieje stała $M > 0$ taka, że dla każdego wielomiamu $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^N)$ zachodzi oszacowanie (1) dla zbioru E. Z tego wynika, że ważnym zagadnieniem jest również badanie własności funkcji Greena w pobliżu zbioru Markowa. Głównym wyzwaniem jest tutaj znalezienie dowodu lub kontrprzykładu dla implikacji

$$E \in AMI \quad \Rightarrow \quad E \in HCP. \tag{5}$$

Ściśle związanym z problemem implikacji (5) jest zagadnienie o zależności między nierównością Markowa a L-regularnością zbiorów Markowa.

Główne wyniki w cyklu artykułów Kandydata [A1-A6] dotyczą właśnie implikacji (5) oraz pewnych zastosowań nierówności Markowa.

Badania na temat implikacji (5) są prowadzone przez Kandyda dwutorowo: z jednej strony badana jest gładkość funkcji Greena w odniesieniu do nierówności Markowa, a z drugiej strony poszukuje się złożonych przykładów zbiorów Markowa w nadziei znalezienia takiego zbioru, który nie będzie miał własności HCP.

Nierówność Markowa dla prawie wszystkich znanych przykładów niespójnych zbiorów Markowa była dowodzona przez wykazanie własności HCP. Zgodnie z Th. 1.1 pracy [A1] można wykazywać nierówność Markowa na zbiorze $E \subset \mathbb{C}$, dowodząc jedynie tej nierowności na pewnym rzucie kołowym zbioru E. W ten sposób w [A1] otrzymano jeden z pierwszych całkowicie niespójnych zbiórow Markowa $E \subset \mathbb{C}$, dla których nierówność Markowa dowodzona jest bez wykazywania własności HCP. Takie przykłady są bardzo ważne z punktu widzenia poszukiwania kontrprzykładu do implikacji (5).

Pewien krok w kierunku rozwiązania problemu prawdziwości implikacji (5) został wykonany w pracy [A2]. Główne wyniki [A2] wiążą funkcję Greena ze stałymi Bernsteina i Markowa zbioru zwartego $E \subset \mathbb{C}^N$. Dla ułatwienia rozwiązania problemu implikacji (5), w [A2] podano nowy wzór na funkcję ekstremalną Siciaka Φ_E, a tym samym na funkcję Greena $V_E = \ln \Phi_E$. Wykorzystano do tego najlepsze (α, ν)-stałe $M_\nu^{(\alpha)}(E, w)$ w nierówności Bernsteina zbioru E w punkcie $w \in \mathbb{C}^N$ oraz (α, ν)-stałe Markowa zbioru E, gdzie $\alpha, \nu \in \mathbb{N}_0^N$. W szczególności wykazano (Th. 2.4, Th. 3.1), że jeśli E jest niepluripolarnym zbiorem zwartym w $\mathbb{C}^N$, to dla każdego $\alpha, \nu \in \mathbb{N}_0^N$ funkcja

$$z \mapsto (M_\nu^{(\alpha)}(E, z))^{1/|\nu|}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

jest plurisubharmonoczna oraz w pewnym sensie jest asymptotycznie bliska funkcji ekstremalnej Φ_E, gdy $|\nu| \to \infty$.

Praca [A3] zawiera ciekawe przykłady zastosowania nierówności Markowa (1) do interpolacji wielomianowej w przypadku, gdy $E \subset \mathbb{C}$ jest zwartym wielomianowo wypukłym zbiorem o nieskończonej liczbie punktów. Wiadomo, że ciągi Leji $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zbioru E dostarczają znakomitych punktów do interpolacji wielomianowej funkcji analitycznych. Jednak w praktyce znalezienie punktów Leji dla ustalonego zbioru E jest na ogół możliwe tylko dla małych wartości n. Dlatego w pracy [A3] zdefiniowano nową klasę węzłów interpolacyjnych poprzez osłabienie warunków w definicji ciągu Leji - pseudociągi Leji. Podobne, ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in E$ nazywa się pseudociągiem Leji o wzroście kontrolowanym przez ciąg Endreia $(M_m)_{n=1}^{\infty}$, jeśli

$$M_n|w_n(a_n)| \geqslant \|W_n\|_E, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $M_n \geqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = 1$, oraz

$$w_n(z) := (z - a_0)\cdots(z - a_{n-1}), \quad n \geqslant 1.$$

Przy tym każdy ciąg Leji jest pseudociągem Leji o wzroście kontrolowanym przez ciąg $M_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. W [A3] (Th. 2) udowodniono, że pseudociągi Leji również dostarczają znakomitych węzłów interpolacji wielomianowej: wielomian interpolacyjny Lagrange'a $L[a_0, \ldots, a_n; f]$ funkcji f analitycznej w pewnym otoczeniu niepolarnego, wielomianowo wypukłego zwartego zbioru $E \subset \mathbb{C}$ zmierza jednostajnie z szybkością geometryczną do f na E, gdy $n \to \infty$. Co wiecej, w przeciwieństwie do ciągu Leji, elementy pseudociągu Leji są raczej łatwe do znalezienia. W [A3] (Th. 3, Th. 4) przedstawiono również dwa podstawowe twierdzenia dotyczące rozkładu pseudociągów Leji. Kluczową rolę odgrywa tutaj nierówność Markowa (1). Ponadto Th. 4 z [A3] jest punktem wyjścia dla prostego algorytmu numerycznego konstruującego pseudociąg Leji dla zbiorów Markowa. Przy tym zasadniczą rolę odgrywają stała M i wykładnik m w nierówności Markowa, bo wyznaczają one efektywność zaproponowanego algorytmu. W pracy [A3] przedstawiono również pseudociągi Leji skonstruowane dla szerokiej klasy zbiorów $E \subset \mathbb{C}$.

Najlepsze wykładniki $\mu_0(E)$ i $\alpha_0(E)$ w nierównościach (1) i (4) są w ostatnich latach przedmiotem wielu publikacji. Ze względu na nierówność $\alpha_0(E) \leqslant 1/\mu_0(E)$ badanie wykładnika Markowa w nierówności (1) wydaje się celowe z punktu widzenia otwartego problemu implikacji (5). Jednym z problemów jest pytanie o to, czy oszacowanie (4) zachodzi z najlepszym wykładnikiem $\alpha = \alpha_0(E)$ we własności Höldera funkcji V_E oraz, czy nierówność (1) jest prawdziwa z wykładnikiem Markowa $m = \mu_0(E)$ dla dowolnego zbioru Markowa E. W pracy [A4] (Propositions 2.5, 2.6, Corollary 2.7) pokazano, że na drugie pytanie odpowiedź jest negatywna na przestrzeniach $\mathbb{C}^N$ lub $\mathbb{R}^N$ dla dowolnego $N \geqslant 2$. Oprócz tego w [A4] wykazano, że nie ma górnego ograniczenia dla wykładników Markowa zbiorów Markowa w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

W pracy [A5] pokazano, że lokalna własność Markowa jest równoważna nierówności typu Kolmogorowa dla dowolnego zbioru zwartego w $\mathbb{C}$. Jest to pierwszy krok do udowodnienia równoważności LMP i AMI dla podzbiorów $E \subset \mathbb{C}$ (przy pewnym koniecznym założeniu) i w konsekwencji, do pokazania L-regularności zbiorów Markowa na $\mathbb{C}$. Warto podkreślić, że wybrane metody wykorzystane w dowodach z [A5] pozwalają skonstruować wyrafinowane zbiory Markowa.

W pracy [A6] został rozważany problem implikacji (5) poprzez rozważanie uogólnienia nierówności Markowa (2). Ta nowa nierowność typu Markowa okazuje się stanowić warunek równoważny własności HCP funkcji Greena wielu zmiennych zespolonych. Z definicji z [A6], dla ustalonego $m \geqslant 1$ zbiór zwarty $E \in \mathbb{C}^N$ dopuszcza nierówność V. Markowa, w skrócie $E \in VMI(m)$, jeśli istnieje $M > 0$ takie, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$

$$\|D^\alpha P\|_E \leqslant M^{|\alpha|} \frac{n^{m|\alpha|}}{(|\alpha|!)^{m-1}} \|P\|_E, \quad P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^N). \tag{6}$$

Z definicji wynika, że $VMI(m) \Rightarrow AMI(m)$ dla każdego m. W [A6] (Th. 2.9) udowodniono podstawowe stwierdzenie, które mówi, że własność Höldera jest równoważna VMI. Jeśli E jest zwartym podzbiorem $\mathbb{C}^N$ i $m \geqslant 1$, to

$$E \in VMI(m) \Leftrightarrow E \in HCP(1/m).$$

Dzięki temu stwierdzeniu problem otwarty dotyczacy implikacji $AMI \Rightarrow HCP$ można sformulować w sposób równoważny: czy z $E \in AMI$ wynika $E \in VMI$? Ponieważ własności AMI i VMI wyrażone są za pomocą pochodnych wielomianów, więc jest bardzo prawdopodobne, że problem implikacji $AMI \Rightarrow VMI$ jest łatwiejszy do rozwiązania niż problem wyjściowy (3). W oparciu o Th. 2.9 przedstawiono nowe warunki równoważne HCP (Corollary 2.10), a także podano zastosowania do wykazania własności HCP dla konkretnych podzbiorów $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}^N$ (Prop. 5,1, 5.2).

Prace Kandydata [B6] - [B9], które nie znalazły się w rozprawie, dotyczą róznorodnych pytań powiązanych z nierównościami Markowa i funkcją Greena. W szczególności, w pracy [B7] udowodniono, że jeśli $E \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem z LMI, to E jest zbiorem L-regularnym, a praca [B8] przedstawia ostatnie osiągnięcia dotyczące związków własności funkcji Greena ze wzrostem ciągu stałych Markowa $M_n(E)$. W pracy [B10] udowodniono, że pewna klasa pojemności ma własność produktową.

Rozprawa habilitacyjna dr Białas-Cież dotyczy trudnych i wartościowych problemów teorii funkcji wielu zmiennych, a Kandydat ma istotny dorobek naukowy. W mojej opinii rezultaty przedstawione w autoreferacie ukazują Kandydata jako badacza o szerokich zainteresowaniach matematycznych oraz potrafiącego używać różnorodnych metod i narzędzi. Dr Białas-Cież porusza się swobodnie po wielu działach matematyki i potrafi umiejętnie łączyć i stosować różne metody badań.

W ogólnym podsumowaniu należy pokreślić wysoki poziom merytoryczny i oryginalność badań Kandydata. Kluczowe prace opublikowane są w wysokiej klasy czasopismach, takich jak: *Constr. Approx.*, *Potential Anal.*, *Anal. Mat. Pura. Appl.*, *Studia Mathematica*. Wyniki w nich zawarte referowane były na specjalistycznych międzynarodowych konferencjach naukowych. Dokonania Kandydata są szeroko znane społeczności matematycznej zajmującej się problemami konstruktywnej teorii funkcji wielu zmiennych, co jest potwierdzone dobrym wskaźnikiem cytowań.

Podsumowując uważam, że rozprawa habilitacyjna dr Białas-Cież stanowi znaczny wkład w rozwój teorii funkcji, a cały dorobek naukowy Kandydata jest znaczny i uzasadnia nadanie stopnia naukowego doktora habilitowanego.

Oleksandr Gomilko