UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
Wydział Matematyki i Informatyki

Andrzej Sołtysiak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

Poznań, 30 maja 2014 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Patryka Pagacza pt. „Własności asymptotyczne oraz własności Szegő dla wybranych klas operatorów ograniczonych"

Praca doktorska Pana Patryka Pagacza dotyczy dwóch zagadnień z teorii operatorów (liniowych i ograniczonych) na przestrzeni Hilberta. Pierwszym z nich jest badanie własności asymptotycznych pewnych klas operatorów, a drugim opis rozkładów izometrii typu Szegő. Praca składa się ze wstępu i trzech rozdziałów, z których pierwszy ma charakter wstępny. Przedstawione są w nim oznaczenia oraz podstawowe fakty istotne dla dalszych rozważań. W rozdziale drugim badane są własności asymptotyczne, a trzeci zawiera twierdzenia o wspomnianych rozkładach typu Szegő.

Przystąpię do omówienia treści rozdziału drugiego. Badanie warunków na normę, które implikują silną stabilność kontrakcji lub operatora z nią sprzężonego rozpoczął C. R. Putnam w 1975 roku. W pracy [49] (numeracja z bibliografii rozprawy doktorskiej) wykazał, że zupełnie nieunitarna część hiponormalnej kontrakcji $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest operatorem klasy $C_{\cdot 0}$, tzn. $\inf\{\|T^{*n}x\| \colon n \in \mathbb{N}\} = 0$ dla wszystkich wektorów x z przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. W kolejnych latach twierdzenie to było udowadniane dla innych klas kontrakcji tj. operatory paranormalne, k-paranormalne, p-hiponormalne i $(1, k)$-quasihiponormalne.

Pan mgr Pagacz uogólnił wynik Putnama na klasę n-hiperkontrakcji (twierdzenie 2.4.11) i (p, k)-quasinormalnych kontrakcji (twierdzenie 2.4.8). Głównym narzędziem wykorzystanym przez Autora jest konstrukcja pochodząca od Szőkefalvi-Nagya ([51]) zwana *asymptotą izometryczną*. Pojęcie asymptoty izometrycznej jest ściśle związane z ciągami wstecznymi zdefiniowanymi w następujący sposób: ciąg wektorów $\{x_n\}$ z przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest *ciągiem wstecznym* dla operatora T, jeżeli $Tx_{n+1} = x_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Najważniejszym, moim zdaniem, twierdzeniem uzyskanym przez Autora w rozdziale drugim pracy jest twierdzenie 2.3.3, które brzmi następująco:

Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem potęgowo ograniczonym. Następujące warunki są równoważne:

(1) *dowolny ograniczony ciąg wsteczny* $\{x_n\}$ *dla* T *ma stałe normy, tzn.* $\|x_n\| = const$;

(2) *operator* T *ma reprezentację* $T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & U \end{pmatrix}$, *gdzie* U *jest operatorem unitarnym a* T_{11} *operatorem klasy* $C_{.0}$.

Natychmiastowym wnioskiem z tego twierdzenia jest bardzo poręczne kryterium (twierdzenie 2.4.1), które posłużyło Autorowi do badania asymptotycznych własności kontrakcji i uzyskania wspomnianych już uogólnień twierdzenia Putnama. Autor wyjaśnia również dlaczego stosowana przez Niego metoda nie działa w przypadku, gdy badany operator nie jest potęgowo ograniczony.

Ponadto okazuje się, że w przypadku, gdy operator T jest kontrakcją wymienione powyżej warunki (1) lub (2) są równoważne z posiadaniem przez operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *własności Putnama-Fuglede* (twierdzenie 2.6.2), która mówi, że jeżeli $TX = XJ^*$ dla dowolnej izometrii $J \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ i dowolnego operatora $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, to również $T^*X = XJ$.

Końcowa część rozdziału drugiego rozprawy doktorskiej dotyczy badania problemu, które operatory mają własność Putnama-Fuglede, w skrócie *własność* PF. Pan Pagacz uzyskał następujące wyniki:

- [tw. 2.6.4] *Operator potęgowo ograniczony ma własność* PF *wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą prostą operatora unitarnego i operatora klasy* $C_{.0}$.
- [tw. 2.7.2] *Operator* (p, k)*-hiponormalny ma własność* PF, *gdzie* $p > 0$ *i* $k \in \mathbb{N}$.
- [tw. 2.7.3] *Operator* $k*$*-paranormalny ma własność* PF.

Rozdział drugi kończy się ciekawym przykładem (2.7.5) pokazującym, że operatory paranormalne nie muszą mieć własności PF.

Omówię teraz treść rozdziału trzeciego rozprawy. W tym rozdziale Autor zajmuje się rozkładami izometrii typu Szegő. Badania takich rozkładów zostały zainicjowane w pracach W. Mlaka ([39], [40]) oraz C. Foiaşa i I. Suciu ([21]) w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku.

Nieujemna regularna miara borelowska μ na okręgu jednostkowym jest *miarą Szegő*, gdy dla każdego zbioru borelowskiego ω z inkluzji $\chi_\omega L^2(\mu) \subset H^2(\mu)$ wynika, że $\mu(\omega) = 0$. $H^2(\mu)$ oznacza tu domknięcie zbioru wielomianów analitycznych w przestrzeni $L^2(\mu)$, a χ_ω funkcję charakterystyczną zbioru ω. Miara μ jest *Szegő singularna*, jeżeli $H^2(\mu) = L^2(\mu)$.

Autor wykorzystuje do badania rozkładów izometrii pojęcie wektora wędrującego. Wektor w jest *wektorem wędrującym* izometrii V, jeżeli $\langle V^n w, w\rangle = 0$ dla dowolnej dodatniej liczny całkowitej n. Okazuje się (stwierdzenie 3.1.4), że jeżeli niezerowy wektor w jest wędrujący dla izometrii V, to miara elementarna $\mu_w = \langle E(\cdot)w, w\rangle$ pochodząca od miary spektralnej E najmniejszego unitarnego rozszerzenia operatora V jest miarą Szegő. Dla izometrii $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ rozkład $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2$, redukujący V, jest *rozkładem typu Szegő*, gdy wszystkie miary elementarne pochodzące od wektorów z H_1 są Szegő singularne, a przestrzeń H^2 jest rozpięta przez wektory, których miary elementarne są miarami Szegő. Autor wykazuje, że każda izometria ma rozkład typu Szegő. Dokładniej udowadnia następujące (twierdzenie 3.2.3):

Niech $\mathcal{H}_w$ będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ rozpiętą przez wszystkie wektory wędrujące dla izometrii $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i niech $\mathcal{H}_0 = (\mathcal{H}_w)^{\perp}$. Wówczas przestrzeń $\mathcal{H}_w$ jest redukująca dla V oraz $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_w$ jest rozkładem typu Szegő.

Po zastosowaniu rozkładu Lebesgue'a do części unitarnej rozkładu Wolda izometrii $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Autor otrzymał opis rozkładu z powyższego twierdzenia (twierdzenie 3.3.7), a mianowicie

- *Jeżeli V jest operatorem unitarnym nieposiadającym wektorów wędrujących, to $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.*
- *W przeciwnym przypadku $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{sing}$ oraz $\mathcal{H}_w = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s$, gdzie $\mathcal{H}_s$ jest częścią przesunięcia jednostronnego operatora V, $\mathcal{H}_{ac}$ składa się z wektorów, których miary elementarne są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a, a $\mathcal{H}_{sing}$ składa się z tych wektorów, których miary elementarne są singularne względem miary Lebesgue'a.*

Na końcu pracy Pan Pagacz zamieścił krótką dyskusję znanych faktów dotyczących istnienia nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej dla kontrakcji i podał warunek dostateczny na to, aby kontrakcja klasy C_{10} miała taką podprzestrzeń.

Przejdę teraz do oceny rozprawy doktorskiej. Rozprawa napisana jest jasno, zwięźle i poprawnie. Mam tylko jedną drobną uwagę merytoryczną. Mianowicie, w definicji operatora klasy $C_{1.}$ na stronie 8[8] powinno być „dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$."

Nie mam żadnych uwag redakcyjnych, ani istotnych uwag językowych. Na osobnej kartce zawarłem listę drobnych błędów drukarskich i językowych, których liczba jest niewielka i które nie mają żadnego wpływu na ocenę pracy.

Moja ocena rozprawy Pana mgra Patryka Pagacza jest bardzo pozytywna. Problemy charakteryzacji własności asymptotycznych operatorów i badania rozkładów izometrii należą do ciągle aktualnych i ważnych zagadnień w teorii operatorów na przestrzeni Hilberta. Pan Pagacz uzyskał ciekawe i oryginalne wyniki w zakresie tej tematyki. Wykazał się przy tym bardzo dobrą znajomością literatury i doskonałym opanowaniem „rzemiosła". Liczba uzyskanych przez Niego wyników pozwalałaby na stworzenie dwóch rozpraw doktorskich. Ponadto chciałbym dodać, że wyniki Pana Pagacza już są lub będą opublikowane w czterech pracach w renomowanych czasopismach.

Biorąc powyższe pod uwagę, stwierdzam, że **praca doktorska Pana mgra Patryka Pagacza spełnia z nadmiarem wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim w art. 13 ust. 1 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym z dn. 14 marca 2003 r. (Dz.U. Nr 65, poz. 595, z późniejszymi zmianami)** i wnoszę o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

Na zakończenie chciałbym dodać, że moim zdaniem praca ta zasługuje na wyróżnienie z następujących powodów:

- Udowodnione twierdzenie 2.4.1 jest bardzo wygodnym narzędziem pozwalającym na rozstrzygnięcie, czy część zupełnie nieunitarna kontrakcji spełniającej dany warunek normowy jest klasy $C_{.0}$, a zatem umożliwia m.in. uzyskanie nowych uogólnień wyniku Putnama z 1975 roku. Dwa z takich nowych uogólnień uzyskał Autor – twierdzenia 2.4.8, 2.4.11. Ponadto zastosowanie twierdzenia 2.4.1 upraszcza dowody wielu dotychczasowych rezultatów tego typu.

- Bardzo istotny jest kontrprzykład 2.7.5 na to, że własność Putnama-Fuglede nie musi zachodzić dla operatorów paranormalnych.

- Uzyskanie konstrukcji rozkładu typu Szegő dla izometrii – twierdzenia 3.2.3 i 3.3.7. Dotychczas znane były tylko rezultaty stwierdzające, że pewne operatory mają własność typu Szegő lub jej nie mają.

- Praca zawiera dużą liczbę ciekawych przykładów i kontrprzykładów.

Andrzej Sołtysiak

Andrzej Sołtysiak

Lista błędów drukarskich i językowych zauważonych w rozprawie doktorskiej mgra Patryka Pagacza

strona, wiersz	*jest*	*powinno być*
4_{17}	pragnimy	pragniemy
4_{13}	nie koniecznie	niekoniecznie
10_{3}	zupełnie nie silnie stabilny	zupełnie niesilnie stabilny
11_{12}	ninejszym	niniejszym
15^{7}	$\|T^{-n}x\| = \infty$	$\|T^{-n}x\| \to \infty$
17_{9}	powyżeszego	powyższego
17_{7}	następujacą	następującą
18_{7}	$k*$-paranormalnym jeśli	$k*$-paranormalnym, jeśli
18_{4}	k-paranormalnym jeśli	$k*$-paranormalnym, jeśli
19^{2}	n-hiperkontrakcją jeśli	n-hiperkontrakcją, jeśli
19^{6}	klasy Q jeśli	klasy Q, jeśli
19_{15}	zależnością	zależnościom
20^{1}	ilustruję inkluzję	ilustruje inkluzje
23_{14}	operatorów $C_{\cdot 1}$ dla których	operatorów $C_{\cdot 1}$, dla których
24^{3}	Dalej nie istnieje	Dalej, nie istnieje
24_{11}	*normowo-regularnym jeśli*	*normowo-regularnym, jeśli*
$24_{3,2}$	jednostornnego	jedostronnego
26^{13}	*W szczególności jeśli*	*W szczególności, jeśli*
28_{9}	nie potęgowo	niepotęgowo
30^{12}	posidają	posiadają
31^{4}	średnia arytmetyczna	średnią arytmetyczną
32^{9}	średnia	średnią
32^{13}	T w restrykcji do przestrzeni	restrykcja T do przestrzeni
33^{1}	wcześniejesze	wcześniejsze
33^{3}	Nie mniej	Niemniej
34^{1}	Lemmatu	Lematu
38_{7}	wędrującym *jeśli*	wędrującym, *jeśli*
38_{4}	*izomertią*	*izometrią*
40^{13}	*wektorów H_1*	*wektorów z H_1*
40_{8}	nie zawierają	nie zawiera
53^{14}	Sceond	Second
53_{9}	*commutiong*	*commuting*
54^{11}	*Paranormal*	*paranormal*