Wydział MiNI
Politechnika Warszawska
Plac Politechniki 1
00-661 Warszawa

9 stycznia 2014

prof. dr hab. Włodzimierz Zwonek
Prodziekan ds. badań i współpracy
Wydziału Matematyki i Informatyki UJ
ul. Prof. S. Łojasiewicza, 30-348 Kraków

Recenzja wniosku habilitacyjnego dr. Marcina Mazura.

Tytuł osiągnięcia, "Dynamika hiperboliczna", dobrze pasuje do jego treści. Habilitant w swym autoreferacie omawia wyczerpująco klasyczny rodowód tego zagadnienia. Pozwolę sobie jednak tytułem wstępu dodać garść uwag dla wyjaśnienia swojego poglądu na miejsce osiągnięcia w szerszym kontekście teorii układów dynamicznych.

Posłużę się przykładem przywołanej także w autoreferacie rodziny Hénona, która jest zadana wzorem

$$H_{a,b}(x,y) = (a - x^2 + by, x) ,$$

gdzie a, b, x, y są rzeczywiste i dla $b \neq 0$ przekształcenie jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2$ na siebie. Dla a dostatecznie dużych można pokazać bez pomocy komputera, że zbiór niebłądzący dla takich przekształceń jest hiperboliczny. Powstaje jednak pytanie, jak tę hiperboliczność wykazać dla konkretnych parametrów. Już od zarania teorii hiperbolicznej jej twórcy podkreślali wagę tego praktycznego pytania i poszukiwali metod obliczeniowych dla precyzyjnego wykazania hiperboliczności rachunkami na komputerze. W ten nurt wpisują się badania zwane wątkiem C^1 osiągnięcia. Doprowadziły one do implementacji konkretnej procedury pozwalającej dowieść hiperboliczności dla $a = 5.4, b = -1$ (wg. pracy [R6], numeracja prac z autoreferatu).

Trzeba jednak pamiętać, że klasycznymi wartościami rozpatrywanymi przez Hénona są $a = 1.4, b = 0.3$. Dla takich wartości wiadomo, że zbiór niebłądzący nie może być hiperboliczny, choć zapewne ma jakąś strukturę niejednostajnie hiperboliczną. Niewiele na ten temat do dziś wiadomo. Dla $b = 0$ przekształcenie degeneruje się do wymiaru 1 i jedyne analityczne wyniki z prac Benedicksa-Carlesona i innych, które dotyczą istnienia i własności niehiperbolicznego zbioru niezmienniczego, są otrzymane metodami perturbacyjnymi od przypadku jednowymiarowego do b dostatecznie małych. Prace te należą do najtrudniejszych w literaturze dotyczącej teorii układów dynamicznych. Ogólnie można podsumować, że badania rodziny Hénona są centralne dla współczesnej teorii układów dynamicznych, ale koncentrują się na przypadku, kiedy przekształcenia nie jest jednostajne hiperboliczne. Zaproponowanie w przypadku niejednostajnie hiperbolicznym podejścia obliczeniowego do badania czy wyznaczania zbiorów niezmienniczych byłoby znacznym postępem, ale omawiane osiągnięcie jest ograniczone do przypadku hiperbolicznego.

To, że układy hiperboliczne nie są typowe, nie jest szczególną cechą rodziny Hénona, lecz dobrze znanym ogólnym faktem. W takiej sytuacji logicznym krokiem jest poszukiwanie pewnych istotnych własności znanych z teorii układów hiperbolicznych, ale zarazem typowych, tj. zazwyczaj spełnionych nawet, gdy układ hiperboliczny nie jest. Do takich własności należą odtwarzanie orbit (polskie tłumaczenia terminu "shadowing") lub tolerancyjna stabilność (tolerance stability). Tak się składa, że są to własności topologiczne. Stąd pojawia się wątek C^0 osiągnięcia polegający na dowodzeniu typowości tego typu własności dla homeomorfizmów z topologią C^0. Trzeba powiedzieć, że ten kierunek badań jest także istotny dla współczesnej teorii, ale bardziej interesujące są własności typowe w sensie C^1. W kontekście gładkim nie są typowe własności odtwarzania orbit, ale otwarte pozostaje tzw. przypuszczenie Zeemana o typowości tolerancyjnej stabilności w gładkich klasach dyfeomorfizmów na rozmaitościach zwartych. Habilitant wykazał prawdziwość tego przypuszczenia w topologii C^0 w pracy, która nie weszła w skład osiągnięcia.

Widzimy więc, że wątki C^1 i C^0 nawzajem się uzupełniają - wątek C^1 tkwi w klasycznej teorii hiperbolicznej, zaś wątek C^0 jest próbą poradzenia sobie z sytuacją braku typowości własności hiperboliczności. Można także zauważyć, że oba wątki badań Habilitanta wiążą się z głownymi problemami współczesnej teorii układów dynamicznych, ale nie odnoszą się bezpośrednio do zagadnień naprawdę centralnych.

Przejdźmy teraz do omówienia konkretnych prac wchodzących w skład osiągnięcia. Do wątku C^1 należą prace [R3, R4, R6, R7]. Podstawą podejścia habilitanta jest pojęcie semi-hiperboliczności. Jest to osłabienie klasycznej definicji jednostajnej hiperboliczności poprzez osłabienie wymogu niezmienniczości przestrzeni (odpowiednio wiązek dla zbiorów) stabilnych i niestabilnych. Dodam tu na marginesie, że nie potrafiłem zrozumieć Definicji 2.6 z autoreferatu głownie dlatego, że nie wiadomo czym są operatory B. Oczywiście, definicja jest w pracach. W kazdym razie otrzymuje się w ten sposób warunek sprawdzalny przy użyciu komputera. Jest to więc podejście podobne i poniekąd konkurencyjne do opartego na wcześniej wprowadzonej idei pola stożków. Nie jest dla mnie całkiem jasne, jak te metody porównać. Do związku między nimi odnosi się praca [R4]. Praca [R3] zawiera dowód podstawowego faktu, że semi-hiperboliczność implikuje hiperboliczność. Rezultatu tego brakowało we wcześniejszych pracach Pokrowskiego i innych na temat semi-hiperboliczności, zaś dowód Habilitanta wprowadza metodę rachunku funkcyjnego na widmie operatorów. W pracy [R6] wypracowany jest konkretny algorytm pozwalający na wykazanie semi-hiperboliczności, a więc i hiperboliczności, przy użyciu komputera. [R7] jest w zasadzie rekapitulacją wyników pozostałych prac.

Pozostałe prace należą do wątku C^0. Najważniejszą z nich jest zapewne [R1] ustalająca typowość własności odtwarzania i odwrotnego odtwarzania orbit. Dowód jest oparty na dość zaawansowanej technice dynamiki topologicznej, tzw. rozkładom rączkowym (handle decomposition) Piługina. Prace [R2,R5] uogólniają ten rezultat wprowadzając dodatkowe pojęcia odtwarzania. Najnowsze prace [R8,R9] rozwijają pomysł topologicznej hiperboliczności, czyli ekspansywności wraz odtwarzaniem orbit. Pokazuje się, ze jest to własność typowa z zbiorze homeomorfizmów. W pracy [R8] otrzymujemy dodatkowo jej charakteryzację poprzez własności "topologicznego pola stożków".

Z prac nie wchodzących w skład osiągnięcia na uwagę zasługuje [D6], w której dowodzi się między innymi przypuszczenia Zeemana w klasie C^0, a także [D2,D8], która wprowadzają algorytmy komputerowe do wyznaczania działania homeomorfizmu na homologiach.

Pozostaje dokonanie krytycznego podsumowania i oceny wartości naukowej osiągnięcia. Stwierdzić wypada, że wpisuje się ono w uznane nurty badań. Wprowadza nowe pomysly i metody. W wątku C^1 takimi nowościami byłyby użycie rachunku funkcyjnego operatorów, czy też pojęcie pary semihiperbolicznej będące podstawą algorytmu zaproponowanego dla dowodzenia hiperboliczności. W wątku C^0 prace Habilitanta idą dalej niż innych w badaniach nad typowością własności topologicznej hiperboliczności. Są to rezultaty zauważalne w ogólnym nurcie badań nad dynamiką hiperboliczną. Indeksy cytowań nie są wprawdzie wysokie, ale praca [D6] dotycząca przypuszczenia Zeemana jest cytowana przez badaczy o uznanej renomie, jak S. Crovisier.

Można także dopatrzeć się okoliczności zmniejszających wartość osiągnięcia. W przypadku wątku C^1 i wynikająych z niego implementacji komputerowych wymieniłbym brak przykładów wykazujących wartość tego podejścia z punktu widzenia teoretycznego lub praktycznego w porównaniu z metodami istniejącymi. Co do wątku C^0, to właśnie zamknięcie się w klasie C^0 obniża rangę uzyskanych rezultatów. Cóż bowiem z tego, że pewne własności są typowe w klasie C^0, skoro wszystkie klasyczne przykłady czy modele wywodzące się z zastosowań są gładkie i z tego względu nietypowe w klasie C^0.

W nawiązaniu do art. 16 ust. 1 ustawy o stopniach i tytule naukowym stwierdzić wypada, że wymóg istotnego wkładu w rozwój dziedziny jest spełniony. Prace są utrzymane na dobrym poziomie matematycznym, wprowadzają nowe pomysły i metody, a ich rezultaty są zauważalne w szerszym kontekście. Wymóg istotnej aktywności jest także niewątpliwie spełniony poprzez udział habilitanta w konferencjach, grantach i innych projektach badawczych, działalność dydaktyczną, wkład w kształcenie kadry i inną działalność organizacyjną wymienione w dokumentacji sprawy.

Zatem wniosek spełnia wszelkie wymogi ustawy.

prof. dr hab. Grzegorz Świątek

Grzegorz Świątek