

Recenzja rozprawy doktorskiej Sebastiana Babińskiego **Extremal problems on edge colorings of graphs**

Rozprawa doktorska Pana Sebastiana Babińskiego napisana jest w języku angielskim i powstała poprzez wklejenie trzech współautorskich artykułów naukowych:

- S. Babiński, A. Grzesik, Maximal edge colorings of graphs, *European Journal of Combinatorics* 117 (2023), 103824.
- S. Babiński, A. Grzesik, Graphs without a rainbow path of length 3, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 38(1) (2024), 629–644.
- S. Babiński, A. Grzesik, M. Prorok, Directed graphs without rainbow triangles, *arXiv*: 2308.01461 (2023).

W Pierwszym z artykułów autorzy zajęli się problemem maksymalnych prawidłowych krawędziowych kolorowań grafu. Liczba m krawędzi należy do zbioru $MEC(n)$, jeśli istnieje graf o n wierzchołkach i m krawędziach, który ma takie maksymalne kolorowanie.

M. Meszka i M. Tyniec w swoim artykule: Maximal Edge-Colorings of Graphs, *Graphs and Combinatorics* 33 (2017), 1451–1458, rozstrzygnęli wiele przypadków, w których albo $m \in MEC(n)$ albo $m \notin MEC(n)$. Pozostało jednak sporo jeszcze nierozstrzygniętych. Te zostały tutaj uzupełnione (Twierdzenia 2.3, 2.4, 2.7).

Użyte tu zostały całkowicie elementarne metody. Konieczne było rozważenie szeregu przypadków. W zasadzie wszystkie opierały się na jednym pomysle, który był odpowiednio modyfikowany tak, by pasował do konkretnych warunków. Chociaż metody były całkowicie elementarne jednak ich użycie wymagało dużej biegłości posługiwania się tego rodzaju kombinatorycznymi rozważaniami. Można jeszcze dodać, iż rysunki, zwykle pomocne w takich razach, tutaj raczej zaciemniały obraz.

W drugim z artykułów rozważano modyfikację problemu Turána. Dla grafu o n wierzchołkach, przy danych k kolorach, jaka jest największa liczba pokolorowanych krawędzi, aby nie było ścieżki długości 3 w jednym kolorze.

W Twierdzeniu 3.1 podane zostało oszacowanie tej liczby. Oszacowanie to jest asymptotycznie optymalne.

Podobnie jak poprzednio wszelkie dowody są w większości elementarne. Jedynym (mniej elementarnym) narzędziem użytym tutaj jest pojęcie grafu skupionego (Definicja 3.2). W większości z bardzo wielu rozważanych przypadków przy pomocy Twierdzenia 3.3, dało się przy jego pomocy udowodnić tezę.

Ponownie biegłość autorów w posługiwaniu się tego typu kombinatorycznymi rozważaniami jest niezaprzeczalna.

Uwagę zwraca jeszcze jedna kwestia. A mianowicie to, że krawędzie można kolorować jednocześnie wieloma kolorami. I od razu pytanie, dlaczego autorzy wybrali tę wersję. Bardziej naturalną wersją byłoby kolorowanie krawędzi tylko jednym kolorem. Argument, że w

przypadku, kiedy każdą krawędź kolorujemy wszystkimi kolorami, to dostajemy klasyczny przypadek, jest niewystarczające. Wydaje się, że jednokolorowe kolorowania krawędzi są bardziej naturalne i mają więcej zastosowań. Oczywiście można by argumentować, że to szacowanie działa również i w tym przypadku. Jednak prawdopodobnie nie jest tutaj one optymalne, ani pewnie nie wystarczająco dobre.

Trzeci artykuł traktuje o podobnym problemie dla grafów skierowanych. Tutaj zabronionymi grafami jest cykl trójelementowy (skierowany) i trójelementowy porządek liniowy. Autorzy z jakiś względów nazywają je trójkąt skierowany i tranzytywny.

Wyniki zostały zebrane w serii twierdzeń, w zależności od ilości kolorów, wersji zakazanego trójkąta oraz rodzaju warunków nałożonych na graf skierowany. Tutaj dowód rozważa naprawdę dużo różnego rodzaju przypadków. Jednak w każdym z nich dowód jest całkowicie elementarny i dość prosty. Wymaga to dużego samozaparcia i dużej liczby pomysłów kombinatorycznych.

Jak poprzednio można zadać pytanie o zasadność takiego uogólnienia klasycznego problemu.

Dodatkowym problemem jest tutaj to, że jako rozdział 4. został wklejony artykuł nie z czasopisma ale arxiv. Jest to artykuł nierecenzowany i w związku z tym jeszcze bez poprawek. Był on redagowany przez trzy osoby, z których jedna ma chyba niejaki problem z logicznym zapisywaniem twierdzeń i dowodów. W wielu miejscach brakuje kwantyfikatorów i dopiero z dalszej części artykułu (dowodu) można się czasem zorientować, o co wcześniej chodziło w sformułowaniu.

Podsumowując tę część. Rezultaty zawarte w tych trzech artykułach są ciekawe. Metody użyte do ich otrzymania są co prawda całkowicie elementarne. Jednak, po pierwsze nie zawsze można użyć bardziej zaawansowane metody, a tak jak tutaj trzeba problem rozwiązać przez rozważenie szeregu przypadków, po drugie w niektórych dziedzinach (między innymi w kombinatoryce) bardziej cenione jest podanie elementarnego dowodu. Niezaprzeczalnym faktem jest kombinatoryczna biegłość autorów.

Niestety mam z tą rozprawą doktorską kilka problemów. Ich pośrednią przyczyną jest decyzja rady o pozwoleniu pisanie jej w języku angielskim.

W związku z tą decyzją doktorant wybrał bardzo minimalistyczną wersję złożenia pracy. Po prostu wkleił trzy artykuły i zaopatrzył je, niezbyt umiejętnie, we wstęp. Wyprodukowało to szereg problemów. Zaczynając od tego, że ani doktorant, ani pewnie nikt inny nie przejrzał ostatecznej wersji. I w związku z tym okazało się, że doktorat jest z filozofii. W czwartym rozdziale najpierw obowiązują oznaczenia z trzeciego, a za chwile bez żadnego ostrzeżenia, nieomal w tej samej linii, oznaczenia zmieniają się tak, żeby pasowały do artykułu i nie wiadomo o co chodzi. Żeby połączyć we wstępie te trzy artykuły zostały wpisane jakieś dziwne definicje, na podstawie których za graf uważa się tylko graf prosty. Inne grafy nie są grafami. Jednak w samych artykułach, czyli rozdziałach, już za takowe są uważane. Itd.

Drugim problemem jest jego długość. Co prawda całość jest nie tak całkiem krótka, ale... Po pierwsze wszystkie metody są elementarne, a krótsze prace pisze się raczej gdy stosuje się bardziej zaawansowaną matematykę. Po drugie praca jest współautorska. Jeśli podzielić by wyniki na autorów, okazałoby się, że na doktoranta przypada coś około

20 stron, co jest już raczej bardzo mało, przy tak niezaawansowanych metodach. Dodatkowo problem jest z tym współautorstwem. Co prawda w ostatnich czasach, niemal za normę przyjmuje się doktoraty oparte na artykułach wspólnych z promotorem, to jednak trzeci artykuł ma jeszcze jednego współautora. Nie ma pewności, czy ta współautorka nie użyje tej pracy do podobnych (lub innych) celów jak doktorant. To zaś już chyba jest niedopuszczalne.

Kolejny problem jest natury formalnej. Ustawa nakazuje, aby rozprawa doktorska prezentowała umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Tutaj wszystkie prace są współautorskie.

Rozprawę może stanowić monografia, zbiór opublikowanych artykułów naukowych, bądź samodzielna i wyodrębniona część pracy zbiorowej.

Wydaje mi się, że tutaj nie zachodzi żadna z tych możliwości. Jeżeli uznać by tę rozprawę za monografię, to byłby to raczej plagiat z trzech artykułów, których w większości (procentowo) doktorant nie jest autorem. Chodzi tu w szczególności o trzeci artykuł, który w większości nie został nawet zredagowany przez doktoranta, a jest wklejony niejako, jako jego do monografii. Lepiej i uczciwiej byłoby napisać jakiś wstęp i wskazać te trzy artykuły. Tu jednak też jest problem, gdyż artykuły nie są samodzielne, a trzeci nie jest publikowany. Jedyny ratunek stanowiłaby więc trzecia ewentualność. Z tego powodu poprosiłem o oświadczenia współautorskie. Niestety jak z nich wynika, nie da się wyodrębnić części pracy przynależnej doktorantowi.

Podsumowując.

Wyniki rozprawy są bardzo ładne i stanowiłyby wystarczający wkład w doktorat, gdyby były samodzielne, poprawnie zredagowane i postarano się by spełniały wymogi ustawy.

Jednak, w związku z uwagami przytoczonymi powyżej nie jestem do końca przekonany, czy rozprawa spełnia zwyczajowe warunki stawiane pracą doktorskim. Jeszcze większe wątpliwości mam co do warunków formalnych stawianych przez artykuł 187 ustawy. Co prawda w zawiadomieniu uwypuklono punkt 2, o którym mogę stwierdzić, że jest spełniony, jednak też zawarta jest prośba o konkluzję o spełnianiu wszystkich warunków ustawowych. A wszystkich warunków (punktu 3), według mojej oceny praca nie spełnia. Pomimo tego uważam, że wyniki mogłyby wystarczyć na rozprawę doktorską, ale musiałyby być ponownie zredagowane, tak by stanowiły spójną całość i najlepiej w języku polskim, aby nie kusić o ponowne zamieszczenie tekstów napisanych przez inne osoby w swojej monografii.


Mariusz Grech

Wrocław 12.02.2025