24 II 2025 Tomasz Wawak

Bardzo symetryczne rozmaitości hiperkählerowskie

Tomasz Wawak

Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jagielloński

2025

Abstract

G. Höhn and G. Mason sklasyfikowali wierne działania skończonych grup auotmorfizmów symplektycznych na rozmaitościach typu $K3^{[2]}$. Pośród nich jest 15 maksymalnych. Nazwijmy je $G_s^1, \ldots, G_s^{15}$. W tej rozprawie klasyfikujemy wszystkie pary trójki (X, h, G), gdzie (X, h) jest spolaryzowaną rozmaitością typu $K3^{[2]}$, G jest skończonym wiernym h-spolaryzowanym działaniem automorfizmów X, G zawiera G_s^i dla pewnego i jako właściwą podgrupę i G_s^i działa automorfizmami symplektycznymi na X. Konstruujemy też przykłady takich bardzo symetrycznych rozmaitości.

Centralnym problemem geometrii algebraicznej jest problem klasyfikacji rozmaitości algebraicznych. Oczekujemy, że każda gładka rzutowa rozmaitość algebraiczna może być przekształcona do minimalnego modelu czyli do fibracji rozmaitościami Fano albo do rozmaitości o dywizorze kanonicznym, który jest nef. Problem klasyfikacji sprowadza się wtedy do klasyfikacji minimalnych modeli. Rozmaitości o trywialnej klasie kanonicznej są minimalnymi modelami i znajdują się między dobrze poznanymi rozmaitościami Fano (o ujemnej klasie kanonicznej) i nieuporządkowanym zbiorem rozmaitości generalnego typu (o dodatniej klasie kanonicznej). Problem klasyfikacji rozmaitości o trywialnej klasie kanonicznej wiąże się z wieloma dziedzinami matematyki i jest intensywnie badany w wielu ośrodkach na całym świecie.

Drugą motywacją do badania rozmaitości o trywialnej klasie kanonicznej jest hipoteza symetrii lustrzanej pochodząca z fizycznej teorii strun. Hipoteza ta przewiduje dualność, która uporządkowuje takie rozmaitości w pary będące swoimi lustrzanymi odbiciami. Możemy obserwować tę dualność na dużym zbiorze przykładów jednak matematyczna teoria nie jest wystarczająco rozwinięta aby udowodnić ogólną postać hipotezy symetrii lustrzanej.

Przedstawione osiągnięcia naukowe dotyczą problemu klasyfikacji rozmaitości o trywialnej klasie kanonicznej. Aby opisać nasze wyniki zdefiniujmy najpierw główny obiekt badań.

Definicja 1. Zespoloną rozmaitość X wymiaru parzystego nazywamy rozmaitością hiperkählerowską jeżeli:

1. X jest kählerowska
2. X jest jednospójna i zwarta
3. $H^0(X, \Omega_X^2)$ jest generowane przez nigdzie nie znikającą dwu-formę ρ.

Przypomnijmy twierdzenie Beauville'a Bogomolova o klasyfikacji rozmaitości o trywialnej klasie kanonicznej:

Twierdzenie 1. Niech X będzie zespoloną rozmaitością kählerowską z trywialną klasą kanoniczną. Istnieje wówczas nierozgałęzione nakrycie X' rozmaitości X izomorficzne jako rozmaitość kählerowska ze skończonym iloczynem kartezjańskim

$$T \times \prod V_i \times \prod X_i$$

gdzie T jest torusem zespolonym, V_i są zwartymi rozmaitościami kählerowskimi takimi, że $\dim V_i = m_i$, które są jednospójne z grupą holonomi $SU(m_i)$, oraz X_i są zwartymi rozmaitościami kählerowskimi takimi, że $\dim X_i = 2m_i$, które są jednospójne z grupą holonomi $Sp(m_i)$.

Rozmaitości V_i nazywamy rozmaitościami Calabi–Yau natomiast rozmaitości X_i *rozmaitościami hiperkählerowskimi.*

Kodaira pokazał, że w wymiarze dwa wszystkie rozmaitości Hiperkählerowsk są deformacyjnie równoważne. W wyższych wymiarach sytuacja jest bardziej skomplikowana i nie ma ogólnych wyników klasyfikacyjnych. W każdym wymiarze większym lub równym 4 znamy dwie rodziny: deformacje schematu Hilberta n punktów na danej powierzchni K3 nazywane *typu* $K3^{[n]}$oraz deformacje schematu Hilberta $n+1$ punktów sumujących się do zera na powierzchni abelowej nazywane *typu* $K_n(T)$. Skonstruowane zostały przez O'Gradiego ponadto dwie rodziny w wymiarach 6 i 10 jako rozwiązania osobliwości odpowiednich przestrzeni moduli snopów na powierzchni abelowej lub powierzchni K3.

Celem rozprawy jest badanie rozmaitości hiperkählerowskich z dużymi skończonymi grupami automorfizmów. Niech X będzie rozmaitością hiperkählerowską. Automorfizm X nazywamy *symplectycznym* jeśli zachowuje formę symplektyczną, w przeciwnym razie – *niesymplektycznym.* Grupa $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ ma naturalną strukturę kraty dzięki formie Beauville'a-Bogomolova [(1)] (vide [Bea83]). Jeśli X jest powierzchnią K3, ta forma indukuje formę przecięcia na grupie Picarda.

Dla działania skończonej grupy G na rozmaitości hiperkählerowskiej X, istnieje następujący ciąg dokładny.

$$1 \to \widetilde{G} \to G \to \mu_m \to 1, \tag{1}$$

gdzie μ_m jest grupą pierwiastków z jedności stopnia m dla naturalnej liczby m, a $\widetilde{G}$ to podgrupa wszystkich symplektycznych automorfizmów G. W przypadku K3 powierzchni, ten ciąg był jednym z podstawowych narzędzi w klasyfikacji skończonych grup symplektycznych automorfizmów na K3 powierzchniach autorstwa S. Mukai'a ([Muk88]). Mi. in. w pracach [Kon99, BS21, BH21] zajęli się rozszerzeniami tych grup do dalej skończonych ale już niekoniecznie symplektycznie działających grup automorfizmów.

Naszym celem jest podążanie za tym schematem na podstawie przedstawionej w [HM19] klasyfikacji skończonych grup automorfizmów symplektycznych na rozmaitościach typu $\mathrm{K3}^{[2]}$. Wśród nich jest 15 maksymalnych. Dokonujemy klasyfikacju rozmaitości typu $\mathrm{K3}^{[2]}$ z działaniami skończonych grup G, takich że $\widetilde{G}$ jest jedną z tych 15 grup. Nazywamy te rozmaitości *bardzo symetrycznymi.* Rozprawa w dużej mierze bazuje na wcześniejszych artykułach [Waw22, BMW24, BW24].

Do otrzymania rezultatów, używamy systemów obliczeniowych [GAP21, MAGMA, M2].

Omówienie wyników

Głównym wynikiem pracy jest poniższa klasyfikacja bardzo symetrycznych rozmaitości typu $\mathrm{K3}^{[2]}$

#	$(h^2, \mathrm{div} h)$	G_s	m	T_X	L^{G_s}	#var	K3	ex
1.	(2, 1)	$L_2(11)$	2	$\begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$	1	f	Y
2.	(2, 1)	$L_3(4)$	2	$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$	1	-	Y
3.	(2, 1)	A_7	2	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 70 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}$	1	f	Y
4.	(2, 1)	A_7	2	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 70 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \end{pmatrix}$	1	f	Y
5.	(2, 1)	$\mathbb{Z}_2 \times L_2(7)$	4	$\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$	1	t	Y
6.	(2, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : A_6$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$	1	-	-

(1) Czasem nazywanej formą Fujikiego-Beauville'a-Bogomolova.

7.	(2, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : S_5$	2	$\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 40\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 40\end{pmatrix}$	1	t	Y
8.	(2, 1)	M_{10}	2	$\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 30\end{pmatrix}$	1	f	Y/-[(2)]
9.	(2, 1)	M_{10}	2	$\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 30\end{pmatrix}$	1	-	Y/-[(3)]
10.	(4, 1)	$L_3(4)$	2	$\begin{pmatrix}12 & 0\\0 & 14\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\2 & 4 & 0\\0 & 0 & 14\end{pmatrix}$	1	f	-
11.	(4, 1)	$\mathbb{Z}_2^3 : L_2(7)$	2	$\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 6 & 2\\0 & 2 & 10\end{pmatrix}$	2	-	-
12.	(4, 1)	$\mathbb{Z}_2 \times L_2(7)$	2	$\begin{pmatrix}14 & 0\\0 & 28\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\2 & 8 & 0\\0 & 0 & 14\end{pmatrix}$	1	f	-
13.	(4, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : A_6$	2	$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 24\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 24\end{pmatrix}$	1	-	-
14.	(4, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : A_6$	2	$\begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 8\end{pmatrix}$	1	f	-
15.	(4, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : S_5$	2	$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 40\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 40\end{pmatrix}$	1	-	-
16.	(4, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : S_5$	2	$\begin{pmatrix}8 & 0\\0 & 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 0 & 10\end{pmatrix}$	1	-	-
17.	(4, 1)	S_6	2	$\begin{pmatrix}12 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\2 & 4 & 0\\0 & 0 & 30\end{pmatrix}$	1	f	-
18.	(4, 1)	M_{10}	2	$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 30\end{pmatrix}$	1	f	-
19.	(4, 1)	M_{10}	2	$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 30\end{pmatrix}$	1	-	-
20.	(4, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : (S_3 \times S_3)$	2	$\begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 24\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 24\end{pmatrix}$	1	f	-
21.	(6, 1)	A_7	2	$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 70\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 70\end{pmatrix}$	1	f	-
22.	(6, 1)	A_7	2	$\begin{pmatrix}8 & 2\\2 & 18\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & 3 & 1\\3 & 6 & 1\\1 & 1 & 8\end{pmatrix}$	2	f	-
23.	(6, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : A_6$	2	$\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 8\end{pmatrix}$	1	-	-
24.	(6, 1)	$(\mathbb{Z}_3 \times A_5) : \mathbb{Z}_2$	2	$\begin{pmatrix}10 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\1 & 4 & 0\\0 & 0 & 30\end{pmatrix}$	1	f	-
25.	(6, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : (S_3 \times S_3)$	2	$\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 24\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 24\end{pmatrix}$	1	-	-
26.	(6, 1)	$3^{1+4} : 2.2^2$	2	$\begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$	1	f	-

(2) Co najmniej jedno spośród tego i następnego jest znane, ale nie wiemy, które i czy oba.
(3) Patrz wyżej.

27.	(6, 1)	$3^4 : A_6$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	1	f	-
28.	(6, 2)	$L_2(11)$	3	$\begin{pmatrix} 22 & 11 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$	1	-	Y
29.	(6, 2)	A_7	2	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \end{pmatrix}$	1	-	Y
30.	(6, 2)	$(\mathbb{Z}_3 \times A_5) : \mathbb{Z}_2$	6	$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$	1	-	Y
31.	(6, 2)	$3^{1+4} : 2.2^2$	4	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	1	-	Y
32.	(6, 2)	$3^4 : A_6$	6	$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	1	-	Y
33.	(8, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : A_6$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$	1	-	-
34.	(8, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : S_5$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$	1	f	-
35.	(10, 1)	$\mathbb{Z}_2^4 : S_5$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$	1	-	-
36.	(10, 1)	$(\mathbb{Z}_3 \times A_5) : \mathbb{Z}_2$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$	1	f	-
37.	(10, 1)	$(\mathbb{Z}_3 \times A_5) : \mathbb{Z}_2$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$	1	f	-
38.	(12, 1)	$L_3(4)$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$	1	f	-
39.	(12, 1)	$L_3(4)$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$	1	f	-
40.	(12, 1)	S_6	2	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$	1	f	-
41.	(12, 1)	M_{10}	2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$	2	f	-
42.	(12, 1)	$\mathbb{Z}_3^2 : QD_{16}$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$	2	-	-
43.	(12, 1)	$3^{1+4} : 2.2^2$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	1	f	-
44.	(14, 1)	$\mathbb{Z}_2 \times L_2(7)$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$	1	-	-
45.	(14, 2)	$L_3(4)$	6	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$	1	-	-
46.	(14, 2)	$\mathbb{Z}_2 \times L_2(7)$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$	1	-	-
47.	(16, 1)	$Q(\mathbb{Z}_3^2 : \mathbb{Z}_2)$	2	$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 14 \end{pmatrix}$	2	f	-

48.	(18, 1)	$3^1 : A_6$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	1	f	-
49.	(22, 1)	$L_2(11)$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$	1	f	-
50.	(22, 1)	$L_2(11)$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$	2	f	-
51.	(22, 2)	$L_2(11)$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$	1	t	Y
52.	(24, 1)	$\mathbb{Z}_2^1 : A_6$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$	1	-	-
53.	(24, 1)	$\mathbb{Z}_2^1 : (S_3 \times S_3)$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$	1	-	-
54.	(28, 1)	$L_3(4)$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$	1	f	-
55.	(28, 1)	$\mathbb{Z}_2 \times L_2(7)$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$	1	f	-
56.	(28, 1)	$\mathbb{Z}_2 \times L_2(7)$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$	1	f	-
57.	(30, 1)	M_{10}	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$	1	f	-
58.	(30, 1)	$(\mathbb{Z}_3 \times A_5) : \mathbb{Z}_2$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$	1	f	-
59.	(30, 2)	S_6	2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$	1	-	-
60.	(30, 2)	M_{10}	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$	1	-	-
61.	(30, 2)	$(\mathbb{Z}_3 \times A_5) : \mathbb{Z}_2$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$	1	-	-
62.	(40, 1)	$\mathbb{Z}_2^1 : S_5$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$	1	-	-
63.	(42, 1)	A_7	2	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$	2	f	-
64.	(70, 1)	A_7	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \end{pmatrix}$	1	f	-
65.	(70, 2)	A_7	6	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}$	1	t	-

Table 1: Klasyfikacja

Pierwsza kolumna opisuje polaryzację h w grupie Picarda gdzie h^2 to wartość formy Beauville'a-Bogomolova na h, a div$h$ to podzielność jako elementu kraty. W drugiej kolumnie G_s jak w 1, m jak w μ_m w 1, tak że razem opisują G największą grupę automorfizmów X zachowującą polaryzację h. Przez T_X i L^{G_s} oznaczamy macierze Grama odpowiednio kraty transcendentnej X tj. dopełnienia ortogonalnego grupy Picarda X w $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ i podkratę niezmienniczą $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ względem działania G_s. Kolumna #var mówi ile spolaryzowanych rozmaitości przypada na wiersz (wszytkie są biwymierne). Kolumna K3 mówi, czy rozmaitość jest biwymierna ze schematem Hilberta dwóch punktów na K3 ("t" oznacza, że tak jest, "f", że nie, a "-" niewiadomą). Ostatnia kolumna zawiera informację czy znamy konstrukcję przykładu explicite.

Konstrukcje przykładów

EPW sekstyki to hiperpowierzchnie w $\mathbb{P}^5$ opisane po raz pierwszy przez Eisenbuda, Popescu and Waltera ([EPW01]). Mają one kanoniczne podwójne nakrycie, a dla ogólnej EPW sekstyki, to nakrycie jest rozmaitością hiperkählerowską typu $\mathrm{K3}^{[2]}$ ([O'G06]). Nazywamy je EPW sekstyką. Opiszmy pokrótce tę konstrukcję.

Ustalmy sześciowymiarową przestrzeń zespoloną V_6 z formą objętości $vol\colon \bigwedge^6 V_6 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$. Rozważmy podwiązkę $F \subset \bigwedge^3 V_6 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_6)}$, której włókno $[v] \in \mathbb{P}(V_6)$ jest zadane przez:

$$F_v = \{\alpha \in \bigwedge^3 V_6;\ \alpha \wedge v = 0\}.$$

Niech $\mathbb{LG}(\bigwedge^3 V_6)$ będzie lagranżowskim grassmanianem parametryzującym lagranżowskie podprzestrzenie $\bigwedge^3 V_6$ i ustalmy $A \in \mathbb{LG}(\bigwedge^3 V_6)$.
Zdefiniujmy locusu degeneracji

$$Y_A[k] = \{[v] \in \mathbb{P}(V_6) |\dim(A \cap F_v) \geq k\}.$$

Locus $Y_A = Y_A[1]$ nazwiemy EPW sekstyką. Powiemy, że A nie zawiera rozkładalnych wektorów, jeśli nie ma niezerowych wektorów postaci $x \wedge y \wedge z$ (tj. $\mathbb{P}(A) \cap \mathrm{Gr}(3, V_6) = \emptyset$ w $\mathbb{P}(\bigwedge^3 V_6)$). Odtąd będziemy zakładać, że A nie ma rozkładalnych wektorów. Wtedy Y_A jest zawsze hiperpowierzchnią stopnia 6. Ważnym faktem dotyczącym Y_A jest to, że

$$\mathrm{Aut}(Y_A) = \{g \in \mathrm{PGL}(V_6) | (\bigwedge^3 g)(A) = A\} \tag{2}$$

i grupa ta jest skpńczona ([DK18, Proposition B.9]).
Niech

$$\begin{aligned}\mathbb{LG}(\bigwedge^3 V_6)^0 &= \{A \in \mathbb{LG}(\bigwedge^3 V_6) \mid \mathbb{P}(A) \cap \mathrm{Gr}(3, V_6) = \emptyset,\ Y_A[3] = \emptyset\} = \\ &= \{A \in \mathbb{LG}(\bigwedge^3 V_6) \mid \mathrm{Sing}\, Y_A = Y_A[2],\ \mathrm{Sing}\, Y_A[2] = Y_A[3] = \emptyset\}.\end{aligned}$$

Dla A from z powyższego podzbioru(otwartego w lagrańżowskim grassmanianie), istnieje kanoniczne nakrycie $\pi_A : \widetilde{Y}_A \to Y_A$ rozgałęzione wzdłuż $Y_A[2]$, które jest rozmaitością hiperkähleroską typu $\mathrm{K3}^{[2]}$. Rozmaitość $\widetilde{Y}_A$ ma kanoniczną polaryzację $H = \pi_A^* \mathcal{O}_{Y_A}(1)$, a obraz morfizmu $\widetilde{Y}_A \to \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\widetilde{Y}_A, H)^\vee)$ jest izomorficzny z Y_A.
Każdy automorfizm Y_A indukuje automorfizm $\widetilde{Y}_A$, który ustala klasę H ([DK18, Proposition B.8(b)]). W drugą stronę, każdy automorfizm $\widetilde{Y}_A$, który ustala H, indukuje izomorfizm $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\widetilde{Y}_A, H)^\vee) \cong \mathbb{P}(V_6)$, zatem też i Y_A. Oznaczmy przez $\mathrm{Aut}_H(\widetilde{Y}_A)$ grupę automorfizmów ustalających klasę H, przez $\mathrm{Aut}^s_H(\widetilde{Y}_A)$ jej podgrupę automorfizmów symplektycznych a przez ι inwolucję nakryciową π_A.

Proposition 0.1 (Kuznetsov). *Niehc $A \subset \bigwedge^3 V_6$ będzie podprzestrzenią lagranżowską bez wektorów rozkładalnych. Zachodzi*

$$\mathrm{Aut}_H(\widetilde{Y}_A) \cong \mathrm{Aut}(Y_A) \times \langle \iota \rangle$$

gdzie $\mathrm{Aut}(Y_A)$ *odpowiada* $\mathrm{Aut}^s_H(\widetilde{Y}_A)$.

We wspólniej pracy z Simonem Billim [BW24], skonstruowaliśmy dwie podwójne EPW sekstyki z symplektycznym działaniem grupy. A_7. Następnie sam skonstruowałem przykłady dla grup $L_3(4)$ i M_{10} (później użyte do konstrukcji nowych rozmaitości w[BMW24]).

Ogóla metoda to rozważenie reprezentacji szukanej grupy na $\mathbb{P}(V_6)$, policzenie jej trzeciej potęgi zewnętrznej, sprawdzenie, czy tak otrzymana reprezentacja jest rozkładalna i czy składniki rozkładu należą do $\mathbb{LG}(\bigwedge^3 V_6)^0$.

References

[Bea83] A. Beauville. Variétés Kählériennes dont la première classe de Chern est nulle. *Journal of Differential Geometry*, 18(4):755 – 782, 1983. doi:10.4310/jdg/1214438181.

[BH21] S. Brandhorst and K. Hashimoto. Extensions of maximal symplectic actions on K3 surfaces. *Annales Henri Lebesgue*, 4:785–809, 2021. doi:10.5802/ahl.88.

[BMW24] S. Billi, S. Muller, and T. Wawak. On birational automorphisms of double EPW-cubes. Available at https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.15510, 2024.

[BS21] C. Bonnafé and A. Sarti. K3 surfaces with maximal finite automorphism groups containing M_{20}. *Annales de l'Institut Fourier*, 2021.

[BW24] S. Billi and T. Wawak. Double EPW-sextics with actions of A7 and irrational GM threefolds. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 152(4):857–868, 2024.

[DK18] O. Debarre and A. Kuznetsov. Gushel-Mukai varieties: Classification and birationalities. *Algebraic Geometry*, page 15–76, Jan 2018. doi:10.14231/ag-2018-002.

[EPW01] D. Eisenbud, S. Popescu, and C. Walter. Lagrangian subbundles and codimension 3 subcanonical subschemes. *Duke Mathematical Journal*, 107(3):427–467, 2001.

[GAP21] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1*, 2021. URL `https://www.gap-system.org`.

[HM19] G. Höhn and G. Mason. Finite groups of symplectic automorphisms of hyperkähler manifolds of type $K3^{[2]}$. *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica (New Series)*, 14:189–26, 2019.

[Kon99] S. Kondo. The maximum order of finite groups of automorphisms of K3 surfaces. *American Journal of Mathematics*, 121:1245–1252, 12 1999. doi:10.1353/ajm.1999.0040.

[M2] D. R. Grayson and M. E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

[MAGMA] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust. The Magma algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3-4):235–265, 1997. doi:10.1006/jsco.1996.0125. Computational algebra and number theory (London, 1993).

[Muk88] S. Mukai. Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group. *Inventiones Mathematicae*, 94:183–221, 02 1988. doi:10.1007/BF01394352.

[O'G06] K. G. O'Grady. Irreducible symplectic 4-folds and Eisenbud-Popescu-Walter sextics. *Duke Mathematical Journal*, 134(1):99–137, 2006.

[Waw22] T. Wawak. Very symmetric hyper-Kähler fourfolds, 2022. doi:10.48550/ARXIV.2212.02900.