prof. dr hab, Andrzej Kisielewicz
Politechnika Wrocławska

Oceny rozprawy doktorskiej mgra Gabriela Jakóbczaka "Graph coloring games"

1. Omówienie pracy

Przedmiotem rozprawy są dwie nowo zdefiniowane gry kolorowania grafów: kolorowania większościowego i kolorowania spójnego (*majority coloring game*, *connected coloring game*). Klasyczna gra kolorowania grafów polega na naprzemiennym kolorowaniu wierzchołków danego grafu G z zachowaniem warunku właściwego kolorowania (*proper coloring*), to znaczy: kolor nadawany nowemu wierzchołkowi nie może być taki sam jak kolor któregokolwiek jego sąsiada, który już został pokolorowany. Kolory wybierane są przez graczy z ustalonego zbioru k kolorów, oznaczanych zwykle liczbami od 1 do k. Najmniejsze k takie, że zaczynający grę gracz A ma strategię pozwalającą uzyskać właściwe pokolorowanie całego grafu G nazywa się jego *rozgrywaną liczbą chromatyczną* (*game chromatic number*) i oznaczana jest symbolem $\chi_g(G)$. Jest ona oczywiście nie mniejsza niż zwykła liczba chromatyczna $\chi(G)$ grafu, tzn. minimalna ilość kolorów, dla której istnieje właściwe pokolorowanie grafu G.

W przedstawionej rozprawie doktorskiej rozważane są dwa warianty klasycznej gry. W *kolorowaniu większościowym* warunek właściwego pokolorowania osłabiony jest do wymogu, żeby liczba sąsiadów pokolorowanych (dotychczas) tym samym kolorem co aktualnie kolorowany wierzchołek v nie przekraczała nigdy połowy liczby wszystkich sąsiadów v (czyli połowy stopnia wierzchołka v w grafie G). Odpowiedni parametr minimalnej ilości kolorów potrzebnych dla gracza A do uzyskania w grze pełnego większościowego pokolorowania grafu G nazywa się *rozgrywaną większościową liczbą chromatyczną* (*majority game chromatic number*) i oznaczany jest przez $\mu_g(G)$. Można tutaj rozważać również odpowiedni parametr $\mu(G)$ w wersji bez grania, ale jest on o tyle nieciekawy, że nietrudno zauważyć, że $\mu(G) \leqslant 2$ dla dowolnego grafu G (to znaczy dwa kolory zawsze wystarczą, żeby graf pokolorować większościowo).

Dla odmiany, w *kolorowaniu spójnym* warunek właściwego pokolorowania jest wzmocniony wymogiem, żeby kolejny wierzchołek wybierany do pokolorowania tworzył graf spójny z dotychczas pokolorowanymi wierzchołkami.

Minimalna ilość kolorów potrzebna graczowi A do uzyskania w tej grze pełnego właściwego pokolorowania grafu, oznaczana $\chi_c(G)$, nosi nazwę *spójnej rozgrywanej liczby chromatycznej* (*connected game chromatic number*). Jeden wariant z drugim nie na nic wspólnego (poza wyjściowym pojęciem). Spójne kolorowanie ma sens tylko w przypadku gier.

Jeden z klasycznych algorytmów właściwego pokolorowania grafu polega na ustawieniu najpierw wierzchołków grafu G w porządku liniowym $v_1, \ldots, v_n$, a następnie nadawaniu kolejnym wierzchołkom najmniejszego dostępnego koloru spełniającego warunek właściwego pokolorowanie (wobec dotychczas pokolorowanych wierzchołków). Minimalna liczba kolorów potrzebna przy tym kolorowaniu nosi nazwę liczby kolorującej (*coloring number*) grafu G i oznaczana jest $\mathrm{col}(G)$. Ponownie mamy naturalną nierówność $\mathrm{col}(G) \geqslant \chi(G)$.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów. W rozdziale pierwszym mamy ogólne wprowadzenie do tematyki kolorowania grafów oraz opis struktury rozprawy. Rozdział drugi zawiera definicje, zarówno elementarne dotyczące grafów, jak i te odnoszące się do gier kolorowania grafów. Rozdział 3 zatytułowany "Majority coloring game" prezentuje rezultaty pracy opublikowanej w 2019 roku w *Discrete Applied Mathematics*, pod tym samym tytułem, napisanej przez autora rozprawy wspólnie z promotorami B. Boskiem i J. Grytczukiem. Rozdział 4 zatytułowany "Connected coloring game" zawiera rezultaty kolejnej wspólnej pracy tej samej trójki autorów, z lat 2017-2018, które nie doczekały się publikacji, jako że w 2019 ukazały się w zasobie arXiv artykuły innych autorów z podobnymi rezultatami, opublikowane później w *Discrete Applied Mathematics*. Autor rozprawy przekonywująco uzasadnia, że rezultaty tego rozdziału były osiągnięte przez niego i dwójkę promotorów niezależnie i wcześniej. Ostatni krótki rozdział dyskutuje cztery najbardziej interesujące, ciągle otwarte, przypuszczenia w tematyce rozprawy.

W Rozdziale 3, najciekawszy rezultat pokazuje, że rozgrywana większościową liczba chromatyczna grafu μ_g może być dowolnie duża, i to w ograniczonej klasie grafów dwudzielnych. Kontrastuje to drastycznie ze wspomnianym faktem, że nierozgrywany odpowiednik $\mu(G) \leqslant 2$ dla wszystkich grafów. Podobny rezultat na brak ograniczenia liczby μ_g autorzy uzyskali dla klasy grafów z liczbą kolorującą $\mathrm{col}(G) = 3$. Rozdział zawiera ponadto dwa rezultaty na ograniczenie liczby $\mu_g(G) \leqslant 3$ dla klasy drzew binarnych i dla specjalnych (pełnych) podpodziałów grafów, oraz ogólne ograniczenie $\mu_g(G)$ przez inny (bardziej złożony) parametr tzw. rozgrywaną liczbę kolorującą $\mathrm{col}_g(G)$.

Rozdział 4, dotyczący spójnego kolorowania grafów zawiera 11 stron różnego rodzaju uwag na temat tego nowego wariantu gry kolorowania grafu. W szczególności, są to różne oczywiste obserwacje lub uwagi, że przy pomocy takich samych lub nieznacznie zmodyfikowanych dowodów można uzyskać rezultaty analogiczne do tych uzyskanych dla klasycznego rozgrywanego kolorowania grafów. Dopiero w drugiej połowie rozdziału mamy dwa nowe rezultaty na temat ograniczenia spójnej rozgrywanej liczby chromatycznej $\chi_c(G)$ w klasach grafów zewnętrznie planarnych i triangulowanych zewnętrznie planarnych (przez 6 i 5, odpowiednio) oraz rezultat dowodzący, że w klasie grafów z liczbą kolorującą $\mathrm{col}(G) = 4$ liczba $\chi_c(G)$ jest nieograniczona (dla klasy z liczbą $\mathrm{col}(G) = 3$ pozostaje to otwartym problemem).

2. Uwagi merytoryczne i ogólne

Najbardziej drastycznym niedociągnięciem całej rozprawy są próby sformułowania formalnej lub półformalnej definicji rozważanych parametrów związanych z grami. Dla przykładu, zupełnie nieudaną próbą jest Definicja 2.1. Pomylone są zmienne c_i z wartościami kolorów c_i, brakuje warunków na różność kolejnych wybieranych wierzchołków i spełnienie warunku prawidłowego pokolorowania na każdym kroku. W prezentowanej formie Definicja 2.1 jest nie do przyjęcia i w żaden sposób nie przyczynia się do rozjaśnienia wywodu, lecz właśnie z powodu niepoprawności, wprowadza zamieszanie. Podobnie jest z Definicjami 2.9 i 3.1. Trochę dziwię się, że promotorzy nie zwrócili na to doktorantowi uwagi. Myślę, że warto, aby autor rozprawy spróbował sam dla siebie sformułować w pełni poprawną formalną definicję i zobaczył ile jest z tym kłopotu. Pomoże to w prawidłowym zrozumieniu roli i sensu formalnego zapisu w pracach matematycznych.

Drugi problem to nieścisłość i niejasność w definicji gry spójnego kolorowania i związanej z tym Definicji 4.1. Logicznie wydaje się, że definicje te dotyczą tylko grafów spójnych (choć nie jest to zaznaczone). Wtedy bez wątpienia są poprawne i wszystkie rezultaty się zgadzają. Jednak pewne wzmianki w dalszym ciągu mogą sugerować, że chodzi także o grafy niespójne. Na przykład, Hipoteza 5.4 i Rysunek 14 sugerują, że w grę wchodzą także grafy niespójne. Ale wtedy Definicja 4.1 wymagałaby jakiegoś uściślenia. Brak ściślejszej definicji wprowadza niepotrzebne zamieszanie.

Z pomieszaniem pojęć mamy też pod koniec Rozdziału 2 na stronie 19. Definicja *marking game* jest niepoprawna. Chodzi o zminimalizowanie liczby wstecznych sąsiadów, a nie liczby $\mathrm{col}(G)$ (która jest stała dla danego grafu G i niezależna od porządku wierzchołków). Następująca po tym Definicja 2.9. dotyczy właśnie tej liczby, a nie jak błędnie jest napisane liczby rozgrywanej $\mathrm{col}_g(G)$.

Ogólnie, rozprawa jest mocno niejednorodna. Rozdział 3, bazujący na opublikowanej pracy z dwoma współautorami mocno kontrastuje z pozostała częścią rozprawy, której zarzucić można liczne błędy językowe i niezbyt udaną momentami matematyczną prezentację. Dziś istnieją znakomite narzędzia językowe pozwalające uzyskać bardzo poprawny angielski tekst. Najwyraźniej autor nie uznał za stosowne poddać swój tekst takiej automatycznej weryfikacji. Wygląda też na to, że weryfikacja prezentacji matematycznej przez promotorów była raczej powierzchowna.

Niemniej, chociaż moja uwaga dotyczy również prezentacji niektórych dowodów, po dokładniejszym wejrzeniu, byłem w stanie je zrozumieć i wszystkie dowody uważam za poprawne.

3. Konkluzja

Bez wątpienia przedłożona mi do oceny rozprawa stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej. Pewne wątpliwości nachodzą mnie przy stwierdzeniu, że rozprawa pokazuje umiejętność autora samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Brakuje mi oświadczenia współautorów, które mogłoby mnie upewnić w tej kwestii, ale rozumiem, że przy rozprawach doktorskich nie ma ani takiego ustawowego wymogu, ani takiego zwyczaju. Zakładam więc, że wkład wszystkich autorów w uzyskanie wyników jest równy i wynosi po około 30 procent. Przy tym założeniu, stwierdzam, że rozprawę można uznać za czyniącą zadość zwyczajowym i ustawowym wymaganiom dla rozpraw doktorskich, i w związku z tym rekomenduję nadanie mgrowi Gabrielowi Jakóbczakowi stopnia doktora nauk matematycznych.

Wrocław, w dniu 21 sierpnia 2023 r.

Andrzej Kisielewicz

Andrzej Kisielewicz

Niektóre uwagi szczegółowe

Jeśli chodzi o język angielski, to nie czuję się, aż tak kompetentny, żeby dyskutować kolejne błędy językowe, ale można (było) poradzić się na przykład Chata GPT, którego można poprosić o ocenę językowej poprawności fragmentu tekstu i o ewentualną korektę. Zwrócę natomiast uwagę na niektóre konkretne mankamenty matematycznej prezentacji. Autor nie wykonał też zwykłego spell-check (przynajmniej do ostatniej wersji rozprawy), bo w tekście są zwykłe literówki (niektóre z nich przywołuję poniżej poprzez wskazanie strony i zacytowanie)

str 5: "biewiększa"

str 14: "plane" zamiast "planar"

str 15: do definicji "tree" trzeba dodać "connected"

str 16: pojęcie subdivision jest szersze, chodzi tu o specjalny rodzaj podpodziałów

str 16: "grapg"

str 17: "Anout"

str 18: Nazwa "2-coloring number" jest niefortunna, bo sugeruje pokolorowanie dwoma kolorami; niefortunne jest też umieszczenie definicji tej liczby w rozdziale wstępnym, skoro pierwsze i jedyne odwołanie do tej definicji mamy dopiero na stronie 38. Najlepsze miejsce dla definicji użytych tylko raz w całej pracy, jest w miejscu użycia.

str 25: "a strategy" powinno być "the strategy"

str 26: w Theorem 3.4 powinno być "complete binary tree"

str 36: w Definicja 4.9 pojęcie "backward neighbor" nie zostało zdefiniowane, chociaż zostały zdefiniowane bardziej elementarne pojęcia. Nawiasem mówiąc, wcześniejsze zdefiniowanie tego pojęcia i użycie w Definicji 2.9, i kilku innych miejscach, rozjaśniłoby wywód.

str 37: opis "activation strategy" na tej stronie jest mało czytelny. Zmuszony byłem sięgnąć po oryginalny opis w pracy, gdzie ta strategia została zdefiniowana. Należałoby zacząć od wskazania warunków, gdy Alice wybiera do pokolorowania pierwszy niepokolorowany osiągalny wierzchołek (co ma miejsce w dwóch przypadkach), a dopiero potem opisać iteracyjną procedurę przechodzenia przez wsteczne wierzchołki. (Albo posłużyć się bardziej formalną, ale ścisłą definicją z pozostawieniem jej przeanalizowania czytelnikowi).

str 38: Na rysunku na tej stronie brakuje numeru, jak również wyjaśnienia oznaczeń. Nie wiadomo, który fragment tekstu się do niego odwołuje, co dotyczy zresztą kilku dalszych, numerowanych rysunków – nie ma do nich odwołania w tekście.

str 40: cały opis "monetary order" jest nieprzydatny, bo nie jest użyty w tej rozprawie.

str 44-45: początek opisu niejasny. Stwierdzone jest, że Alice musi najpierw zmodyfikować strategię; przydałoby się dodać dlaczego nie może użyć strategii niezmodyfikowanej. Niejasne jest, czy rozważamy jakąś (dowolną) triangulację rozważanego grafu, i do niej odnoszą się pojęcia "brotherhood" i podobne, czy też modyfikujemy te pojęcia?

str 46: "our it"

str 47: Czego przykładem jest Figure 12? Nie ma do niej odwołania w tekście.

str 47: "indeendent"

str 49: Czy "almost triangulated" to to samo co "triangulated"?

str 50: "Example 10" powinno być "Figure 10"

Andrzej Kisielewicz