Prof. Yuriy Tomilov
Zakład Analizy Funkcjonalnej
Instytut Matematyczny PAN

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Piotra Pikula „Backward extensions of weghted shifts on directed trees"

Przedłożona rozprawa doktorska dotyczy własności operatorów przesunięć ważonych, podstawowego działu teorii operatorów. Ta klasa operatorów dostarcza szeregu bardzo pożytecznych przykładów modelowych operatorów o żądanych własnościach, a jednocześnie badanie ogólnych klas operatorów (np. kontrakcji na przestrzeni Hilberta) często sprowadza się do badania dość szczególnych klas przesunięć ważonych (choć często z wagami operatorowymi).

Autor rozwija konstrukcje, idee i pomysły głębokiej pracy (lub raczej małej monografii) Z. Jabłoński, I.B. Jung, J. Stochel, Weighted shifts on directed trees, Mem. Amer. Math. Soc. 216 (2012), no. 1017, gdzie zostały stworzone podstawy teorii operatorów przesunięć ważonych na drzewach skierowanych. Teoria ta znacząco uogólniła klasyczną teorię przesunięć ważonych, wskazała szereg nowych efektów i była aktywnie rozwijana, między innymi, przez sporą grupę matematyków krakowskich oraz grupę matematyków z Indii, m.in. S. Chavana.

Oczywistym faktem jest to, że operator ograniczony na $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ($\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$) definiuje się swoim działaniem na elementach bazy standardowej $(e_n)_{n\geq 0}$ w $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, i np. klasyczne prawe przesunięcie $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ z wagą $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zwykle opisywane jako $S_{\boldsymbol{\lambda}} e_n = \lambda_n e_{n+1}, n \in \mathbb{Z}_+$, przeprowadzając w ten sposób wektory bazowe w wielokrotności podzbioru wektorów bazowych. Sposób w jaki elementy bazy odwzorowują się na podzbiór swoich wielokrotności może być owszem bardziej skomplikowany, ale wówczas własności odpowiedniego operatora jest ciężko kontrolować, i są one w pewnym sensie „niewidoczne". Zatem naturalnym pomysłem jest znalezienie ujęcia algebraicznego, w którym strukturę operatora da się opisać w sposób przejrzysty, a jednocześnie prowadzącego do istotnych zastosowań i pozwalającego odkryć nowe zjawiska w porównaniu do przypadku klasycznego. (Warto zauważyć, że pewne bardzo pożyteczne realizacje tego pomysłu pojawiały się już w latach 60-ch w pracach Foguela i Halmosa dostarczających kontrprzykłady do słynnego problemu B. Sz-Nagy'a o podobieństwie operatorów potęgowo ograniczonych na przestrzeni Hilberta do kontrakcji, gdzie rozważane były ważone operatory przesunięcia na kratach, o tym wspominam też niżej).

Takie ujęcie dostarcza podejście Junga, Jabłońskiego i Stochela, które wkłada badanie przesunięć w bardzo bogaty kontekst grafów, odpowiadających za kombinatorykę przekształceń wektorów bazowych, mianowicie kontekst przesunięć ważonych na drzewach skierowanych. Wymaga ono wyrafinowanego aparatu teorii grafów, istotnie korzysta z szeregu pojęć tej teorii, w szczególności grafów nieskończonych i wprowadza też nowe obiekty i narzędzia w ramach tej teorii. W pewnym sensie, operatory przesunięcia na drzewach skierowanych stanowią uogólnienie operatorów sąsiedztwa, odpowiadających grafom nieskończonym. Z kolei takie operatory sąsiedztwa są nieskończenie wymiarowym analogonem dobrze znanego pojęcia macierzy sąsiedztwa, pochodzącego z klasycznej teorii grafów skończonych. Przedłożona rozprawa jest kolejnym krokiem w tym kierunku. W ramach badania przesunięć na strukturach algebraicznych, wprowadza i bada ona nowe i dość pożyteczne pojęcie przesunięcia na lesie skierowanym i jednocześnie rozwija istniejącą teorię przesunięć na drzewach. Dość ciężko jest omówić jej podstawowe osiągnięcia nie wprowadzając zawilej i miejscami dość technicznej teorii algebraicznej. Zatem będę starał się przekazać raczej duch rozprawy, niż dokładne sformułowania w niej zawarte.

Pewne intuicje przekazuje opis operatora ważonego przesunięcia na lesie (a zatem drzewie) skierowanym podana niżej. Para $\mathcal{T} = (V, \mathsf{p})$ jest nazywana w rozprawie lasem skierowanym, jeśli V jest zbiorem niepustym, a funkcja $\mathsf{p}\colon V \to V$ jest taka, że z $n \in \mathbb{N}$, $v \in V$ i $\mathsf{p}^n(v) = v$, wynika $\mathsf{p}(v) = v$. Elementy zbioru $\mathsf{root}(\mathcal{T}) := \{u \in V\colon \mathsf{p}(u) = u\}$ nazywane są korzeniami lasu $\mathcal{T}$, zaś elementy V- wierzchołkami tego lasu, a funkcja p - funkcją rodzica. Jeśli $u, v \in V$ są wierzchołkami spełniającymi warunek $\mathsf{p}(v) = u \neq v$, to u jest nazywany rodzicem v. Z kolei elementy $\mathsf{Chi}(v) := \mathsf{p}^{-1}(v) \setminus \{v\}$ nazywane są *dziećmi wierzchołka* v. Drzewem skierowanym nazywany jest las skierowany, spójny jako graf, tzn. drzewem tym jest las skierowany, składający się z jednego drzewa. Dla lasu skierowanego $\mathcal{T} = (V, \mathsf{p})$ i rodziny wag zespolonych $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v\in V}$ takich, że $\lambda_v = 0$ dla $v \in \mathsf{root}(\mathcal{T})$, ograniczony operator $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ przesunięcia ważonego w $\ell^2(V)$ ma postać $S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v = \sum_{u\in\mathsf{Chi}(v)} \lambda_u e_u$, gdzie $\{e_v : v \in V\}$ jest bazą ortonormalną w $\ell^2(V)$. W tym ujęciu klasyczne przesunięcie w prawo na $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ może być rozważane jako przesunięcie na drzewie skierowanym $\mathcal{T} = (\mathbb{Z}_+, \mathsf{p})$, zakładając, że $\mathsf{p}(0) = 0$ i $\mathsf{p}(n+1) = n$, $n \geq 0$.

Przechodząc do szczegółowego omówienia rozprawy zauważę, że mimo jej dość skromnego rozmiaru, jest ona dość bogata w wyniki i obserwacje, które w całości jest ciężko omówić (nawet pobieżnie) w tej krótkiej recenzji. Zatem skupię się na wybranych rezultatach najbardziej wartościowych z mojego punktu widzenia. Zaznaczę, że rozprawa częściowo opiera się na opublikowanej pracy autora P. Pikul, Backward extensions of weighted shifts on directed trees, Integral Eq. Op. Theory **94** (2022), no. 3, No. 26. (Fakt ten nie jest wspomniany w rozprawie, być może z tego powodu, ze praca ukazała się już po złożeniu rozprawy.)

Rozprawa doktorska mgra Pikula składa się ze wstępu, zawierającego ogólne omówienie rozprawy wraz z niezbędnymi oznaczeniami i podstawową terminologią, pięciu rozdziałów, bibliografii oraz spisu 14-tu rysunków zawartych w rozprawie (ostatnie nieco oddaje specyfikę rozprawy). Pierwszy, dość krótki rozdział w miarę wyczerpująco wprowadza w tematykę rozprawy i podaje niektóre motywacje do badań w niej zawartych. (Ten rozdział należałoby nieco rozbudować, ponieważ tematyka rozprawy dotyczy dość nowego kierunku badań.) Drugi rozdział rozprawy jest całkowicie poświęcony wprowadzeniu pojęć lasu i drzewa skierowanych, wyjaśnieniu ich podstawowych własności i struktury, oraz związków pomiędzy tymi pojęciami. O ile drzewa skierowane zostały dokładnie zbadane w pracy Junga, Jabłońskiego i Stochela wspomnianej wyżej, o tyle pojęcie lasu, wydaje się, należy do autora rozprawy, i pozwala na wprowadzenie wygodnego formalizmu do rozważania problemów teorio-operatorowych, badanych w kolejnych rozdziałach (m.in. wsteczne rozszerzenie zakorzenionego drzewa skierowanego). Rozumowania zawarte w tym rozdziale są elementarne, ale niebanalne, i wymagają pomysłowości. Niektóre z konstrukcji wprowadzonych w tym rozdziale, np. sumy proste drzew i lasów oraz ich potęgi, są ściśle związane z teorią operatorów i, wydaje się, nie występowały w istniejącej literaturze (przynajmniej w tej postaci). W trzecim rozdziale autor definiuje przesunięcia ważone na lasach skierowanych i omawia ich związki z porównywalnie dobrze zbadanym pojęciem przesunięcia ważonego na drzewie skierowanym. Między innymi, pokazuje on, że klasa przesunięć ważonych na lasach skierowanych posiada szereg specyficznych wygodnych własności. Między innymi, klasa ta jest niezmiennicza względem potęg i sum prostych, a (w istocie) każde przesunięcie na lesie skierowanym jest sumą prostą przesunięć na drzewach skierowanych. Ponadto, mgr Pikul wykazuje, że ważone przesunięcia na lasach skierowanych pozwalają na usunięcie krawędzi z zerowymi wagami, i są unitarnie równoważne przesunięciu z wagami nieujemnymi. Są to dość proste, ale pożyteczne wyniki.

Rozdziały czwarty i piąty są kluczowymi rozdziałami rozprawy. W rozdziale czwartym, autor charakteryzuje ważone przesunięcia na lasach skierowanych, dla których ustalona potęga jest hiponormalną. To twierdzenie oraz szereg lematów (z których kilka posiada odrębną wartość) prowadzi do centralnego twierdzenia rozdziału, charakteryzacji lasów skierowanych, na których każde ważone przesunięcie hiponormalne jest potęgowo hiponormalne. Jak wykazuje mgr Pikul, takie lasy można opisać w terminach „geometrii" odpowiednich grafów. Jest to dobra ilustracja specyfiki abstrakcyjnego kontekstu grafowego dla przesunięć, ponieważ w sytuacji klasycznej potęgi każdego hiponormalnego przesunięcia ważonego są hiponormalne. Rozdział czwarty zawiera ponadto charakteryzacje subnormalnych i całkowicie hiperrozciągających przesunięć ważonych na lasach skierowanych. (Przypomnijmy, że ograniczony operator T na przestrzeni Hilberta jest nazywany całkowicie hiperrozciągającym („compeletely hyperexpansive") jeśli $A_n(T) := \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}T^{*j}T^j \leq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Pojęcie hiperrozciągalności zostało wprowadzone przez Athavale'ego i jest pojęciem w pewnym sensie dualnym (bądź dopełniającym) do pojęcia subnormalności zgodnie ze znanym opisem J. Aglera kontrakcji subnormalnych T przez warunek: $A_n(T) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.) Pierwsza charakteryzacja, używająca ciągi momentów Stieltjesa, jest dość bezpośrednim analogonem odpowiedniego twierdzenia dla przesunięć klasycznych należącego do Lamberta, zaś drugie twierdzenie wymaga pewnych nietrywialnych teorio-funkcyjnych rozważań dotyczących ciągów alternujących (choć też rozważania te są bliskie sytuacji klasycznej, badanej m.in. przez Jabłońskiego, Junga i Stochela). Te dwa wyniki są istotne dla rozważań autora w ostatnim, piątym rozdziale rozprawy. W tym rozdziale mgr Pikul bada dogłębnie skończone rozszerzenia wstecz dla przesunięć ważonych na drzewach zakorzenionych i ich rodzin, zdefiniowane na sumie zakorzenionej tych drzew. Aby wyjaśnić tematykę tego rozdziału, przypomnijmy, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ przesunięcie ważone $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ (w prawo) na $l^2(\mathbb{Z}_+)$ z wagami $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, należące do pewnej klasy K (np.

klasy operatorów subnormalnych), posiada rozszerzenie wstecz o k kroków z (tejże) klasy K, jeśli istnieje zestaw niezerowych $(\lambda_{-k}, \ldots, \lambda_{-1}) \subset \mathbb{C}$ taki, że przesunięcie ważone $S_{\boldsymbol{\lambda},k}$ (w prawo) na $l^2(\mathbb{Z}_+)$ z wagami $(\lambda_{n-k})_{n=0}^{\infty}$ należy do klasy K (Warto zauważyć, że $S_{\boldsymbol{\lambda},k}$ jest unitarnie równoważne obcięciu $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ na $\bigvee_{k=n}^{\infty} e_k$.) Takie rozszerzenia przesunięć są naturalną i użyteczną konstrukcją, dobrze zrozumianą w klasycznym przypadku. Zostały one włożone w ogólny kontekst przesunięć na drzewach skierowanych i dokładnie zbadane w pracy Jablońskiego, Junga i Stochela w Mem. AMS, wspomnianej wyżej. Korzystając z bogatej struktury algebraiczno-grafowej przesunięć, dostarczanej przez drzewa skierowane, autor rozwija rozważania Jabłońskiego, Junga i Stochela i rozpatruje wspólne rozszerzenie wstecz dla *rodziny* przesunięć, będące przesunięciem na drzewie nakrywającym drzewa wejściowe i rozszerzającym w sposób naturalny przesunięcia z zadanej rodziny. Wprowadza on pojęcie własności wspólnego rozszerzenia wstecz, gwarantującej, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ istnienie rozszerzenia wstecz o $(k+1)$ kroków dla każdego przesunięcia S_j z co najwyżej przeliczalnej rodziny $(S_j)_{j\in J}$ przesunięć na zakorzenionych drzewach skierowanych takiej, że $\sup_j \|S_j\| < \infty$, jest równoważne istnieniu wspólnego k-krokowego rozszerzenia wstecz dla całej rodziny $(S_j)_{j\in J}$ na drzewie będącym sumą zakorzenioną drzew dla poszczególnych przesunięć. Ta własność, jak pokazuje autor, posiada szczególną wartość dla klas przesunięć bliskich do klasy operatorów normalnych. Zaznaczmy, że własność wspólnego rozszerzenia jest daleka od bycia banalną. Dobrze ilustruje to udowodniony w rozprawie fakt, że klasa ograniczonych z dołu przesunięc ważonych na drzewach skierowanych nie posiada wspólnego rozszerzenia wstecz. Jednocześnie każde indywidualne przesunięcie z tej klasy posiada k-krokowe rozszerzenie wstecz dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Za pomocą dość wyrafinowanych argumentów, autor wykazuje, że klasy subnormalnych i potęgowo hiponormalnych przesunięć ważonych na drzewach zakorzenionych mają własność wspólnego rozszerzenia wstecz. Są to ważne wyniki, które na pewno będą miały ciekawe zastosowania. Na tej drodze, mgr Pikul otrzymuje także opisy przesunięć posiadających potęgowo hiponormalne i subnormalne rozszerzenia o k kroków wstecz. Charakteryzacje z rozdziału czwartego oraz techniki oparte na badaniu natury pewnych ciągów momentów Stieltjesa i ciągów alternujących odgrywają tu istotną rolę. Z drugiej strony, podany przez autora pomysłowy kontrprzykład wykazuje, że własność wspólnego rozszerzenia wstecz nie zachodzi dla klasy przesunięć ważonych całkowicie rozciągających o analogicznej strukturze grafowej. Mimo podanego kontrprzykładu, charakteryzując całkowicie rozciągające k-krokowe rozszerzenia wstecz dla przesunięć ważonych, autor udowadnia, że istnienie $(k+1)$-krokowych rozszerzeń wstecznych dla wszystkich elementów zadanej jednostajnie ograniczonej rodziny całkowicie rozciągających przesunięć ważonych na drzewach zakorzenionych implikuję istnienie k-krokowego rozszerzenia wstecz dla ńakrywającegoóperatora przesunięcia na sumie prostej zakorzenionej odpowiednich drzew. Ponadto, rozdział zawiera szereg spokrewnionych twierdzeń, miedzy innymi dość atrakcyjne twierdzenie o strukturze przesunięcia realizującego wspólne rozszerzenie.

Analityczne techniki rozprawy są bliskie metodom wypracowanym przez Jabłońskiego, Junga i Stochela (wspomn. praca w Mem. AMS) oraz pracom badającym sytuacje przesunięć klasycznych. Jednakże, wiele konstrukcji o podłożu teorio-grafowym, są nowe i wymagają inwencji. Pewien niedosyt budzi ograniczenie się autora do klas przesunięć ważonych związanych z pojęciem normalności. Jak wspominałem wyżej, konstrukcje przesunięć oparte na kombinatoryce obrazów wektorów bazowych były rozważane już przez Foguela-Halmosa, i okazały się niezwykłe pożyteczne (patrz też Halmos, Duke Math. J.(1972)). Dalsze rozwinięcie pomysłów Foguela-Halmosa w stronę bardziej zaawansowanych operatorów przesunięcia można znaleźć np. w pracach Müller, Tomilov, JFA (2007) i M. van Oosterhout, The Blum–Hanson property, M. Sc. Thesis, Delft Univ. of Technology, 2009, https://repository.tudelft.nl/ (ostatnia praca wkłada idee Foguela-Halmosa w kontekst grafów nieskończonych). Można byłoby się pokusić o badanie własności cykliczności, rachunków funkcyjnych, konstrukcji modeli etc., rozważając również np. zestawy przesunięć przemiennych. Ale być może jest to kwestia niedalekiej przyszłości.

Rozprawa jest starannie zredagowana, jej struktura jest dobrze przemyślana. Nie zauważyłem istotnych usterek matematycznych. Kilka zauważonych drobnych mankamentów, np „paper" w abstrakcie powinno być „thesis"; „... assume boundedness" w sformułowaniu Prop 5.3 jest bardzo niefortunne, ponieważ większość klas na wypunktowanej liście składa się z operatorów ograniczonych, „ ... are uniformly bounded" w sformułowaniu Th. 5.27 brzmi niepoprawnie (jednostajnie ograniczoną ma być rodzina bądź ciąg), etc., które w żaden sposób nie wpływają na moją wysoką ocenę rozprawy.

Przejrzałem większość dowodów i żaden z nich nie budzi moich zastrzeżeń. Wszystkie argumenty są klarowne, a większość twierdzeń jest obdarzona komentarzami oraz dyskusją wniosków.

Konkluzja: Recenzowana rozprawa doktorska stanowi istotny wkład w teorię operatorów. Wprowadzone pojęcia są pożyteczne i na pewno będą wykorzystywane w przyszłości, a zawarte w niej wyniki są oryginalne i często oparte na pomysłowych dowodach. Autor rozprawy wykazał się solidnym warsztatem z zakresu teorii operatorów i spokrewnionych zagadnień, oraz dużą samodzielnością. Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie mgra Pikuła do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

14.01.2023

Tomilov