Wrocław, 4.10.2022

dr hab. Anna Wysoczańska-Kula
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

---

# Recenzja rozprawy doktorskiej
# mgra Piotra Pikula pt.
# *Backward extensions of weighted shifts on directed trees*

---

Rozprawa doktorska mgra Piotra Pikula liczy 85 stron i składa się z rozdziału wstępnego, czterech rozdziałów stanowiących zasadniczą treść pracy oraz spisu literatury i spisu ilustracji. Dysertacja jest napisana w języku angielskim i dotyczy operatorów przesunięć wagowych na lasach skierowanych (ang. *directed forest*). Wszystkie wyniki (poza Twierdzeniem 3.10) dotyczą operatorów ograniczonych.

## 1. Zawartość pracy

W rozdziale wstępnym Doktorant nakreśla perspektywę badawczą, krótko opisuje zawartość poszczególnych rozdziałów oraz precyzuje oznaczenia.

Rozdział drugi zawiera definicję lasu skierowanego oraz innych związanych z nim pojęć (korzeń, liść, drzewo), a także dowody podstawowych własności lasów. Tutaj także opisane są operacje na lasach (suma prosta, suma ukorzeniona, rozszerzenie wsteczne i k-ta potęga) oraz wprowadzona jest definicja częściowego porządku na zbiorze lasów o tym samych zbiorze wierzchołków (Definition 2.12) – jej różne własności są opisane w Twierdzeniu 2.13 i Lemacie 2.15.

W Rozdziale 3 autor wprowadza pojęcie operatora przesunięć wagowych na lesie skierowanym. Jest to uogólnienie definicji przesunięć wagowych na drzewach skierowanych, rozważanej przez Jabłońskiego, Junga i Stochela w [18][1]. Także podstawowe własności takich operatorów udowodnione w tym rozdziale (charakteryzacja przesunięć ograniczonych, opis k-tych potęg czy unitarna równoważność każdego przesunięcia z przesunięciem o nieujemnych wagach) są (raczej bezpośrednimi) uogólnieniami odpowiednich wyników z [18]. W rozdziale tym autor wskazuje także korzyści płynące z rozważania klasy przesunięć wagowych na lasach raczej niż na drzewach: klasa ta jest zamknięta na sumy ortogonalne oraz potęgi.

Rozdział 4 rozprawy jest poświęcony charakteryzacjom przesunięć wagowych należących do trzech wybranych klas operatorów: potęgowo hiponormalnych, subnormalnych i całkowicie hiperekspansywnych. W szczególności, dla klas operatorów potęgowo hiponormalnych Doktorant wykazuje warunek konieczny i wystarczający na to, aby potęga przesunięcia wagowego była hiponormalna (Twierdzenie 4.1), a następnie bada, dla jakich lasów skierowanych zachodzi równoważność, że każde przesunięcie wagowe jest hiponormalne wtw, gdy jest potęgowo hiponormalne. Okazuje się (Twierdzenie 4.12), że własność ta zachodzi (dokładnie) dla lasów, których bezlistny nośnik (Definicja 2.25) jest bezwidlny. Warto podkreślić, że – ile Twierdzenie 4.1 jest uogólnieniem Twierdzenia 5.1.2 z [18] wykorzystującym podobne metody – o tyle

---

[1]Cytowania zgodne z rozprawą doktorską

Twierdzenie 4.12 (wraz z poprzedzającymi je lematami) nie ma swojego odpowiednika we wcześniejszych wynikach, a całe rozumowanie prowadzące do niego wymaga dużej pomysłowości i biegłości autora.

Treścią rozdziału 5 jest badanie istnienia wstecznych rozszerzeń przesunięć wagowych na drzewach ukorzenionych przy zachowaniu pewnej klasy $\mathcal{C}$ operatora. Takie rozszerzenie ma być zdefiniowane na grafie, w którym do oryginalnego korzenia dołączono graf liniowy o $k$ wierzchołkach $\omega_1, \ldots, \omega_k$ tak, że $\mathrm{Chi}(\omega_j) = \{\omega_{j-1}\}$ dla $j = 1, \ldots, k-1$. Dla trzech klas $\mathcal{C}$ operatorów badanych w rozdziale 4 (potęgowo hiponormalne, subnormalne, całkowicie hipereksapsywne) Doktorant znajduje zgrabne warunki równoważne na to, aby dane (niezerowe, ograniczone i właściwe) przesunięcie ważone klasy $\mathcal{C}$ posiadało wsteczne rozrzerzenie o $k$ kroków w klasie $\mathcal{C}$ (odpowiednio: Lemat 5.11, Twierdzenie 5.18 i Twierdzenie 5.23). Doktorant bada także, czy powyższe klasy mają *joint backward extension property* (własność wspólnego rozszerzenia wstecznego). Oznacza ona (mniej-więcej), że rozszerzenia przesunięć wagowych klasy $\mathcal{C}$ zdefiniowanych na składowych spójnych w pełni ukorzenionego lasu jest równoważne istnieniu rozszerzenia wstecznego na ukorzenionej sumie składowych spójnych. Okazuje się (Twierdzenie 5.8), że własność ta (jeśli prawdziwa), pozwala rozszerzać przeliczalne rodziny przesunięć ważonych danej klasy, każde zdefiniowane na drzewie ukorzenionym, na drzewa, będące **dowolnym** uzupełnieniem sumy mnogościowej wyjściowych drzew o skończonej głębokości (takiej samej dla wszystkich korzeni). W rozprawie własność wspólnego rozszerzenia wstecznego jest wykazana dla klasy operatorów potęgowo hiponormalnych i subnormalnych. Przykład 5.26 wykazuje, że nie zachodzi ona dla klasy operatorów całkowicie hiperekspansywnych (tylko implikacja w jedną stronę pozostaje prawdziwa – Twierdzenie 5.28).

Rozdziału 5 stanowi – w mojej ocenie - najistotniejszą część rozprawy, zawierając liczne wyniki nie będące prostym uogólnieniem wyników z pracy [18]. Przedstawione dowody zawierają liczne sprytne rozumowania i nieoczywiste szacowania.

Na koniec chciałabym zauważyć, że poza wynikami z teorii operatorów praca zawiera także ciekawe wyniki z teorii grafów (np. Twierdzenie 2.24 czy Propozycja 4.7) – nie będąc specjalistką w tej dziedzinie, nie potrafię stwierdzić, czy są one nowe.

## 2. Ocena rozprawy

Praca napisana jest w sposób przejrzysty i dokładny, dzięki czemu czyta się ją bardzo przyjemnie. Definicje i rezultaty często są uzupełnione bardzo pomocnymi przykładami (w tym rysunkami!) oraz komentarzami, w których Doktorant zwraca uwagę na pewne niuanse. W rozprawie znajdują się też liczne wprowadzenia do twierdzeń, które w opisowy sposób wyjaśniają znaczenie prezentowanych wyników. W wielu miejscach autor precyzyjnie odsyła do wcześniejszych faktów, definicji czy oznaczeń. Przedstawiona dysertacja jest napisana w sposób bardzo dojrzały, nieczęsto spotykany na tym etapie kariery naukowej.

W rozdziałach 2-4 zasadnicza większość przytaczanych rezultatów jest podana z dowodami - nawet jeśli są prostym uogólnieniem znanych wyników, czy też w przygotowanych przez Doktorata artykułach naukowych są pominięte jako proste lub standardowe. Co więcej, prowadzone rozumowania są opisane w sposób elegancki, zwykle wystarczająco szczegółowy, aby czytelnik mógł podążać tokiem myślenia autora. Uważam, że tak właśnie powinna być napisana rozprawa doktorska. Rozdział 5 niestety jest pod tym wzgledem znacznie słabszy – dowody są w standardzie publikacji naukowej, czyli bardzo często wymagają od czytelnika samodzielnego uzupełnienia lub doliczenia pewnych kroków.

Jak każda praca, ta również nie jest wolna od pewnych usterek redakcyjnych, z których kilka przytaczam poniżej. Podkreślam jednak, że nie są one na tyle znaczące, aby wpłynąć na bardzo pozytywną ocenę redakcji pracy.

- str. 12: W Lemacie 2.7(a) czy na pewno można wziąć dowolne $k_0$?
- str. 36: Sprawdzanie hyponormalności operatora odbywa się (dwukrotnie!) nie w oparciu o definicję przytoczoną na str. 7, ale w oparciu o warunek równoważny ($\|Tf\|^2 \geq \|T^*f\|$), który nigdzie się nie pojawia.
- str. 44: W dowodzie Twierdzenia 4.12, (b)$\Rightarrow$(a) brakuje wyjaśnienia, dlaczego można wybrać odpowiednią trójkę wierzchołków $u, v_1, v_2$ (kluczowy jest tu wybór za $u$ takiego wierzchołka, który sprawia, że graf nie jest bezwidlny).
- Rozdział 5: jak już wspomniałam wcześniej brakuje mi tutaj wyjaśnienia pewnych faktów, np. Wniosek 5.4 (zwłaszcza przypadek *power hyponormal*), dowód twierdzenia 5.23 (str.73, l.-6), dowód Wniosku 5.24 (pierwsza nierówność na str.74, l.-3).

## 3. Podsumowanie

Podsumowując, uważam, że mgr Piotr Pikul w przedstawionej rozprawie wykazał się zarówno umiejętnością rozwiązania nietrywialnych problemów matematycznych, wymagających zaawansowanej wiedzy z teorii operatorów i teorii grafów, jak i dojrzałością w ich prezentacji. Jego wyniki są oryginalne i ciekawe, a ich dowody – pomysłowe. Uważam, że przedłożona rozprawa spełania ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki i wnoszę o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

AKrzywoceńska-Ulle