prof. dr hab. Leszek Słomiński
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń

Toruń, 23 maja 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Damiana Jelity pt. „Selected risk-sensitive optimal stopping and impulse control problems"

Rozprawa doktorska mgra Damiana Jelity poświęcona jest badaniu ważnych problemów optymalnego stopowania i sterowania impulsowego z kryterium wrażliwym na ryzyko.

Rozwiązanie problemu optymalnego stopowania polega na znalezieniu optymalnego momentu zatrzymania τ maksymalizującego wartość zadanego funkcjonału od procesu zastopowanego w tym momencie zatrzymania. Z kolei celem badań dotyczących problemów sterownia impulsowego jest wyznaczenie optymalnych strategii $(\tau_i, \xi_i)_{i=1}^{\infty}$ maksymalizujących zadany funkcjonał od procesu, gdzie $(\tau_i)_{i=1}^{\infty}$ jest rosnącym ciągiem impulsowych momentów zatrzymania, a $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ ciągiem zmiennych losowych opisujących wartości procesu bezpośrednio po momentach zatrzymania $(\tau_i)_{i=1}^{\infty}$. Kryterium wrażliwości na ryzyko badanych w pracy problemów związane jest z wyborem formy rozważanych funkcjonałów, wykorzystujących postać tzw. entropijnej miary użyteczności. Autor pracy koncentruje się na przypadku parametru entropijnej miary użyteczności $\gamma < 0$, co odpowiada awersji do ryzyka. Warto dodać, że badanie problemów optymalizacyjnych z funkcjonałami wykorzystującymi taką entropijną miarę użyteczności jest istotnie trudniejsze niż badanie zagadnień z funkcjonałami o klasycznej, liniowej postaci.

Problematyka rozprawy zapoczątkowana została już w latach 70 i 80 XX wieku pracami na temat obwiedni Snella, równań Walda-Bellmana, metody penalizacji i nierówności wariacyjnych tak znanych matematyków jak Bensoussan, Bismut, El Karoui, J.-L. Lions, Menaldi, Peskir, Robin, Shiryaev, Stettner i Zabczyk. Z czasem tematyka ta stała się przedmiotem zainteresowań wielu badaczy zajmujących się zastosowaniami matematyki. W szczególności, w ostatnich latach pojawiły się liczne prace dotyczące zastosowań optymalnego stopowania i sterowania impulsowego w bardzo szybko rozwijającej się matematyce finansowej.

W mojej ocenie opisana wyżej problematyka rozprawy jest ważna w teorii optymalnego stopowania zarówno ze względu na ciekawy i trudny charakter rozważanych w niej problemów matematycznych, jak i na możliwe zastosowania.

Rozprawa doktorska mgra Damiana Jelity jest obszerną 166 stronicową pracą składającą się z pięciu rozdziałów i dodatku. Rozdział 1 jest bardzo dobrze napisanym wstępem do pracy. Zawiera definicje niezbędnych pojęć, skrócony opis głównych wyników i ogólny rys historyczny na temat wyników innych autorów na podobne tematy.

Rozdział 2, podobnie jak dodatek, też ma charakter wstępny. W rozdziale 2 znajdują się podstawowe definicje i fakty dotyczące procesów Markowa, sterowania impulsowego i entropijnej miary użyteczności. Z kolei dodatek zawiera pozostałe wykorzystywane w pracy fakty o bardziej technicznym charakterze, w tym fakty dotyczące operatora Bellmana, obwiedni Snella i multyplikatywnego równania Poissona.

Kolejne rozdziały 3, 4 i 5 są kluczowymi częściami pracy doktorskiej mgra Jelity. Zredagowane one zostały w oparciu o trzy prace opublikowane w *SIAM Journal on Control and Optimization (2020)* (wspólna z M. Piterą i Ł. Stettnerem), *Stochastic Processes and their Applications (2021)* (wspólna z M. Piterą i Ł. Stettnerem) i *Electronic Journal in Probability (2022)* (wspólna z Ł. Stettnerem).

Rozdział 3 poświęcony jest badaniom różnorodnych problemów optymalnego stopowania w przypadku, gdy rozważanym procesem jest fellerowski proces Markowa. Badania obejmują zarówno problemy optymalnego stopowania dla czasu dyskretnego, jak i dla czasu ciągłego. Uzyskane rezultaty posiadają w obu przypadkach bardzo podobną strukturę, ale ich dowody wymagają zastosowania różnorodnych technik dowodowych. W szczególności, w bardzo ciekawych twierdzeniu 3.2.6 (dla przypadku dyskretnego) i twierdzeniu 3.4.3 (dla przypadku ciągłego), przy ogólnych założeniach uzyskano ważne związki pomiędzy problemami optymalnego stopowania i odpowiednimi równaniami Bellmana. W konsekwencji uzyskano probabilistyczną postać zarówno dolnego jak i górnego rozwiązania równania Bellmana. Pozwoliło to po dodaniu naturalnego założenia o ograniczoności funkcji kosztu na udowodnienie zarówno jednoznaczności istnienia rozwiązania równania Bellmana, ciągłości uzyskanej w ten sposób funkcji wartości jak i uzyskanie jawnej postaci optymalnego momentu zatrzymania (patrz twierdzenie 3.2.14 dla przypadku dyskretnego i twierdzenie 3.4.11 dla przypadku ciągłego). Wyniki te są bardzo ważne, a ich dowody trudne technicznie. Bardzo ciekawe jest także twierdzenie 3.3.2 z tego samego rozdziału. Udowodniono w nim, że problemy optymalnego stopowania ze skończonym horyzontem czasowym, tzn. na skończonym przedziale $[0, T]$, $T > 0$, dla procesu startującego z $x \in \mathbb{R}$ zależą w sposób ciągły od (T, x). Dowód tego faktu jest wielokrokowy i wymagał wykorzystania bardzo różnorodnych narzędzi. Podoba mi się zwłaszcza pomysł użycia w drugim kroku dowodu odpowiednio zdefiniowanej dwójkowo-wymiernej aproksymacji funkcji wartości. Wydaje się, że mogłaby ona też służyć do numerycznego wyznaczenia rozwiązania problemu.

W rozdziale 4 badane są zarówno problemy sterowania impulsowego ze skończonym, jak i długookresowym horyzontem czasowym. Podstawowym narzędziem są w nim wcześniejsze wyniki z rozdziału 3 dotyczące konstrukcji optymalnych momentów zatrzymania. Najważniejsze wyniki na temat sterowania impulsowego na skończonym przedziale $[0, T]$ zawarte są według mnie w twierdzeniach 4.2.2, 4.2.5 i stwierdzeniu 4.2.9. Pierwsze z nich podaje w przejrzysty sposób konstrukcję strategii optymalnej. Z kolei w drugim ważnym twierdzeniu 4.2.5 dowodzone jest istnienie rozwiązania odpowiedniego równania Bellmana. Podoba mi się także wynik uzyskany w stwierdzeniu 4.2.9, w którym pokazano, że funkcja wartości ogólnego problemu jest granicą punktową odpowiednio zdefiniowanych dwójkowo-wymiernych funkcji wartości ze skończonymi liczbami impulsów. W przypadku problemów sterowania z długookresowym horyzontem czasowym maksymalizowany funkcjonał jest przy $T \to \infty$ granicą rozważanych wcześniej uśrednionych funkcjonałów. W tym dużo bardziej skomplikowanym przypadku udało się uzyskać odpowiedniki wyników o istnieniu strategii optymalnej i istnieniu rozwiązania odpowiedniego równania Bellmana. Zawarte są one odpowiednio w twierdzeniach 4.3.4 i 4.3.8. Ich dowody sa trudne technicznie i wymagały nowych narzędzi dowodowych. Chciałbym zwrócić uwagę na ciekawą technikę zmiany miary wykorzystaną w dowodach stwierdzeń 4.3.2, 4.3.6 i twierdzenia 4.3.8.

Kolejną istotną częścią rozprawy jest rozdział 5. Zawiera on między innymi przykłady ważnych klas fellerowskich procesów Markowa spełniających rozważane w pracy założenia. Podobają mi się w nim szczególnie przykłady 5.3.1 i 5.3.5 podające jawne wzory dla funkcji wartości w pewnych problemach optymalnego stopowania i pokazujące, że odpowiednie równania Bellmana mogą posiadać niejednoznaczne rozwiązania.

Rozprawa mgra Damiana Jelity została bardzo dobrze zredagowana. Zawiera tylko nieliczne błędy typograficzne. Wstęp oraz drugi rozdział stanowią bardzo dobre wprowadzenie do zasadniczej części pracy. Podoba mi się też umieszczenie pewnych technicznych faktów uzupełniających w dodatku.

W rozprawie badane były aktualne i trudne problemy, których zrozumienie i rozwiązanie wymagało nie tylko dobrej znajomości teorii procesów stochastycznych i teorii sterowania, ale także zapoznania się z wieloma artykułami naukowymi na temat zagadnień rozważanych w rozprawie. Metody dowodowe rozwijane w rozprawie są bardzo różnorodne i często trudne technicznie. Główne wyniki rozprawy zostały już opublikowane w bardzo dobrych czasopismach w trzech pracach współautorskich mgra Jelity z promotorami rozprawy. Warto zauważyć, że rozprawa zawiera też nowe wyniki, uzupełnienia i komentarze, które nie pochodzą z wcześniej opublikowanych prac. W rozprawie zabrakło mi trochę odniesienia się autora do dwóch zagadnień. Pierwsze dotyczy przypadku parametru entropijnej miary użyteczności $\gamma \geq 0$ (w pracy rozważany jest tylko przypadek $\gamma < 0$). Komentarze na temat możliwości uzyskania wyników na temat problemów optymalnego stopowania i sterowania impulsowego w przypadku nieujemnego parametru γ byłyby ciekawym uzupełnieniem wyników pracy doktorskiej. Zabrakło mi też odniesienia się autora do zagadnienia stabilności badanych problemów optymalizacyjnych ze względu na zbieżność rozważanych procesów i zbieżność filtracji. Rezultaty na ten temat w przypadku klasycznych problemów optymalnego stopowania są znane (patrz np. Aldous 1981, Lamberton i Pagès 1990, Coquet i Toldo 2007 itd.). Korzystając z Proposition 24 z ostatniej pracy wiadomo np., że własność stabilności ma miejsce w przypadku procesu quasi-lewostronnie ciągłego i jego dyskretyzacji z filtracjami naturalnymi przy założeniu ciągłości i ograniczoności funkcji kosztu. Wydaje mi się, że własność stabilności mogłaby być także przydatna w teorii wrażliwych na ryzyko problemów optymalnego stopowania. Ostatnie uwagi nie zmieniają mojej ogólnej wysokiej oceny rozprawy.

Podsumowując stwierdzam, że przedstawiona przez mgra Damiana Jelitę praca jest bardzo wartościową rozprawą doktorską i spełnia z naddatkiem wszystkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Wobec tego wnoszę o dopuszczenie mgra Jelity do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

L. Stettner