OPINIA O ROZPRAWIE DOKTORSKIEJ
ROUZBEHA MOHSENI
INTEGRABILITY, FOLIATIONS AND TWISTORS

Olsztyn, 18.07.2022

Prof. dr hab. Aleksy Tralle

Uniwersytet Wamińsko-Mazurski

1. Omówienie rozprawy

Rozprawa doktorska zawiera dwie grupy luźno powiązanych ze sobą wyników: pierwsza dotyczy sfoliowanej wersji teorii twistorów, a druga - zastosowań rzeczywistej wersji teorii Picarda-Vessiot do zagadnień całkowalności. Wydaje się, że te dwie części istotnie się różnią pod względem zarówno tematu badawczego, jak i metod, a łączy je tylko zainteresowanie autora geometrycznymi zagadnieniami fizyki teoretycznej. Ta uwaga nie jest krytyczna, ponieważ doktorat może zawierać dodatkowe wątki badawcze.

W skrócie, klasyczna teoria twistorów jest teorią wiązek stowarzyszonych postaci

$$SO(2n)/U(n) \to Z(M) \to (M^{2n}.g).$$

Takie wiązki posiadają zaskakująco bogatą geometrię oraz liczne zastosowania w fizyce, z najbardziej znaną wiązką twistorów $\mathbb{C}P^3 \to S^4$ na czele. Na przykład, na $Z(M)$ są dwie struktury prawie zespolone J^+, J^-, przy czym J^+ bywa całkowalną, a J^- nigdy. Całkowalność J^+ wymusza na M dodatkowe własności, a część z nich ma interpretację fizyczną.

Rozprawa doktorska Rouzbeha Mohseni zawiera bardzo obszerne omówienie wiązki twistorów i jej związków z innymi strukturami geometrycznymi, na przykład, z teorią f-struktur Yano. Wydaje się jednak, że zasadnicza część rozprawy zaczyna się od "Section 2.4", gdzie autor starannie opisuje podwiązki i koneksje na nich w przypadku wiązki reperów (materiał dobrze znany, ale jest uporządkowany z myślą o budowie wersji sfoliowanej). Następnie, rozważa się strukturę wiązki twistorów na podwiązce $D \subset TM$ dla D z włóknami parzystego wymiaru. W ten sposób powstaje wiązka

$$Z(D) = SO(D) \times_{SO(2q)} Z(q), Z(q) = SO(2q)/U(q).$$

Doktorat prezentuje liczne interpretacje geometryczne opisanej konstrukcji, w tym koneksji (w postaci horyzontalnej dystrybucji) na riemannowskiej submersji

$$\Phi : SO(D) \times Z(q) \to Z(D)$$

oraz f-struktur na $Z(D)$, a także rodzaj własności funktorialnych rozmaitości z w/w strukturami (ta część wydaje się dosyć bezpośrednia).

W zasadniczej części rozprawy autor omawia pojęcie foliacji riemannowskiej $(M, \mathcal{F})$, czyli najważniejszego obiektu rozprawy. Prezentacja jest oparta na klasycznej książce P. Molino (przez kocykle). Biorąc wiązkę normalną $Q = TM/T\mathcal{F}$ autor definiuje wiązkę twistorów normalnych jako

$$Z(M, \mathcal{F}) = \sum_{x \in M} Z(M, \mathcal{F})_x, Z(M, \mathcal{F})_x = \{J_x^Q : Q_x \to Q_x\}$$

gdzie J_x jest izometryczna struktura zepolona na Q_x. Używając opisu sfoliowanej rozmaitości riemannowskiej za pomocą kocyklu, Mohseni pokazuje, że moża określić transwerslane twistory i otrzymać foliację $\mathcal{F}_Z$ na $Z(M, \mathcal{F})$, której liście nakrywają liście $\mathcal{F}$. Autor ilustruje wprowadzone pojęcia opisując normalną koneksję Levi-Civita i jej i tensor krzywizny na wiąze normalnej (wydaje się, że konstrukcja jest ogólna i nie dotyczy konstrukcji twistorów). W tym duchu dowodzi się twierdzenia o "prostokreślnych" (developable) foliacjach Riemannowskich.

Najważniejszym wynikiem rozprawy jest następujące twierdzenie (Theorem 9).

Twierdzenie 1. *Niech $(M, g, \mathcal{F}, J)$ będzie rozmaitością transwersalnie symplektyczną i niech $(N, \mathcal{F}')$ będzie sfoliowaną rozmaitością Riemanna z normalną wiązką twistorów $\pi : Z(N, \mathcal{F}'_Z) \to N$. Jeśi $\psi : M \to Z(N, \mathcal{F}')$ jest transwersalnie J^--holomorficzne, to $\pi \circ \psi$ jest transwersalnie harmoniczne.*

Jak widać jest to sfoliowana wersja klasycznej charakteryzacji harmoniczności w języku twistorów. Dowód tego twierdzenia jest pozornie krótki, ale jego uzyskanie wymaga pełnego rozwinięcia sfoliowanej wersji twistorów.

Bardzo ważną częścią rozprawy jest rodział 3, traktujący o orbifoldach. Ten rozdział jest szczególnie mi bliski, ponieważ używam teorii orbifoldów w kontekście badań nad rozmaitościami Sasaki. Podejście do orbifoldów jako szczególnej wersji foliacji riemannowskich jest znane, ale autor rozprawy twórczo rozwinął wątek twistorów w tym kontekście, co mi szczególnie się spodobało. Na uwagę zasługuje Theorem 13 rozprawy, z którego wynika interesująca charakteryzacja konforemnej płaskości i anty-samo-dualności orbifoldowych metryk Riemannowskich w języku twistorów.

W związku z tym, że najbardziej interesującą część rozprawy omówiłem dosyć szczegółowo, pozwolę sobie na krótsze omówienie drugiej części, tym bardziej, że (moim zdaniem) pierwsza część jest wystarczająca jako rozprawa doktorska. Autor opisuje zagadnienie całkowalności układu dynamicznego w języku różniczkowej teorii Galois (differential Galois theory). Niestety, nie znalazłem w tej prezentacji nowych wyników. Jak słusznie zauważa doktorant, jest to "próba zrozumienia". W każdym razie, ten rozdział nie wpływa na moją ocenę całości.

2. Ocena

2.1. Ocena tematyki rozprawy. Tematykę rozprawy oceniam bardzo wysko, ponieważ jest to ważny temat w geometrii różniczkowej łączący geometrię zespoloną i geometrię foliacji z fizyką matematyczną. Szczególnie spodobała mi się ogólna koncepcja "sfoliowania" teorii twistorów, ponieważ rozszerza ona możliwości badawcze, daje asumpt do nowych pytań i potencjalnie może być ważniejsza dla zastosowań niż klasyczna teoria wiązek twistorów (na przykład, obejmuje orbifoldy, czyli względnie "oswojone" osobliwości).

2.2. Ocena wyników rozprawy. Niewątpliwym osiągnięciem autora jest zbudowanie kompletnej teorii sfoliowanej wersji teorii twistorów. Zbudowanie takiej teorii wymagało od autora nabycia sporej wiedzy i sporych umiejętności w zakresie teorii foliacji i geometrii zespolonej. Do ważnych wyników zaliczam charakteryzacje harmoniczności (w przypadku sfoliowanym - transwersalnej harmoniczności) i charakteryzację konforemnej płaskości i anty-samo-dualności. Wyniki rozprawy są nowe i koncepcyjnie ważne.

2.3. Ocena poprawności pracy. Przedstawione dowody głównych twierdzeń rozprawy są, moim zdaniem, poprawne.

2.4. Ocena prezentacji. Praca doktorska jest napisana względnie dobrze. Prezentacja rozprawy jest na ogół dobra. Widać, że Autor głęboko przemyślał temat i posiada stosowną wiedzę. Pewne moje zastrzeżenia budzi brak jasnego wkazania, które to twierdzenia są jednoznacznie autorskie, a które są uzupełnieniami, twierdzeniami z których się korzysta itd. Jako osoba dobrze znająca temat twistorów, nie miałem z tym większych problemów, uważam jednak to za wadę prezentacji. Ponadto, uważam za mankament pewną rozwlekłość, omawianie różnych wątków luźno związanych z głównym tematem i podanie szczegółów nie wykorzystywanych w dowodzie twierdzeń autorskich. Zdaje sobie jednak sprawę, że to jest kwestia gustu. Jedyna moja naprawdę krytyczna uwaga dotyczy podrozdziału 3.5. Wydaje się on bez związku z tematem rozprawy (a w każdym razie, prezentacja nie przekonała mnie, że jest inaczej).

2.5. **Ocena publikacji.** Rouzbeh Mohseni jest autorem/współautorem następujących publikacji:

(1) *Real Liouvillian extensions of partial differential fields*, SIGMA 17(2021), 095
(2) *Tame topology and non-integrability of dynamical systems*, preprint,
(3) *Symmetries of Einstein-Weyl manifolds with boundary*, Chebyshevskii sbornik 22(2021), 510-518,
(4) *Twistor spaces on foliated manifolds*, Internat. J. Math. 32(2021), (08)

Periodyki SIGMA i Internat. J. Math. są dobrymii czasopismami międzynarodowymi. Uważam, że publikacje tego poziomu są w pełni zgodne ze standardami stawianymi rozprawom doktorskim.

3. Konkluzja

Podsumowując uważam, że rozprawa spełnia wszystkie formalne i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. Rozprawa stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego znalezienia sfoliowanej wersji teorii twistorów. Wnioskuję o dopuszczenie Pana Rouzbeha Mohseni do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tralle