dr hab. Katarzyna Paluch, prof. UWr
Instytut Informatyki
Uniwersytetu Wrocławskiego
Joliot-Curie 15
50-383 Wrocław

Wrocław, 25.10.2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Michała Seweryna "Dimension of posets with cover graphs in minor-closed classes"

Rozprawa doktorska mgr. Michała Seweryna dotyczy posetów (zbiorów częściowo uporządkowanych), a dokładniej prezentuje szereg rezultatów szacujących wymiar posetów, których graf pokrycia należy do ustalonej klasy grafów zamkniętych na branie minorów.

1 Przegląd wyników

Rozdział drugi zajmuje się posetami, których graf pokrycia ma szerokość drzewiastą co najwyżej 2. Podczas gdy już w 1977 zostało pokazane, że posety, których graf pokrycia jest lasem (graf o szerokości drzewiastej 1) mają wymiar co najwyżej 3, w 1981 Kelly udowodnił, że grafy o ograniczonej szerokości drzewiastej nie mają ograniczonego wymiaru. Odpowiedź na pytanie o ograniczoność wymiaru posetów, których graf pokrycia ma szerokość drzewiastą co najwyżej 2 pojawiła się najpierw dla szczególnych podklas grafów, a ogólna wersja została rozwiązana w pracy [17], w której rozmiar takich posetów został oszacowany jako nieprzekraczający 1276. Dowód tego oszacowania jest skomplikowany i długi. Nowy wynik doktoranta (praca [29]) ustala wymiar posetów o grafie pokrycia mającym szerokośc drzewiastą co najwyżej 2 na niewiększy niż 12. W oszacowaniu tym został wykorzystany fakt, że każdy graf o szerokości drzewiastej co najwyżej 2 jest podgrafem grafu series-parallel. Graf series-parallel ma rozkład związany ze swoją konstrukcją, który można opisać za pomocą drzewa binarnego. Takie drzewo z kolei w dość naturalny sposób odpowiada rozkładowi drzewiastemu grafu. W oszacowaniu wymiaru rozważanych posetów dogodne okazało się wprowadzenie porządku liniowego na wierzchołkach grafu otrzymanego z przejścia in-order binarnego drzewa konstrukcji. Przy jego pomocy zbiór par nieporównywalnych elementów został podzielony na trzy zbiory i wymiar każdego z nich oszacowany. Przedstawione oszacowanie znacząco poprawia poprzednie. Dodatkowo jest znacznie prostsze i krótsze.

W rozdziale trzecim rozważane są posety o grafie pokrycia wykluczającym $K_{2,n}$-minor. Pokazane jest, że wymiar takich posetów jest ograniczony dla każdego całkowitego dodatniego n. Dowód tego twierdzenia opiera się o charakteryzację Dinga [5] grafów bez $K_{2,n}$-minora. W charakteryzacji tej ponownie pojawia się rozkład drzewowy opisujący powstanie dowolnego 2-spójnego grafu bez $K_{2,n}$-minora. Rozkład ten jest innego typu i znacznie bardziej skomplikowany niż w przypadku grafów series-parallel. Występuje w nim też bardzo ciekawa klasa grafów $\mathcal{P}$ z referencyjnym cyklem Hamiltona i cięciwach przecinających się w restrykcyjny sposób. Niemniej jednak to drzewo rozkładu również stanowi bazę w szacowania wymiaru posetu, który reprezentuje. W szacowaniu tym wykorzystana jest znana wcześniej praca [34] uzależniająca wymiar posetu od wymiaru tzw. rozszerzenia gadżetu i wysokości posetu. Wyniki tej pracy zostają odpowiednio zaadoptowane i powiązane z faktem, że drzewo rozkładu grafu pokrycia ma ograniczoną wysokość do pokazania ograniczenia wymiaru rozważanych posetów.

W rozdziale czwartym badane są posety bez $2 \times n$-minora. Udowodnione jest twierdzenie mówiące, że dla każdego ustalonego dodatniego całkowitego n wymiar dowolnego posetu bez $2 \times n$-minora jest ograniczony. Posiadanie $2 \times n$-minora przez graf zostaje powiązane z pewną wersją jego głębokości drzewiastej. Dowód twierdzenia jest oparty o twierdzenie Mengera o rozłącznych ścieżkach, twierdzenie Erdösa-Szekeresa o podciągach oraz odpowiednio zdefiniowany podgraf zwany modelem t-drabiny. W drugiej cześci rozdziału zaprezentowano wyniki z pierwszej części (dotyczące parametru wariantu głębokości drzewiastej oraz ograniczenia wymiaru) w ujęciu tzw. kolorowań scentrowanych.

Tematem piątego rozdziału jest wymiar posetów, których graf pokrycia jest grafem k-zewnętrznie planarnym. Główny rezultat tego rozdziału to wykazanie istnienia funkcji $f(k) \in O(k^3)$ takiej, że dowolny poset o grafie pokrycia k-zewnętrznie planarnym ma wymiar co najwyżej $f(k)$. Rezultat ten w konsekwencji oznacza również istnienie funkcji $g(h) \in O(h^3)$ takiej, że dowolny poset o wysokości h i planarnym grafie pokrycia ma wymiar co najwyżej $g(h)$. Wniosek ten poprawia znane wcześniej ograniczenie na wymiar, które było ustalone na $O(h^6)$. Rozdział piąty jest najdłuższym i najbardziej złożonym w rozprawie. W dowodzie wykorzystane są we wprawny sposób znane wcześniej narzędzia i fakty przydatne w analizie wymiaru posetów takich jak redukcja min-max, rozwinięcie alternujące (ang. unfolding), standardowy przykład, posety Kelly'ego, ale występuje również sporo elementów nowych. Bardzo pomysłowe i trafne okazuje się wprowadzenie drzew niebieskiego i czerwonego oraz porządku na kanonicznych ścieżkach świadczących (ang. witnessing paths) opartego na ruchu wskazówek zegara. Na ich podstawie możliwe jest zdefiniowanie kolejnych pojęć, które umożliwiają scharakteryzowanie własności posetu zawierającego duży przykład standardowy. Kolejne etapy dowodu polegają na zręcznym przejściu do posetu z coraz bardziej ustrukturyzowanym przykładem standardowym aż w koncowej fazie możliwe jest wskazanie w takim posecie posetu Kelly'ego (o odpowiednim rozmiarze) zawierającego zbiór zagnieżdzonych cykli, których istnienie przeczy k-zewnętrznej planarności grafu pokrycia posetu wyjściowego.

2 Strona redakcyjna

Rozprawa jest napisana bardzo dobrze. (Znalazłam jedynie trochę tzw. literówek.) Rozdział pierwszy jest wprowadzający, podaje potrzebne później pojęcia i twierdzenia z teorii grafów i posetów. Każdy z kolejnych rozdziałów tworzy niezależną całość (korzystającą z rozdziału pierwszego), zawiera zarysowanie kontekstu i prezentację rezultatów. Dowody są opisane precyzyjnie i odpowiednio ustrukturyzowane.

3 Konkluzja

W rozprawie zostały przedstawione cztery wyniki dotyczące wymiaru posetów. Dwa z tych rezultatów są opublikowane w bardzo dobrych czasopismach, dwa są samodzielnymi pracami doktoranta. Posety są jednym z najbardziej podstawowych i badanych pojęć w kombinatoryce o licznych zastosowaniach teoretycznych i praktycznych, również w informatyce. Rozważane problemy ustalające wymiar posetów o grafie pokrycia w danej klasie są naturalne i dobrze umotywowane. Uzyskane rezultaty istotnie poszerzają stan wiedzy w tematyce, a metody ich otrzymania są zaawansowane i interesujące. Wobec powyższego uważam, że rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie mgr. Michała Seweryna do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

K. Paluch

Katarzyna Paluch