FUNKCJA WEWNĘTRZNA

Autoreferat

Piotr Kot

Politechnika Krakowska
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
30-084 Kraków, ul. Podchorążych 1

Kraków, maj 2012

Spis treści

1. Wyniki składające się na osiągnięcie naukowe: Funkcja wewnętrzna

Przedstawimy poniżej opis osiągnięcia naukowego złożonego z jednotematycznego cyklu pięciu prac:

Literatura

[K1] P. Kot, Homogeneous polynomials on strictly convex domains. Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), no. 12, 3895–3903 (electronic).

[K2] P. Kot, A holomorphic function with given almost all boundary values on a domain with holomorphic support function. J. Convex Anal. 14 (2007), no. 4, 693–704.

[K3] P. Kot, Bounded holomorphic functions with given maximum modulus on all circles. Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), no. 1, 179–187.

[K4] Kot, Piotr Peak set crossing all the circles. J. Convex Anal. 16 (2009), no. 2, 515–521.

[K5] P. Kot. About boundary values in $A(\Omega)$ Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 4063-4079.

1.1. **Tło historyczne.** Problem znalezienia funkcji wewnętrznej w kuli jednostkowej $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ dla $n > 1$ został postawiony przez Rudina w 1965 roku. Przez długi czas sądzono, że nietrywialna funkcja wewnętrzna czyli holomorficzna, ograniczona i niestała funkcja której moduł radialnej granicy w prawie wszystkich punktach brzegu jest równy 1 - nie istnieje. Powód uzasadniający taką hipotezę był bardzo wiarygodny. Otóż gdyby taka funkcja istniała to musiałaby silnie oscylować w pobliżu każdego punktu brzegowego:

Jeśli bowiem $U \subset \partial\mathbb{B}_n$ jest zbiorem relatywnie otwartym oraz f jest niestałą, ograniczoną funkcją holomorficzną taką, że jej granice niestyczne f^* spełniają zależność $|f^*(z)| = 1$ dla prawie wszystkich $z \in U$, to istnieje $H \subset U$ podzbiór gęsty typu G_δ taki, że zbiór $f([0,1)z)$ gdy $z \in H$ jest gęstym podzbiorem koła jednostkowego w $\mathbb{C}$ (zobacz [R1, 19.1.3])

Zatem funkcja wewnętrzna nie może być ciągła w żadnym punkcie swego brzegu.

Co więcej można pokazać jeszcze bardziej patologiczne zachowania:

Bedford oraz Taylor [B1] pokazali że jeśli gradient funkcji wewnętrznej jest z przestrzeni L^2 gdy $n > 1$, to f musi już być funkcją stałą.

W tej sytuacji dużą niespodzianką stały się pierwsze konstrukcje A. Aleksandrova [A1] oraz E. Löwa [L1] nietrywialnych funkcji wewnętrznych. Od tego momentu zainteresowanie funkcjami wewnętrznymi wzrosło, co zaowocowało kolejnymi coraz ciekawszymi konstrukcjami. W pracy [D1] Yves Dupain modyfikując konstrukcję Aleksandrova otrzymał nietrywialną funkcję wewnętrzną, której gradient jest z przestrzeni L^1.

Pojawiły się też wyniki dla innych obszarów niż kula. Dzięki pracy E. Löwa [L2] poznaliśmy uogólnienie konstrukcji funkcji wewnętrznej dla obszarów ograniczonych silnie pseudowypukłych z brzegiem klasy C^2 lub ograniczonych słabo pseudowypukłych ale z brzegiem klasy C^∞. E. Löw uogólnił wyniki z pracy[L1] wykorzystując w tym celu "holomorphic support functions" :

Niech $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem z brzegiem klasy C^2 oraz $S \subset \partial\Omega$ będzie relatywnie otwarty. Powiemy, że Ω posiada "holomorphic support function" (HSF) na S jeśli każdy punkt $z \in S$ posiada otoczenie U w $\partial\Omega$ gdzie istnieje funkcja $\Phi \in C^1(\Omega \times U)$ taka, że $\Phi(\cdot, w)$ jest funkcją holomorficzną na Ω dla każdego $w \in U$, ponadto $\Phi(w, w) = 0$ oraz istnieją stałe C, C_1 takie, że:

(1) $\mathrm{Re}\Phi(z, w) \leq C \|z - w\|^2$ dla $(z, w) \in \partial\Omega \times U$.

(2) $\mathrm{Re}\Phi(z,w) \geq C_1 \|z-w\|^2$ dla $(z,w) \in \overline{\Omega} \times U$.

W szczególności tego typu HSF istnieją jedynie dla punktów brzegowych silnie pseudowypukłych. W słabo pseudowypukłych obszarach takie funkcje ulegają degeneracji w pobliżu punktów słabej pseudowypukłości. E. Löw stara się skonstruować funkcję holomorficzną f ciągłą do brzegu, której wartości brzegowe reprodukują z zadaną dokładnością ustaloną wcześniej funkcję ciągłą φ na brzegu. Udaje się to uczynić na "dobrym" zbiorze o dużej mierze. Następnie zwiększa w istotny sposób "dobry" zbiór dokładając kolejne holomorficzne poprawki w spsób indukcyjny. W tej sytuacji kluczowa jest umiejętność oszacowania miary "dobrego" zbioru. E. Löw uzyskuje żądane szacowanie wykorzystując fakt przynależenia Φ do klasy $C^1(\Omega \times U)$. Otóż jeśli $B(z,r) = \{w \in \partial\Omega : \|z-w\| < r\}$ jest kulą w $\partial\Omega$ oraz $m \in \mathbb{N}$, $a < 1$, $r < r_0$, to H^{2n-1} miara Hausdorfa części V "dobrego" zbioru zawartego w $B(z,r)$ dla którego $\cos m\mathrm{Im}\Phi \geq a$ na V jest szacowana z dołu: $H^{2n-1}(V) \geq C_3 \arccos a r^{2n-1}$.

1.2. **Holomorphic Support Function (HSF).** W pracy [K2] przedstawimy nową konstrukcję funkcji wewnętrznej. Wprowadzimy w tym celu nieco inną koncepcję "holomorphic support function" (HSF). Ze względu na podobne nierówności jak w pracy E. Löwa zachowamy identyczną nazwę.

Definicja 1.1. Rozważmy obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Dla dowolnego podzbioru borelowskiego ograniczonego $S \subset \partial\Omega$ powiemy, że $\Phi : \overline{\Omega} \times S \to \mathbb{C}$ jest HSF czyli "holomorphic support function" na S jeśli:

(1) $\Phi(\cdot, z)$ jest funkcją holomorficzną na Ω oraz ciągłą na $\overline{\Omega}$ dla $z \in S$.
(2) Istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że zachodzą nierówności:

$$\exp\left(-c_2 \|z-w\|^2\right) \leq |\Phi(z,w)| \leq \exp\left(-c_1 \|z-w\|^2\right) \tag{1.1}$$

dla $(z,w) \in \partial\Omega \times S$.

(3) Jeśli T jest podzbiorem zwartym w Ω, to $\sup_{(z,w)\in T\times S} |\Phi(z,w)| < 1$.

Naturalnym przykładem [K2, Example 2.1] obszaru posiadającego HSF jest oczywiście obszar silnie pseudowypukły ograniczony z brzegiem klasy C^2.

Idea konstrukcji funkcji wewnętrznej jest podobna jak w pracy E. Löwa. Niestety nasza HSF jest niższej regularności, więc nie uzyskamy tak dobrego szacowania "dobrego" zbioru jak E. Löw. Zamiast tego wykorzystamy własności funkcji holomorficznych o kontrolowanym wzroście w formie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.2. [K2, Theorem 3.2]*Niech S będzie ograniczonym podzbiorem borelowskim $\partial\Omega$. Załóżmy, że istnieje HSF dla S. Niech też $a \in (0,1)$. Wówczas istnieje naturalna liczba $N = N(a,S)$ taka, że jeśli $\varepsilon \in (0,1)$, T jest zwartym podzbiorem obszaru Ω, H jest ciągłą, rzeczywistą, silnie dodatnią ($\inf_{z\in\partial\Omega} H(z) > 0$) funkcją na $\partial\Omega$ oraz g jest funkcją ciągłą o wartościach zespolonych na $\partial\Omega$, to można znaleźć U otwarte otoczenie S w $\partial\Omega$ oraz holomorficzne funkcje $f_1, ..., f_N$ na Ω, ciągłe do brzegu i takie, że $\|f_j\|_T \leq \varepsilon$ oraz:*

(1) $|(f_j + g)(z)| - |g(z)| \leq |f_j(z)| < H(z)$ *dla* $j = 1, ..., N$ *oraz* $z \in \partial\Omega$*;*
(2) $aH(z) < \max_{j=1,...,N} |(f_j + g)(z)| - |g(z)|$ *dla* $z \in U$.

"Dobry" dla naszej konstrukcji zbiór będzie wskazywany przez warunek 2 z powyższego twierdzenia. Otóż jeśli mamy ustaloną σ miarę borelowską probabilistyczną na S, to istnieje indeks j_0 oraz podzbiór $V_{j_0} \subset U$ otwarty taki, że $\sigma(V_{j_0}) > \frac{1}{N+1}$ oraz $|f_{j_0}(z) + g(z)| = \max_j |(f_j + g)(z)|$ dla $z \in V_{j_0}$. Jak widać nie dysponujemy tak dokładnymi informacjami o "dobrym" zbiorze jak E. Löw, niemniej jednak powyższa własność okazuje się wystarczająca. Dla uzyskania z tegoż Twierdzenia 1.2 kolejnego przybliżenia f_j funkcji wewnętrznej wystarczy modyfikować H w taki sposób aby wpływ na wartości $f_1, ..., f_{j-1}$ z poprzednich kroków był minimalny oraz zbiory "dobre" V_j nie przecinały się.

Ostatecznie uzyskamy następujący rezultat:

Twierdzenie 1.3. [K2, Theorems 3.5] *Niech S będzie zbiorem borelowskim w $\partial\Omega$ takim, że $\sigma(S) = 1$ dla pewnej miary probabilistycznej σ. Załóżmy, że Ω dopuszcza HSF na S. Jeśli G jest półciągłą funkcją silnie dodatnią ($\inf_{z\in\partial\Omega} G(z) > 0$) na $\partial\Omega$ oraz g funkcją ciągła na $\overline{\Omega}$, to istnieje zbiór $\widetilde{S}$ borelowski w $\partial\Omega$ oraz niestała funkcja holomorficzna f na Ω spełniająca następujące własności:*

(1) $\sigma(\widetilde{S}) = \sigma(S) = 1$;
(2) *Istnieje $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ciąg funkcji holomorficzncyh na Ω, ciągłych na $\overline{\Omega}$, zbieżny lokalnie jednostajnie do f na Ω i taki, że $\lim_{n\to\infty} |g_n(z)| = G(z)$ dla $z \in \tilde{S}$ oraz $g_n(z) < G(z)$ na $\partial\Omega$.*
(3) *Jeśli $\gamma : [0, 1] \ni t \to \gamma(t) \in \overline{\Omega}$ jest ciągłą krzywą przecinającą $\partial\Omega$ nie stycznie w $\gamma(1) = z \in \widetilde{S}$, to istnieje ciąg $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, 1)$ taki, że $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} |f(\gamma(t_n))| = G(z)$.*

W powyższej konstrukcji wykorzystaliśmy uogólnienie przedstawionej już funkcji HSF. Definicja HSF ma drobną wadę - zbiór S z którym jest związana powinien być w pewnej dodatniej odległości od punktów w których dochodzi do degeneracji warunku (1.1). Aby usunąć ten mankament wprowadziliśmy definicję **dopuszczania HSF** na zbiorze borelowskim S:

Otóż powiemy, że Ω dopuszcza HSF na S jeśli istnieje ciąg zbiorów borelowskich $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ zawartych w $\partial\Omega$ takich, że $S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ oraz dla indeksu $i \in \mathbb{N}$ istnieje HSF na S_i.

Zauważmy teraz, że jeśli dla pewnego k naturalnego $\tilde{S} := \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ oraz $p_k : \tilde{S} \ni \xi \to p_k(\xi) \in \{i \in \mathbb{N} : \xi \in S_i\}$ będzie dowolną funkcją, to możemy zdefiniować HSF na $\tilde{S}$ jako

$$\Phi : \overline{\Omega} \times \tilde{S} \ni (z, \xi) \to \Phi_{p_k(\xi)}(z, \xi).$$

Zatem sumowanie skończonej ilości zbiorów borelowskich nie powoduje straty własności dopuszczania. Podobna sytuacja będzie dla przecięcia skończonej ilości zbiorów borelowskich. Rzecz jasna tak określona funkcja nie musi być nawet ciągła na zbiorze $\overline{\Omega} \times \tilde{S}$.

Dzięki tej definicji zbiór S może zawierać punkty dowolnie bliskie takim, w których dochodzi do degeneracji warunku 1.1.

Fakt ten ma istotne implikacje. Jeśli bowiem mamy obszary $\Omega_1, ..., \Omega_k$ dopuszczające HSF na zbiorze $S \subset \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \cap ... \cap \partial\Omega_k$, gdzie $\Omega = \bigcap_{j=1}^{k} \Omega_j$, to Ω dopuszcza HSF na S o ile S zawiera tylko "dobre" punkty tzn takie dla których ślad pewnego otoczenia U na $\partial\Omega_i$ zawiera[1] się w $\partial\Omega$. W szczególności przecinając skończoną ilość ograniczonych obszarów ślinie pseudowypukłych otrzymujemy obszar którego brzeg na ogół nie jest klasy C^2. Jednocześnie obszar ten dopuszcza HSF w naszym sensie w "dobrych" punktach. Dodajmy, że E. Löw rozważa obszary o brzegu klasy co najmniej C^2.

[1] $U \cap \partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ dla $i = 1, ..., k$

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że teza twierdzenia 1.3 zachodzi dla dowolnej σ miary borelowskiej probabilistycznej. Oczywiście dla uzyskania funkcji wewnętrznej potrzebujemy jeszcze twierdzenia [Kr, Theorem 8.4.1] o istnieniu granic niestycznych dla ograniczonej funkcji holmorficznej w obszarze o brzegu klasy C^2 i wówczas σ jest już stosowną miarą Hausdorffa. Nie mniej jednak istnieją nietrywialne zastosowania twierdzenia 1.3 w przedstawionej wersji:

Twierdzenie 1.4. [K2, Theorem 4.1] *Załóżmy, że zbalansowany, ograniczony obszar Ω dopuszcza HSF na $\partial\Omega$. Niech σ będzie probabilistyczną miarą borelowską kołowo niezmienną czyli: $\sigma(e^{i\varphi}T) = \sigma(T)$ gdy $\varphi \in \mathbb{R}$ oraz $T \subset \partial\Omega$ jest dowolnym podzbiorem borelowskim. Niech także G będzie dodatnią półciągłą z dołu funkcją na $\partial\Omega$ taką, że $G(z) = G(\lambda z)$ gdy $|\lambda| = 1$. Istnieje wówczas funkcja holomorficzna h taka, że $G(z) = \int_{\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}} |h(\lambda z)|^2 d\lambda$ dla σ-prawie wszystkich $z \in \partial\Omega$ oraz $\int_{\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}} |h(\lambda z)|^2 d\lambda \leq G(z)$ dla wszystkich $z \in \partial\Omega$.*

1.3. **Wielomiany jednorodne.** W kontekście problemów związanych z istnieniem funkcji wewnętrznej powstały też pewne prace dotyczące własności wielomianów ortogonalnych w kuli jednostkowej. W 1983 Ryll oraz Wojtaszczyk [W1] pokazali istnienie wielomianów jednorodnych p_m na $\mathbb{B}_n$ kuli jendostkowej n-wymiarowej takich, że $\|p_m\|_\infty \leq 1$ oraz $\|p_m\|_2 \geq \sqrt{\pi}2^{-m}$. Bezpośrednim wnioskiem okazał się brak zwartości u operatora $H_\infty(\mathbb{B}_n) \ni f \to f \in H_1(\mathbb{B}_n)$. Fakt ten wynika również z istnienia funkcji wewnętrznej. Co więcej wspomniane wielomiany wykorzystał Aleksandrov [A2] do uproszczenia konstrukcji funkcji wewnętrznej w kuli jednostkowej.

Kilka lat później w 1997 Wojtaszczyk podał liczbę naturalną K oraz konstrukcję $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ciągu wielomianów jednorodnych na $\mathbb{B}_n$ kuli n-wymiarowej wspólnie ograniczonych ($|p_m| \leq 2$), których suma kwadratów modułów kolejnych K wielomianów[2] jest co najmniej równa $\frac{1}{2}$. Podobne wielomiany na obszarach zbalansowanych, ograniczonych silnie wypukłych z brzegiem klasy C^2 stały się tematem pracy [K1]:

Twierdzenie 1.5. [K1, Theorem 2.6] *Istnieje liczba naturalna $K \in \mathbb{N}$ taka, że dla stałej $0 < \epsilon < 1$ oraz każdej pary D, T zwartych, kołowych i rozłącznych podzbiorów w $T, D \subset \partial\Omega$ można dobrać liczbę naturalną $m_0 = m_0(D, T, \epsilon) \in \mathbb{N}$ oraz ciąg p_m jednorodnych wielomianów stopnia m posiadających własności:*

(1) $|p_m(z)| \leq 2$ *dla* $z \in \partial\Omega$, $m > m_0$
(2) $\sum_{k=Km}^{K(m+1)-1} |p_k(z)|^2 \geq 0.25$ *dla* $z \in T$, $m > m_0$
(3) $\sum_{k=Km}^{K(m+1)-1} |p_k(z)|^2 \leq 2^{-(Km)^{1-\epsilon}}$ *dla* $z \in D$, $m > m_0$.

Wielomiany te można wykorzystać do rekonstrukcji f funkcji holomorficznej ciągłej do brzegu na podstawie wartości normy $\|f\|_z := \sqrt{\int_0^1 |f(e^{2\pi i t} z)|^2 dt}$ w punktach brzegowych $z \in \partial\Omega$. Otóż:

Twierdzenie 1.6. [K5, Theorem 3.3] *Niech $g \in A(\Omega)$ oraz h będzie funkcją ciągła na $\partial\Omega$ spełniającą nierówność $\|g\|_z < \|h\|_z$ dla $z \in \partial\Omega$. Wówczas istnieje $f \in A(\Omega)$ funkcja holomorficzna ciągła do brzegu taka, że $\|g + f\|_z = \|h\|_z$ dla $z \in \partial\Omega$. Dodatkowo można uczynić f dowolnie małą na zadanym zbiorze zwartym $F \subset \Omega$ oraz zerującą się do zadanego rzędu w punkcie 0.*

[2] $\sum_{j=1}^{K} |p_{m_j}(z)|^2 \geq \frac{1}{2}$ gdy $N \leq m_1 < m_2 < ... < m_K \leq 2N$

Okazuje się, że wielomiany te można tak zmodyfikować aby uzyskać wynik podobny do Twierdzenia 1.2, które okazało się kluczowe w konstrukcji funkcji wewnętrznej z pracy [K2]. Otóż można pokazać:

Twierdzenie 1.7. [K3, Theorem 2.5] *Dla stałej $a \in (0, 1)$ istnieje liczba naturalna K taka, że gdy h jest ciągłą silnie dodatnią funkcją na $\partial\Omega$ o tych samych wartościach na okręgach, to wówczas możemy dobrać $N_1 \in \mathbb{N}$ taką, że dla dowolnych liczb naturalnych N i $m_1, ..., m_K$ związanych zależnością $N_1 \leq N \leq m_1 \leq ... \leq m_K \leq 2N$ można znaleźć wielomiany jednorodne $p_{m_1}, ..., p_{m_K}$ stopni $m_1, ..., m_K$ odpowiednio spełniających nierówności $ah(z) < \max_{i=1,...,K} |p_{m_i}(z)| < h(z)$ dla $z \in \partial\Omega$.*

Niestety żądanie aby funkcja h posiadała takie same wartości na okręgach uniemożliwia bezpośrednie zastosowanie tych wielomianów w konstrukcji funkcji wewnętrznej. Nie mniej jednak można tak zmodyfikować konstrukcję z pracy [K2] aby uzyskać F funkcję wewnętrzną, której granice niestyczne F^* przyjmują wartości maksymalne na okręgach:

Twierdzenie 1.8. [K3, Theorem 2.8] *Niech h będzie funkcją ciągłą silnie dodatnią na $\partial\Omega$ oraz taką, że $h(z) = h(\lambda z)$ dla $|\lambda| = 1$. Wówczas istnieje $F \in \mathbb{O}(\Omega)$ taka, że $|F^*(z)| = h(z)$ dla prawie wszystkich $z \in \partial\Omega$ oraz $\max_{|\lambda|<1} |F(\lambda z)| = h(z)$ dla $z \in \partial\Omega$.*

1.4. **Maksymalne zbiory modułowe i zbiory szczytowe.** Kolejne zastosowanie wspomnianych już wielomianów jednorodnych w obszarach $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ zbalansowanych, ograniczonych silnie wypukłych z brzegiem klasy C^2 wiąże się z maksymalnymi zbiorami modułowymi.

Wiadomo, że funkcja wewnętrzna jest nieciągła w każdym punkcie swego brzegu, stąd pojawia się zainteresowanie funkcjami holomorficznymi f ciągłymi do brzegu ($f \in A(\Omega)$), których ($|f| \leq 1$) moduł jest ograniczony przez 1 i jednocześnie zbiór $K = \{z \in \partial\Omega : |f(z)| = 1\}$ jest duży. Taki podzbiór K nazywamy maksymalnym zbiorem modułowym.

Pod względem topologicznym zbiory te są raczej małe dla obszarów silnie pseudowypukłych, co pokazali Stout i Duchamp [S1]. Rzeczywisty topologiczny wymiar maksymalnego zbioru modułowego jest nie większy niż n. W szczególności maksymalne zbiory modułowe muszą mieć puste wnętrze. Jeśli jednak zamiast wymiaru topologicznego weźmiemy pod uwagę miarę Hausdorffa takiegoż zbioru, to okazuje się, że zbiory te nie muszą już być małe. W szczególności Eric Løv udowodnił [L2], że istnieje maksymalny zbiór modułowy o dodatniej $(2n - 1)$-wymiarowej mierze Hausdorffa.

Wykorzystamy nasze wielomiany jednorodne do konstrukcji maksymalnego zbioru modułowego przecinającego dowolny okrąg o środku w zerze zawarty w brzegu obszaru Ω. Nasz zbiór będzie raczej duży, gdyż dzięki wspomnianej topologicznej własności - co najmniej jego $(2n - 2)$ -wymiarowa miara Hausdorffa musi być dodatnia.

Twierdzenie 1.9. [K3, Theorem 2.7] *Niech Ω będzie obszarem zbalansowanym, ograniczonym silnie wypukłym z brzegiem klasy C^2. Niech $\varepsilon > 0$, T będzie zbiorem zwartym w Ω, g będzie zespoloną funkcją ciągłą na $\partial\Omega$ oraz h silnie dodatnią funkcją ciągła na $\partial\Omega$ taką, że $|g(z)| < h(z) = h(\lambda z)$ dla $|\lambda| = 1$, $z \in \partial\Omega$. Wówczas istnieje $f \in A(\Omega)$ taka aby $\|f\|_T < \varepsilon$ i $\max_{|\lambda|=1} |(g + f)(\lambda z)| = h(z)$ dla $z \in \partial\Omega$.*

Jeśli jednak zrezygnujemy z zastosowania wielomianów jednorodnych, to korzystając jedynie z własności posiadania HSF na Ω możemy udowodnić rezultat podobny:

Twierdzenie 1.10. [K5, Theorem 2.5] *Załóżmy, że obszar Ω jest zbalansowany, ograniczony i posiada HSF na $\partial\Omega$. Niech $\varepsilon \in (0,1)$. Jeśli $g \in A(\Omega)$ oraz h jest funkcją ciągła silnie dodatnią na $\partial\Omega$ dla której $|g(z)| < h(z) = h(\lambda z)$ gdy $z \in \partial\Omega$ oraz $|\lambda| = 1$, to wówczas istnieje funkcja $f \in A(\Omega)$ taka aby $|g + f| \leq h$ na $\partial\Omega$ oraz*

$$\sigma\left\{z \in \partial\Omega : \max_{|\lambda|=1} |(g+f)(\lambda z)| \neq h(z)\right\} < \varepsilon.$$

Dodatkowo funkcja f może być dowolnie mała na zadanym uprzednio zbiorze zwartym$F \subset \Omega$ i zerować się w punkcie 0 do zadanego rzędu włącznie.

Wykorzystana w powyższym twierdzeniu miara σ jest probabilistyczną miarą borelowską na $\partial\Omega$. Miara ta dodatkowo powinna być miarą kołowo niezmienną czyli $\sigma(e^{2\pi it}S) = \sigma(S)$ dla dowolnego S podzbioru borelowskiego w $\partial\Omega$ oraz $t \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że teza jaką otrzymujemy jest nieco słabsza w Twierdzeniu 1.10 niż w Twierdzeniu 1.9, ale jednocześnie rozważamy obszary o niższej regularności.

1.5. **Zbiory szczytowe.** Istnieje także "ostrzejsza" koncepcja zbioru szczytowego. Otóż podobnie jak w definicji maksymalnego zbioru modułowego rozważamy $f \in A(\Omega)$ funkcję holomorficzną ciągłą do brzegu obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, której moduł jest ograniczony przez 1. Wówczas zbiór $K = \{z \in \partial\Omega : f(z) = 1\}$ nazywamy szczytowym.

E. Stout [S2] pokazał iż rzeczywisty topologiczny wymiar zbioru szczytowego jest nie większy niż $n - 1$.

Jeśli jednak rozważymy miarę Hausdorffa zbioru szczytowego to okaże się, że zbiory te nie muszą już być wcale małe. Stensönes Henriksen pokazał [H1], że dla każdego silnie pseudowypukłego obszaru z brzegiem klasy C^∞ w $\mathbb{C}^n$ można zbudować zbiór szczytowy o wymiarze Hausdorffa równym $2n - 1$.

W pracy [K4] wykorzystaliśmy nasze wielomiany jednorodne do konstrukcji zbioru szczytowego dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ zbalansowanego, ograniczonego silnie wypukłego z brzegiem klasy C^2:

Twierdzenie 1.11. [K4, Theorem 2.4] *Istnieje zbiór zwarty $K \subset \partial\Omega$ oraz $f \in A(\Omega)$ funkcja holomorficzna ciągła do brzegu taka, że:*

- $\mathbb{S}K = \partial\Omega$, *gdzie* $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$;
- $f = 1$ *na* K;
- $0 < |f| < 1$ *na* $\overline{\Omega} \setminus K$.

Zauważmy, że nasz zbiór przecina każdy okrąg o środku w zerze zawarty w $\partial\Omega$. Własność ta powoduje iż wymiar Hausdorffa naszego zbioru będzie równy co najmniej $2n - 2$. A nawet co najmniej $(2n - 2)$-wymiarowa miara Hausdorffa musi być dodatnia.

Oczywiście zbiór szczytowy największego możliwego wymiaru Hausdorffa jest tematem pracy [H1]. Dla porównania zauważmy, że nasz zbiór ma ciekawą topologiczną własność, której nie posiada zbiór Henriksena. Dodatkowo nasz zbiór istnieje dla obszarów, których brzeg jest mniej regularny niż w pracy [H1]. Warto również wspomnieć, że Henriksen skonstruwał swój zbiór rozwiązując stosowny problem $\overline{\partial}$. Tymczasem nasze metody są związane wyłącznie z własnościami wielomianów jednorodnych.

1.6. **Funkcja wewnętrzna, która wzdłuż cięć zespolonych jest również funkcją wewnętrzną.** Załóżmy, że obszar Ω jest ograniczony, kołowy, silnie wypukły z brzegiem klasy C^2. Będą nas intersowały cięcia zespolone tzn zbiory postaci $\mathbb{D}z$, gdzie $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ oraz $z \in \partial\Omega$. Zachowanie funkcji holmorficznej będziemy oceniać wykorzystując jej wartości średnie, czyli normę $\|f\|_z := \sqrt{\int_0^1 |f(e^{2\pi it}z)|^2 dt}$ w punktach $z \in \partial\Omega$. Połączymy [K2, Theorem 3.2] czyli własności wspomnianych funkcji holomorficznych o kontrolowanym wzroście oraz [K1, Theorem 2.6] wielomiany jednorodne w celu uzyskania unikalnej funkcji wewnętrznej która wzdłuż wszystkich cięć zespolonych jest również funkcją wewnętrzną. Twierdzene [K2, Theorem 3.2] dostarcza nam N funkcji holomorficznych ciągłych do brzegu z których co najmniej jedna w zadanym punkcie brzegu jest "duża". Nie możemy kolejno bezpośrednio korzystać z tego wyniku i zsumować tylko funkcje "duże" ponieważ utracimy informację o wzroście z kroku poprzedniego. Zastosowanie wielomianów jednorodnych zasadniczo zmienia tą sytuację. Pozwalają one bowiem rozsunąć wspomniane funkcje "duże" tak aby nie zakłócały wzajemnie swego wzrostu. Uzyskamy w ten sposób następujący rezultat:

Twierdzenie 1.12. [K5, Theorem 3.2] *Załóżmy, że mamy $g \in A(\Omega)$ funkcję holomorficzną ciągłą do brzegu oraz h silnie dodatnią półciągłą z dołu funkcję na $\partial\Omega$ dla której $|g(z)| < h(z)$ oraz $\|h|\|_z < \infty$ gdy $z \in \partial\Omega$. Wówczas istnieje $f \in \mathbb{O}(\Omega)$ dla której $\sup_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)| \leq \max_{|\lambda|=1}(h + |g|)(\lambda z)$ oraz $\|h - |g + f^*|\|_z = 0$ gdy $z \in \partial\Omega$, gdzie f^* oznacza radialną granicę f. Dodatkowo możemy uczynić f dowolnie małą na zadanym zbiorze zwartym $F \subset \Omega$ oraz zerującą się do zadanego rzędu w punkcie* 0.

Literatura

[A1] A. B. Aleksandrov, The existence of inner functions in the ball, Sb. Math. 1983, 46 (2),143-159.

[A2] A B. Aleksandrov, Inner functions on compact spaces. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 18 (1984), no. 2, 1–13.

[B1] E. Bedford, A. Taylor, Two applications of a nonlinear integral formula to analytic functions, Indiana Math. J. 29 (1980) 463–465.

[D1] Y. Dupain, Gradients des fonctions intérieures dans la boule unité de Cn, Math. Z. 193 (1986) 85–94.

[H1] B. Stensönes Henriksen: A peak sets of Hausdorff dimension $2n - 1$ for the algebra $A(D)$ in the boundary of a domain D with C^∞.

[Kr] S. G. Krantz, Function theory of several complex variables, PWN Warsaw 1991.

[L1] E. Löw, A Construction of Inner Functions on the Unit Ball in $\mathbb{C}^p$, Invent. math. 67 (1982), 223-229.

[L2] E. Löw, Inner Functions and Boundary Values in $H^\infty(\Omega)$ and $A(\Omega)$ in Smoothly Bounded Pseudoconvex Domains, Math. Z. 185 (1984), 191-210.

[S1] E.L. Stout, Th. Duchamp, Maximum modulus sets, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 31.3, 37-69 (1981).

[S2] E.L. Stout, The dimension of peak interpolation sets, Proc. Amer. Math. Soc. 86, no. 3, 413-416 (1982) .

[W1] J. Ryll and P. Wojtaszczyk, On homogeneous polynomials on a complex ball, Trans. Amer. Math. Soc. 276 (1983), 107-116.

[W2] P. Wojtaszczyk, On highly nonintegrable functions and homogeneous polynomials, Annales Polonici Mathematici no. 65, (1997), 245-251.

[R1] Rudin, W.: Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer 1980.

2. Opis rezultatów nie wchodzących w skład osiągnięcia naukowego: "Funkcja wewnętrzna"

Przedstawimy teraz opis najważniejszych rezultatów uzyskanych w pozostałych publikacjach:

Literatura

[K-1] P. Kot: Radon inversion problem for holomorphic functions on strictly pseudoconvex domains, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin 17, (2010), No. 4, 623-640.

[K-2] P. Kot: Boundary functions on a bounded balanced domain, Czech. Math. J. 59, (2009), No. 2, 371-379.

[K-3] P. Kot: Boundary functions in $L^2H(\mathbb{B}^n)$, Czech. Math. J. 57(132) (2007), no. 1, 29-47.

[K-4] P. Kot: p-Radial exceptional sets and conformal mappings, Canad. Math. Bull. 50 (2007), no. 4, 579-587.

[K-5] P. Kot: Exceptional sets with a weight in a unit ball, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 13 (2006), no. 1, 43-53.

[K-6] P. Kot: Integrability of homogeneous polynomials on the unit ball, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 13 (2006), no. 4, 743-762.

[K-7] P. Kot: Homology calculation of cubical complexes in $\mathbb{R}^n$, Computational Methods in Science and Technology 12(2) (2006), 115-121.

[K-8] P. Kot: Maximum sets of semicontinuous functions. Potential Anal. 23 (2005), no. 4, 323-356.

[K-9] P. Kot: Exceptional sets in Hartogs domains, Canad. Math. Bull. 48 (2005), no. 4, 580-586.

[K-10] P. Kot: Exceptional sets in convex domains, J. Convex Anal. 12 (2005), no. 2, 351-364.

[K-11] P. Kot: Description of simple exceptional sets in the unit ball. Czechoslovak Math. J. 54(129) (2004), no. 1, 55-63.

[K-12] P. Kot: The Gleason Problem for $\mathbb{A}^k(\Omega)$, $\mathbb{H}^k(\Omega)$, $Lip_{k+\epsilon}(\Omega)$, Univ. Iagel. Acta Math. No. 40 (2002), 95-112.

[K-13] P. Kot: A remark on the inner Caratheodory distance for the annulus, Univ. Iagel. Acta Math. No. 35 (1997), 211-212.

Publikacje te można podzielić pod względem tematycznym w następujący sposób:

(1) Radon Inversion Problem: [K-1, K-2, K-3].
(2) Zbiory wyjątkowe: [K-4, K-5, K-6, K-9, K-10, K-11]
(3) Zbiory pluripolarne: [K-8]
(4) Inne problemy: [K-7, K-12, K-13]

2.1. **Radon Inversion Problem.** Publikacje tej grupy opisują rekonstrukcję funkcji holomorficznej na podstawie zbioru wartości całek tejże funkcji wzdłuż zadanego z góry zbioru kierunków.

Cykl prac związanych z problemem Radona rozpoczyna praca [K-3]. Rozważamy w niej dowolną nieujemną funkcję u półciągłą z dołu określoną na brzegu kuli $\mathbb{B}^d$. Zakładamy w naturalny sposób, że funkcja u ma wartości identyczne na okręgach o środku w zerze i szukamy funkcji holomorficznej f takiej aby

$$u(z) = \int_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)|^2 \, d\mathfrak{L}^2(\lambda).$$

Okazuje się [K-3, Theorem 2.9], że nasz problem ma rozwiązanie dokładnie wówczas gdy istnieją wielomiany jednorodne $p_1, ..., p_m$ spełniające następujące dwie własności:

(1) $u^{-1}(0) = \{z \in \partial\mathbb{B}^n : p_1(z) = p_2(z) = ... = p_m(z) = 0\}$,

(2) $u(z) \geq \sum_{j=1}^{m} |p_j(z)|^2$ *dla* $z \in \partial\mathbb{B}^d$.

Przedstawione warunki pozwalają łatwo skonstruować przykłady [K-3, Examples 2.10-2.12] funkcji u dla których przedstawiny problem nie ma rozwiązania.

Naturalnym uogólnieniem tegoż zagadnienia jest zastąpienie kuli mniej regularnymi obszarami oraz wykładnika 2 przez dowolną wartość dodatnią p. W tym kierunku idą rozważania z pracy [K-2]. Otóż okazuje się, że wystarczy aby obszar Ω był ograniczony, zbalansowany i ściśle wypukły z brzegiem klasy C^2. Wówczas dla $p > 0$ oraz dowolnej funkcji u półciągłej z dołu, dodatniej o identycznych wartościach na okręgach o środku w zerze można znaleźć funkcję $f \in \mathbb{O}(\Omega)$ dla której:

$$u(z) = \int_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)|^p \, d\mathfrak{L}^2(\lambda).$$

Wspólną cechą powyższych prac jest całkowanie wzdłuż dysków jednostkowych o środku w zerze. Oczywiście można też zastanawiać się co można uzyskać w sytuacji gdy będziemy całkować wzdłuż dowolnych krzywych w obszarach pseudowypukłych. Ten kierunek badań podejmuje ostatnia praca cyklu [K-1]. Rozważamy tutaj obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ ograniczony silnie pseudowypukły z brzegiem klasy C^2. Zbiór kierunków wzdłuż których będziemy całkować jest w postaci funkcji ciągłej $\gamma : \partial\Omega \times [0,1] \ni (z,t) \to \gamma(z,t) \in \overline{\Omega}$ wyposażonej w kilka dodatkowych naturalnych własności takich jak niestyczność w stosunku do brzegu. Jeśli teraz ustalimy funkcję H dodatnią półciągłą z dołu na $\partial\Omega$, to możemy skonstruować [K-1, Theorem 4.7] funkcję holomorficzną $f \in \mathbb{O}(\Omega)$ taką, że $H(z) = \int_0^1 |f(\gamma(z,t))|^p \, dt$ dla η-prawie wszystkich punktów $z \in \partial\Omega$ gdzie η jest zadaną miarą probabilistyczną na $\partial\Omega$ oraz $p > 0$. Dodatkowo istnieją [K-1, Theorem 4.3] funkcje holomorficzne $f_1, ..., f_K \in \mathbb{O}(\Omega)$ dla stosownie dobranego $K \in \mathbb{N}$ takie że $H(z) = \sum_{j=1}^{K} \int_0^1 |f_j(\gamma(z,t))|^p \, dt$ dla $z \in \partial\Omega$. Nasze konstrukcje można zastosować także do rozwiązania [K-1, Theorem 4.4] problemu Dirichleta dla funkcji purisubharmionicznych. Otóż jeśli Ω jest dodatkowo gwiaździsty względem zera, to dla dowolnej funkcji ciągłej $u > 0$ na $\partial\Omega$ istnieją funkcje holomorficzne $f_1, ..., f_K \in \mathbb{O}(\Omega)$ takie że $v(z) = \sum_{j=1}^{K} \int_0^1 |f_j(\gamma(z,t))|^2 \, dt$ jest funkcją analityczną na Ω, ciągłą na $\overline{\Omega}$ i $v(z) = u(z)$ dla $z \in \partial\Omega$.

2.2. **Zbiory wyjątkowe.** Cykl prac o zbiorach wyjątkowych rozpoczyna praca [K-11]. W pracy tej dla dowolnych D, T rozłącznych, zwartych i kołowych podzbiorów brzegu kuli konstruujemy wielomiany jednorodne wspólnie ograniczone o dużych wartościach na T oraz małych wartościach na D. Następnie wykorzystujemy te wielomiany do opisu tzw zbiorów wyjątkowych funkcji holomorficznych. Powiemy, że zbiór $E \subset \partial\mathbb{B}^d$ jest zbiorem p-wyjątkowym dla funkcji holomorficznej $f \in \mathbb{O}(\mathbb{B}^d)$ gdy $E = \{z \in \partial\mathbb{B}^d : \int_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)|^p \, d\mathfrak{L}^2(\lambda) = \infty\}$. Główny rezultat pracy [K-11] powiada, że E jest zbiorem 2-wyjątkowym jeśli jest kołowym podzbiorem $\partial\mathbb{B}^d$ typu G_δ oraz F_σ jednocześnie. Pierwszą wskazówkę jak usunąć założenie o typie F_σ dla zbiorów wyjątkowych jest praca [K-10]. Rozważamy w niej obszary Ω silnie wypukłe, zbalansowane o brzegu klasy C^1. Okazuje się, że jeśli tylko $p > 0$ oraz zbiór $E \subset \partial\Omega$ jest kołowym typu G_δ, to można skonstruować funkcję $f \in \mathbb{O}(\Omega)$ dla której $E = \{z \in \partial\Omega : \int_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)|^p \, d\mathfrak{L}^2(\lambda) = \infty\}$. Jednocześnie łatwo można zauważyć, że dowolny zbiór wyjątkowy musi być w tej sytuacji kołowy oraz typu G_δ.

Można oczywiście rozważać zbiory wyjątkowe jako cięcia prostymi zespolonymi niekoniecznie przechodzącymi przez punkt zero. Dokładniej niech $\Omega = \{(z,w) \in$

$\mathbb{C}^{d+1} : |z| < \mu(w), w \in H\}$ będzie obszarem Hartogsa gdzie H jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{C}^d$ oraz μ jest funkcją ciągłą o dodatnich wartościach na H i taką, że $-\ln\mu$ jest funkcją silnie plurisubharmoniczną na H. Wówczas cięciem zespolonym wzdłuż ustalonego $w \in \mathbb{C}^d$ będzie zbiór $\Omega_w = \Omega \cap (\mathbb{C} \times \{w\})$. W tej sytuacji dla zadanego zbioru E w H typu G_δ można skonstruować [K-9] funkcję holomorficzną $f \in \mathbb{O}(\Omega)$ taką, że

$$E = \{w \in \mathbb{C}^d : \int_{\Omega_w} |f(\cdot, w)|^2 d\mathfrak{L}^2 = \infty\}.$$

Jeśli wprowadzimy pewne dodatkowe ograniczenia takie jak całkowalność z kwadratem dla funkcji f wówczas zbiór wyjątkowy nie może być zbyt duży. W kolejnych pracach rozważamy zbiory wyjątkowe funkcji $f \in \mathbb{O}(\mathbb{B}^d) \cap L^2(\mathbb{B}^d)$ holomorficznych całkowalnych z kwadratem na kuli $\mathbb{B}^d$ w postaci:

$$E^\beta(f) := \left\{ z \in \partial\mathbb{B}^d : \int_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)|^2 (1 - |\lambda|^2)^\beta d\mathfrak{L}^2(\lambda) = \infty \right\}.$$

W tej sytuacji jeśli $\beta = 0$, to [K-3, Theorem 3.1] dowolny zbiór kołowy $E \subset \partial\mathbb{B}^d$ typu G_δ i miary zero jest zbiorem wyjątkowym pewnej funkcji f holomorficznej całkowalnej z kwadratem, czyli $E = E^0(f)$. Z kolei w pracy [K-6] skonstruowaliśmy pewną miarę[3] Θ^α taką, że jeśli E jest kołowym podzbiorem typu G_δ w $\partial\mathbb{B}^d$ oraz $\Theta^\alpha(E) = 0$ to wówczas istnieje funkcja $f \in \mathbb{O}(\mathbb{B}^d) \cap L^2(\mathbb{B}^d)$ holomorficzna całkowalna z kwadratem na kuli $\mathbb{B}^d$, dla której $E = E^\beta(f)$. Funkcje holomorficzne f całkowalne z wagą $\chi_t(z) := (1-|z|^2)^t$ oraz ich zbiory wyjątkowe $E^s(f)$ a zwłaszcza zależność pomiędzy parametrami s, t jest tematem pracy [K-5]. W szczególności [K-5, Theorem 2.7] jeśli $t = 0$, to $E^{d-1}(f) = \emptyset$.

Wreszcie ostatnia praca [K-4] tej grupy dotyczy koło jednostkowego oraz cięć wzdłuż promieni. Dokładniej dla $p > 0$ oraz zadanego z góry zbioru E typu G_δ w brzegu dysku jednostkowego $\partial\mathbb{D}$ konstruujemy funkcję holomorficzną $f \in \mathbb{O}(\mathbb{D})$ taką, że

$\int_{\mathbb{D}\setminus[0,1]E} |f|^p \, d\mathfrak{L}^2 < \infty$ oraz $E = E^p(f) = \left\{ z \in \partial\mathbb{D} : \int_0^1 |f(tz)|^p \, dt = \infty \right\}$.

Zauważmy jeszcze, że prace z grupy dotyczącej problemu Radona w szczególności dostarczają narzędzi do rozwiązywania rozmaitych problemów związanych ze zbiorami wyjątkowymi, co znakomicie ilustrują fakty:[K-1, Theorem 4.8], [K-2, Theorem 2], [K-3, Theorem 3.1].

2.3. **Zbiory pluripolarne.** Praca [K-8] jest efektem przeniesienia pewnych metod związanych ze zbiorami wyjątkowymi do teorii zbiorów pluripolarnych. Inspiracją dla jej powstania jest wynik Zeriahiego, który mówi dokładnie tyle, że dowolny zbiór pluripolarny E typu G_δ oraz F_σ dopuszcza plurisubharmoniczną funkcję u taką, że $E = u^{-1}(-\infty)$ o ile $E = E^*_{PSH}$ czyli jest równy swojej otoczce pluripolarnej. W pewnych sytuacjach potrafimy wyeliminować założenie F_σ dla zbioru E.

Dla zbioru E typu G_δ w $\mathbb{R}^d$ przedstawiamy nową konstrukcję funkcji subharmonicznej u takiej, że $E = \{z \in \mathbb{R}^d : u(z) = -\infty\}$.

Druga część pracy dotyczy zbiorów pluripolarnych. Wśród wielu rezultatów na wyróżnienie zasługuje "narzędzie" służące eliminacji wspomnianego założenia F_σ. Otóż [K-8, Theorem 6.4] jeśli E jest zbiorem typu G_δ oraz dla dowolnego zbioru

[3] $0 < \alpha \leq 2d - 2$, $\beta = d - \frac{2+\alpha}{2}$

zwartego K rozłącznego z E potrafimy dobrać ciąg funkcji plurisubharmonicznych φ_j taki, że

$$E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j^{-1}(-\infty) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\varphi_j)_*^{-1}(-\infty) \subset \mathbb{C}^d \setminus K,$$

gdzie $\varphi_*(x) := \liminf_{y\to x} \varphi(y)$, to *istnieje funkcja plurisubharmoniczna* φ *na* $\mathbb{C}^d$ *taka, że* $E = \varphi^{-1}(-\infty)$ *oraz* $\overline{E} = \varphi_*^{-1}(-\infty)$. Stosujemy nasz rezultat dla zbioru $E \subset F_1 \times ... \times F_d$, gdzie E jest typu G_δ oraz F_i jest zbiorem polarnym w $\mathbb{C}$. W szczególności pokazujemy jak skonstruować funkcję plurisubharmoniczną u taką, że $E = \{z \in \mathbb{C}^d : u(z) = -\infty\}$. Praca zawiera również szereg innych przykładów zbiorów pluripolarnych.

2.4. **Inne problemy.** W pracy [K-13] podajemy prosty dowód identyczności metryki Caratheodoryego oraz wewnętrznej metryki Caratheodoryego dla pierścienia P. Praca [K-12] dotyczy rozwiązania problemu Gleasona w obszarach gwiaździstych. Z kolei w pracy [K-7] rozważamy konstrukcję pewnego algorytmu obliczającego grupy homologii.

Piotr Kot