prof. Anna Zdunik
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 22. maja 2021r.

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgr. Marcina Sroki

Pan magister Marcin Sroka przedstawił rozprawę doktorską „ Monge-Ampère equation in hypercomplex geometry”, napisaną pod kierunkiem profesora Sławomira Kołodzieja.

Rozprawa składa się z ośmiu rozdziałów. Znaczna część zawartości pracy (wstępny rozdział 1. oraz rozdziały 2,3,4) stanowi niezbędne wprowadzenie w tematykę i przedstawienie stanu wiedzy dotyczącej badanych dalej zagadnień.

Właściwe wyniki pracy są przedstawione w podrozdziale 4.6 (pytania o lokalną całkowalność), rozdziale 5 („local case”-czyli zagadnienie rozwiązania „kwaternionowego” problemu Dirichleta dla naturalnej klasy obszarów w $\mathbb{H}^n$) , rozdziale 6 (zagadnienie regularności rozwiązań), rozdziale 7 (dyskusja równania Monge’a-Ampère’a na HKT rozmaitościach, dyskusja hipotez „Calabi Yau”, opis stanu badań i motywacja dotycząca istotności wyniku w kolejnym rozdziale), i wreszcie- w rozdziale 8 (dowód *ograniczenia a priori* dla rozwiązania zagadnienia Monge’a Ampère’a na HKT rozmaitościach).

Tak więc, rozdziały wstępne zajmują aż ponad 50 stronic (ponad połowę zawartości) rozprawy. Te proporcje mogą na pierwszy rzut dziwić. Rozbudowanie tych początkowych rozdziałów jest jednak znakomitym pomysłem, czyniącym z rozprawy samowystarczalny tekst, dostępny w lekturze także dla czytelnika nie pracującego bezpośrednio w tej ważnej, ale nie znanej szeroko dziedzinie.

Konstrukcja wstępnych rozdziałów jest logiczna i dobrze przemyślana. Rozdział 2 zawiera informacje o algebrze kwaternionów, zaczynając od podstawowej definicji, i przechodząc do pojęć *hiperhermitiowskiej algebry liniowej* i wprowadzając potrzebne oznaczenia i definicje.

Rozdział 3 rozpoczyna się od przedstawienia formalizmu rozmaitości hermitowskich, a następnie- hiperhermitowskich. W dalszej części rozdziału autor tłumaczy pojęcie form dodatnich w kontekście rozmaitości hiperhermitowskich.

Obszerny rozdział 4 jest systematycznym zwartym wykładem teorii operatora Monge’a- Ampère’a w przestrzeni kwaternionowej $\mathbb{H}^n$. Wprowadza się zatem kolejno różniczkowania $\frac{\partial}{\partial q_\alpha}$ i $\frac{\partial}{\partial \bar{q}_\alpha}$ gładkich funkcji (klasy C^2) i Hessian rzeczywistej funkcji klasy C^2, i przeprowadza, nieco podobnie jak w klasycznej sytuacji (wielu zmiennych zespolonych) wyrażenie Hessianu w języku operatorów ∂ i ∂_J. Kolejne podrozdziały rozdziału 4 są poświęcone wprowadzeniu odpowiednika funkcji subharmonicznych (niekoniecznie gładkich) w kontekście analizy *kwaternionowej* i

AZ

operatora Monge'a Ampère'a, a dalej- m.in odpowiednik pojęcia pojemności, wyrażenia funkcji maksymalnej przez zerowanie operatora Monge'a- Ampère'a oraz tzw. *comparison principle.* Wreszcie - w podrozdziale 4.4 autor zbiera dotychczasowe (czyli uzyskane przed napisaniem rozprawy) wyniki innych autorów dotyczące zagadnienia rozwiązania równania Monge'a Ampère'a w wersji *kwaternionowej.*

Począwszy od podrozdziału 4.6 rozpoczyna się prezentacja własnych wyników doktoranta. Zawartość omówionych powyżej wstępnych rozdziałów autor komentuje we wstępie, pisząc: *No claim on the originality is made there.*
Przed przejściem do omówienia właściwych wyników rozprawy, chcę podkreślić bardzo wysoki poziom prezentacji zawartej we wstępnych rozdziałach. Autor z godną podziwu erudycją przedstawia wyniki zawarte w dziesiątkach publikacji - również zupełnie niedawnych, porządkując stan wiedzy i uzupełniając wykład licznymi trafnymi komentarzami.
Ta wstępna część pracy jest podsumowana rozszerzonym komentarzem- próbą zunifikowanego spojrzenia na zagadnienia klasycznych teorii potencjału, pluripotencjału oraz wersji *kwaternionowej.*

W rozdziale 4.6 autor rozważa naturalne pytanie o lokalną całkowalność *z* p-tą potęgą *kwaterionowej* funkcji subharmonicznej określonej w obszarze w $\mathbb{H}^n$. Dla $n = 1$ pytanie sprowadza się do więc pytania o całkowalność *zwykłej* funkcji subharmonicznej w $\mathbb{R}^4$. Sprawdzenie całkowalności z p-tą potęgą (dla $p < 2$) polega na umiejętnym i przemyślanym zastosowaniu dość standardowej procedury, polegającej na zapisaniu funkcji subharmonicznej w postaci danej z twierdzenia reprezentacyjnego Riesza , szacowaniu całki z potęg funkcji Greena i umiejętnym użyciu nierówności Harnacka i nierówności Minkowskiego.
Przejście do przypadku wielowymiarowego uzyskuje się przez zastosowanie twierdzenia Fubiniego. Otrzymuje się lokalną całkowalność p- tej potęgi funkcji *kwaternionowo* subharmonicznej dla każdego $p < 2$ (i jest to ścisłe ograniczenie).
Ponadto autor dowodzi twierdzenia o zbieżności: zbieżność ciągu funkcji subharmonicznych w L^1 implikuje zbieżność w L^p dla $p < 2$.

Rozdział 5 jest poświęcony wersjom twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności równania Monge'a Ampère'a. Głowny wynik tego rozdziału to Twierdzenie 5.3.1. Rozważany obszar D o gładkim brzegu jest *kwaternionowo ściśle pseudowypukły.* Warunek brzegowy jest dany przez funkcję ciągłą na ∂D, a o funkcji f pojawiającej się w równaniu $\partial\partial_J u = f\Omega_n$ zakłada się całkowalność z q-tą potęgą dla pewnego $q > 2$. Warto porównać ten wynik z wcześniejszą pracą Wan, w której dowodzi się istnienia ciągłych rozwiązań dla równań z prawą stroną w L^q dla $q \geq 4$. Autor zauważa (w Proposition 5.3.2), że $q < 2$ istnieją gęstości f dla których rozwiązanie zagadnienia jest nieograniczone, zatem warunek $q > 2$ jest (prawie) optymalny.
W tym rozdziale podobał mi się efektowny pomysł porównania *kwaternionowego* i *zespolonego* Hessianu dla funkcji plurisubharmonicznej na obszarze $D \subset \mathbb{H}^n$ - (plurisubharmoniczność rozumiana przez naturalne wprowadzenie zespolonych zmiennych) - Lemat 5.1.1.
Twierdzenie 5.1.2 wywnioskowane z tego Lematu daje informację, która - nieformalnie- mówi, że funkcja plurisubharmoniczna spełniająca zespolone równanie Monge'a- Ampère'a- rozumiana jako funkcja *kwaternionowo* subharmoniczna- spełnia odpowiednią *nierówność typu Monge'a -Ampère'a.* Podobało mi się też bardzo zastosowanie aproksymacji gładkimi rozwiązaniami i skorzystanie ze stabilności rozwiązań.

Ah

Lemat 5.1.3 przynosi bardzo ogólne, eleganckie - i zapewne użyteczne również w innych kontekstach- szacowanie miary Lebesgue'a zbioru borelowskiego przez jego pojemność *kwaternionową.* Dowód polega na pomysłowym wykorzystaniu obserwacji zawartej w powyższym Twierdzeniu 5.1.2 i oszacowań L^∞ *a priori* dla rozwiązań równania Monge'a Ampère'a (pochodzących z wcześniejszych prac S. Kołodzieja).

Kluczowym krokiem w tej części rozprawy jest dowód *szacowana a priori* dla rozwiązań zagadnienia Dirichleta z prawą stroną w L^q, $q > 2$. Dowód, wykorzystujący znany w literaturze Lemat (*twierdzenie De Giorgi)* jest bardzo pomysłowy i efektowny.

Rozdział 6 rozprawy zawiera wyniki uzyskane we wspólnej publikacji z S. Kołodziejem. Główny wynik tego rozdziału to Twierdzenie 6.5, które dowodzi, że rozwiązanie równania Monge'a - Ampère'a otrzymane w omawianym powyżej Twierdzeniu 5.3.1, jest hölderowsko ciągłe (z konkretnym, danym wzorem, wykładnikiem Höldera) o ile funkcja zadająca warunek brzegowy jest w klasie $C^{1,1}$.
Dowód tego twierdzenia zawiera pewne idee, które pojawiły się wcześniej w dowodzie analogicznego wyniku dla rozwiązania zagadnienia Dirichleta w teorii pluripotencjału (praca [GKZ08]), ale wymaga oczywiście odrębnego podejścia, związanego z odmiennością teorii *kwaterionowego* pluripotencjału.

Rozdziały 7 i 8 rozprawy skupiają się na zagadnieniach określanych przez autora jako *global case.* Rozdziały te dotyczą *kwaternionowej* wersji hipotezy Calabi oraz powiązanych problemów na HKT rozmaitościach. W rozdziale 7 autor zawarł bardzo dobrze przygotowany i przemyślany opis zagadnień; przedstawił też szczegółową bibliografię i opis dotychczasowych wyników. W szczególności, przedstawiony jest stan wiedzy dotyczący ograniczeń C^0 *a priori* dla rozwiązania równania Monge'a - Ampère'a na zwartej HKT rozmaitości.
Takie szacowanie *a priori* zostało wykazane wcześniej w niedawnej pracy Aleskera i Shelukhina. Dowód podany przez autora rozprawy jest znacznie krótszy, i daje lepsze szacowanie (szacowanie na normę L^∞ rozwiązania można wyrazić tylko przez L^q normę prawej strony równania).

Jest to według mnie najciekawsza część rozprawy, i bardzo piękna. Dowód jest oparty na lemacie 8.1.1, nazwanym *Cherrier type inequality,* a całe rozumowanie jest - jak pisze autor- motywowane pracami Tossatti i Wieinkove dotyczącymi równania Monge'a Ampère'a na zwartych rozmaitościach Kählerowskich.

Dowód Lematu 8.1.1 przedstawiony jest w rozprawie w dość zawiły sposób; tok rozumowania przerywa się, aby wykazać potrzebny dowód Lematu 8.1.2, który z kolei opiera się na kolejnym lemacie 8.1.3. Miałam pewne kłopoty z zorientowaniem się w tej zagnieżdżonej strukturze lematów.

W dowodzie kluczowy jest bardzo ładny Lemat 8.1.5. Podobała mi się nieoczywista indukcja, prowadząca do skracania sumy w formule III.8.6 , i wykorzystująca wcześniejsze szacowanie uzyskane w Lemacie 8.1.2. Jedyne formalne zastrzeżenie dotyczy nieco mylącego zapisu sumy: dla $i = n$ trzeba przyjąć konwencję że ta suma jest pusta.
W dalszej części rozumowania bardzo ładnie wykorzystuje się Lemat 8.1.1 aby, przy użyciu nierówności Sobolewa i sprytnej procedury iteracyjnej, dostać szukane szacowanie odpowiedniego supremum przez szacowanie w L^1.

AL

W pracy zauważyłam trochę usterek, które wypisuję poniżej. Są one łatwo usuwalne i nie mają wpływu na wartość rozprawy.

- W dowodzie Proposition 4.6.1 przydałby się szerszy komentarz przy przejściu od przypadku jedno- do wielowymiarowego.
- W założeniach Twierdzenia 5.3.1 brakuje, jak sądzę, założenia że funkcja f jest nieujemna.
- Twierdzenie 5.1.2 powinno być: approximate ϕ uniformly (zamiast: approximate u uniformly).
- W dowodzie Twierdzenia 5.1.2 pojawia się bez wyjaśnienia oznaczenie $C^\infty(\overline{D})$.
- str. 62: Zamiast zdania: *By the characterization of the maximality of qpsh functions, as in [WZ15]* (..), warto było sformułować tę charakteryzację.
- Końcowy fragment dowodu Twierdzenia 5.3.1 jest potraktowany zbyt pobieżnie. Ostatnie długie zdanie dowodu *This is the solution we were looking for because…*pozostawia wskazówki dla czytelnika jak dokończyć dowód, i nie budzi specjalnych wątpliwości, ale w rozprawie doktorskiej warto było te szczegóły uzupełnić.
- str. 72 oznaczenia Lip_α i $C^{0,\alpha}$ nie są standardowe; lepiej było napisać wprost że chodzi o funkcje hölderowskie. Podobnie, warto było napisać explicite standardową normę używaną w Lip_α.
- W sformułowaniach Twierdzeń 6.1 i 6.5 warto było przypomnieć skąd pochodzi oznaczenie γ_1. Co prawda wynika to z dowodu, ale czytelnik jest zdezorientowany przy czytaniu sformułowania.
- Dowód Twierdzenia 6.1, oznaczenie D_δ. Zbiór D_δ powinien być, jak sądzę, zdefiniowany jako $\{q \in D : dist(q, \partial D) > \delta\}$.
- str. 80 sformułowanie Conjecture 7.2.1 - ta sama funkcja oznaczona jako f, a dalej- jako F.

Podsumowanie:

Przedstawiona rozprawa dotyczy aktualnych i intensywnie badanych zagadnień analizy i geometrii zespolonej. Autor rozprawy wykazał się głębokim zrozumieniem niełatwej tematyki i godną podziwu szeroką wiedzą związaną z tą gałęzią badań. Praca jest świetnie zredagowana. Rozprawa zawiera kilka nowych ważnych wyników, które już zostały opublikowane w trzech artykułach naukowych. Szczególnie wysoko oceniam wyniki związane z badaniami dotyczącymi hipotezy Calabi na HKT rozmaitościach.

Jestem przekonana, że rozprawa spełnia z nadmiarem wymagania stawiane rozprawom doktorskim.
Z pełnym przekonaniem wnoszę też o wyróżnienie rozprawy.

Anna Zdunik