

mgr Błażej Żmija  
Wydział Matematyki i Informatyki  
email: blazej.zmija@im.uj.edu.pl

## Streszczenie rozprawy w języku polskim.

Rozprawa *Arithmetic properties of certain partition sequences* jest poświęcona badaniu różnego typu ciągów partycji. Przypomnijmy, że partycją liczby naturalnej  $n$  jest dowolne przedstawienie  $n$  jako sumy innych liczb naturalnych.

Tematyka partycji jest podejmowana od czasów Eulera i intensywnie badana w ciągu ostatnich stu lat między innymi przez Ramanujana, Hardy’ego, Churchhousa [3], Sellersa [2], Andrews [1] i innych.

W rozprawie wprowadzono wielomianowe wersje ciągów partycji, wielomiany partycji  $M$ -arnych. Zbadane zostały ich miejsca zerowe. Za ich pomocą pokazano też uogólnienia znanych charakterystyk modulo  $m$  ciągów partycji  $m$ -arnych z [2].

W dalszej części rozprawy zostały wykazane kongruencje  $M$ -arnych uogólnieniające analogiczne rezultaty dla klasycznych partycji  $m$ -arnych z [5]. Poprawiono też rezultaty Ulasa i Żmii z pracy [6] dotyczące waluacji  $p$ -adycznych ciągów kolorowanych partycji  $p$ -arnych i ich związków z ciągami automatycznymi.

Jeden rozdział został poświęcony ciągom wielomianów związanym z kolorowanymi partycjami. Wzmocniono znane wyniki Heima, Luki i Neuhausera [4] dotyczące zer tych wielomianów w pierwiastkach z jedynki.

Ostatni rozdział rozprawy poświęcono wprowadzeniu i zbadaniu partycji generowanych przez diagramy. Jest to bardzo ogólna klasa partycji. Należy do niej wiele ciągów partycji, które już pojawiły się w literaturze, m.in. klasyczne ciągi partycji i ciągi partycji  $m$ -arnych. Dla dużej klasy tych partycji pokazano charakterystyki modulo  $m$ . Zaprezentowane zostały też zastosowania diagramów do szukania tożsamości kombinatorycznych.

## LITERATURA

- [1] G. E. Andrews, R. J. Baxter, *Lattice gas generalization of the hard hexagon model. III  $q$ -trinomial coefficients*, J. of Stat. Physics 47(3/4) (1987), 297–330.
- [2] G. E. Andrews, A. S. Fraenkel, J. A. Sellers, *Characterizing the Number of  $m$ -ary Partitions Modulo  $m$* , Am. Math. Mon. 122.9 (2015), 880–885.
- [3] R. F. Churchhouse, *Congruence properties of the binary partition function*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 66 (1969), 371–376.
- [4] B. Heim, F. Luca, M. Neuhauser, *On cyclotomic factors of polynomials related to modular forms*, Ramanujan J., 48 (2019), 445–458.
- [5] Ø. J. Rødseth, J. A. Sellers, *On  $m$ -ary partition function congruences: a fresh look at a past problem*, J. Number Theory 87 (2001), 270–281.
- [6] M. Ulas, B. Żmija, *On  $p$ -adic valuations of certain  $m$  colored  $p$ -ary partition functions*, Ramanujan J., 55.2 (2021), 623–660.

mgr Błażej Żmija  
Wydział Matematyki i Informatyki  
email: blazej.zmija@im.uj.edu.pl

## Streszczenie rozprawy w języku angielskim.

The dissertation *Arithmetic properties of certain partition sequences* is devoted to studying various types of partition sequences. Recall, that a partition of a natural number  $n$  is any expression of  $n$  as a sum of natural numbers.

Partitions appeared firstly in the work by Euler and were intensively studied during last 100 years by Ramanujan, Hardy, Churchhouse [3], Sellers [2], Andrews [1] and others.

We introduced polynomial generalizations of  $m$ -ary partitions and studied their zeroes. Next, we found a polynomial generalization of a well known characterization modulo  $m$  of the sequence of  $m$ -ary partitions from the paper [2].

In the next part, we proved congruences for  $M$ -ary partitions that generalize well known results for classical sequence of  $m$ -ary partitions from [5]. Moreover, results by Ulas and Żmija [6] related to  $p$ -adic valuations of colored  $p$ -adic valuations were improved.

One chapter was devoted to studying another class of polynomials related to colored partitions. We strengthen the known results by Heim, Luca and Neuhauser [4] regarding zeroes of these polynomials at roots of unity.

In the last chapter we introduced and studied partitions generated by diagrams. This is a large class of partitions that includes many well known types of partitions, for example ordinary partitions and  $m$ -ary partitions. We found characterizations modulo  $m$  for a large class of these partitions. At the end, we showed applications of diagrams to combinatorial identities.

## REFERENCES

- [1] G. E. Andrews, R. J. Baxter, *Lattice gas generalization of the hard hexagon model. III  $q$ -trinomial coefficients*, J. of Stat. Physics 47(3/4) (1987), 297–330.
- [2] G. E. Andrews, A. S. Fraenkel, J. A. Sellers, *Characterizing the Number of  $m$ -ary Partitions Modulo  $m$* , Am. Math. Mon. 122.9 (2015), 880–885.
- [3] R. F. Churchhouse, *Congruence properties of the binary partition function*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 66 (1969), 371–376.
- [4] B. Heim, F. Luca, M. Neuhauser, *On cyclotomic factors of polynomials related to modular forms*, Ramanujan J., 48 (2019), 445–458.
- [5] Ø. J. Rødseth, J. A. Sellers, *On  $m$ -ary partition function congruences: a fresh look at a past problem*, J. Number Theory 87 (2001), 270–281.
- [6] M. Ulas, B. Żmija, *On  $p$ -adic valuations of certain  $m$  colored  $p$ -ary partition functions*, Ramanujan J., 55.2 (2021), 623–660.