UNIWERSYTET WARSZAWSKI

UW MIM

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki
prof. dr hab. Jarosław A. Wiśniewski

27 sierpnia 2021

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Dominika Burka
"Arithmetic properties of finite quotients of Calabi-Yau manifolds"

Rozmaitości Calabi-Yau stanowią jedną z najciekawszych klas rozmaitości zwartych badanych w geometrii algebraicznej i zespolonej. Z punktu widzenia geometrii różniczkowej są jedną z fundamentalnych klas rozmaitości riemannowskich ze względu na ich grupę holonomii. Z kolei, ze względu na trywialność wiązki kanonicznej, w geometrii zespolonej i algebraicznej stanowią graniczną klasę pomiędzy rozmaitościami Fano, z dodatnią klasą anty-kanoniczną, a rozmaitościami typu ogólnego, z dodatnią klasą kanoniczną. Torusy zespolone i rozmaitości abelowe też mają tę własność ale - przy całym szacunku dla badań dotyczących tych klas rozmaitości - ich geometria jest znacznie mniej ciekawa i zaskakująca niż rozmaitości Calabi-Yau. W zespolonym wymiarze dwa, rozmaitości Calabi-Yau są jednocześnie rozmaitościami hyperkählerowskimi i zostały ochrzczone przez Weila jako powierzchnie K3, od Kummera, Kählera i Kodairy, którzy je badali; jednocześnie nazwa ta odnosi się do K2, drugiej co wysokości góry świata w masywie Karakorum, uważanej za najtrudniejszy do zdobycia szczyt powyżej 8.000 m n.p.m., co ma sugerować stopień trudności badania tych rozmaitości.

O ile powierzchnie K3 fascynowały matematyków co najmniej od połowy zeszłego wieku, o tyle ich zespolone trójwymiarowe odpowiedniki (które już nie są rozmaitościami hyperkählerowskimi) zyskały sławę w latach dziewięćdziesiątych dzięki teorii strun z fizyki teoretycznej, a przede wszystkim, dzięki hipo-

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

tezie lustrzanej, która dobrze się formułuje w języku czysto matematycznym. Od tego czasu badanie rozmaitości Calabi-Yau w wymiarze trzy i wyższych, i znajdowanie ich topologicznych i holomorficznych niezmienników, w szczególności ich liczb Hodge'a, jest motywacją do wielu prac matematycznych, w tym i recenzowanej rozprawy doktorskiej.

Istnieją dwa standardowe sposoby konstruowania rozmaitości Calabi-Yau: jako zupełne przecięcia w "łatwiejszych" rozmaitościach, na przykład w rozmaitościach torycznych, lub jako rozwiązania ilorazów przy działaniu grup skończonych na rozmaitościach abelowych (torusach zespolonych), lub innych rozmaitościach Calabi-Yau i ich produktach. Ta druga konstrukcja jest czasami nazywana uogólnioną konstrukcją Kummera, jako że klasyczna powierzchnia Kummera jest otrzymana z zespolonego torusa podzielonego przez inwolucję. Oczywiście działanie grupy w tej konstrukcji musi być tak dobrane, żeby istniało rozwiązanie osobliwości ilorazu, które jest rozmaitością Calabi-Yau; takie rozwiązania nazywamy krepantnymi (nazwa jest kalką z angielskiego neologizmu, nie ma chyba dobrego polskiego odpowiednika). Recenzowana rozprawa zajmuje się tym właśnie przypadkiem: punktem wyjścia jest praca Cynka i Hulka dotycząca rozmaitości Calabi-Yau otrzymanych z ilorazów działania produktu grup cyklicznych na produkcie krzywych eliptycznych (rozdział 3 rozprawy) oraz konstrukcja Borcea i Voisin, w której z kolei mamy działanie grupy cyklicznej na produkcie powierzchni K3 i krzywej eliptycznej. Konstrukcja Borcea-Voisin jest uogólniona na wyższe wymiary w rozdziale 5 rozprawy.

Jednym z kluczowych rezultatów rozprawy, pozwalającym na policzenie niezmienników badanych rozmaitości Calabi-Yau, jest twierdzenie 2.3.3, które zawiera formułę na liczby Hodge'a rozwiązania krepantnego ilorazu produktu rozmaitości Calabi-Yau, na których działa ustalona grupa cykliczna. Korzystając z formuły Chena-Ruana na kohomologie orbifoldowe, twierdzenia Yasudy i formuły Künnetha, autor podaje formułę na liczby Hodge'a rozwiązania krepantnego ilorazu. W dowodzie autor korzysta z funkcji generującej dla liczb Hodge'a, która pozwala przedstawić je jako współczynniki w pewnych wielomianach Puiseaux, co z kolei pozwala w miarę wygodnie je liczyć. Jest to wykorzystane w rozprawie dla policzenia liczb Hodge'a rozmaitości Cynka-Hulka w rozdziale 3 i wyżej wymiarowych rozmaitości Borcea-Voisin w rozdziale 5.

W przypadku rozmaitości Calabi-Yau zdefiniowanych nad liczbami wymierny-

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

mi można rozpatrywać ich redukcje zdefiniowane nad skończonymi ciałami i badać ich topologię korzystając z hipotezy postawionej przez wspomnianego już Weila, a dowiedzionej w kolejnych pracach przez Dworka, Grothendiecka i, ostatecznie, przez Deligne'a. Funkcja zeta licząca punkty nad skończonymi redukcjami danej rozmaitości, pozwala policzyć charakterystykę Eulera rozmaitości nad liczbami zespolonymi. Dla rozmaitości z działaniem grupy skończonej Rosen rozszerzył idee Chena i Ruana by zdefiniować orbifoldową wersję funkcji zeta, która dla rozwiązań krepantnych ilorazów pokrywa się z funkcją zeta rozwiązania. Kluczowym rezultatem dla tego wątku rozprawy jest twierdzenie 2.7.1, które podaje formułę na funkcję zeta rozwiązania krepantnego ilorazu produktu rozmaitości Calabi-Yau z działaniem ustalonej grupy cyklicznej. Podobnie jak twierdzenie 2.3.3, i ten rezultat jest wykorzystany w rozdziałach 3 i 5 by policzyć funkcje zeta dla rozmaitości Cynka-Hulka i uogólnionych rozmaitości Borcea-Voisin.

Rozdział 3 rozprawy poświęcony rozmaitościom Cynka-Hulka zawiera jeszcze dwa oryginalne rezultaty autora, których waga jest mniejsza niż wymienionych powyżej twierdzeń, bo dotyczą one dosyć specyficznych sytuacji. Pierwszy z nich to alternatywna metody uzyskiwania liczb Hodge'a dla tego typu rozmaitości. Drugi rezultat to rozwiązanie osobliwości ilorazowych produktu rozmaitości, na których działa grupa cykliczna rzędu 6: ten rezultat jest naturalnym uzupełnieniem pracy Cynka i Hulka, w której rozpatrzone zostały pozostałe przypadki prowadzące do rozważanych przez nich rozmaitości. Konstrukcja rozwiązania jest przeprowadzona metodami torycznymi przez podanie odpowiedniej triangulacji sympleksów odpowiadających otrzymanym osobliwościom; podobna konstrukcja jest wykorzystana w jednym z przykładów badanych w rozdziale 5.

Rozdział 6 rozprawy dotyczy trójwymiarowych rozmaitości Calabi-Yau, które są otrzymane przez rozwiązanie krepantne ilorazu produktu włóknistego powierzchni eliptycznych z inwolucjami (pochodzącymi od cięć). Motywacją do rozpatrywania tej sytuacji jest praca Michała Kapustki z 2009 roku, w której rozmaitości tego typu były rozpatrywane. W tym krótkim rozdziale rozprawy autor podaje metodę znajdowania składowych punktów stałych inwolucji produktu, co umożliwia policzenie niezmienników otrzymanej rozmaitości Calabi-Yau. Podana metoda działa bardzo dobrze dla powierzchni eliptycznych zadanych równaniem typu Weierstrassa, co jest zilustrowane na przykładzie jednej

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

z powierzchni Beauville'a.

Równie krótki rozdział 4 rozprawy dotyczy rozmaitości Zariskiego, czyli rozmaitości nad ciałem dodatniej charakterystyki, które są wymiernie dominowane (w sposób nieseparowalny) przez rozmaitości wymierne. W tej części rozprawy autor pokazuje, że niektóre z rozmaitości Calabi-Yau otrzymanych przez konstrukcję Cynka i Hulka są w pewnych dodatnich charakterystykach dominowane przez rozmaitości wymierne. W tym celu wykorzystana zostaje argumentacja z pracy Katsury i Schütta, którzy zastosowali podobny pomysł dla skonstruowania powierzchni Zariskiego.

Rozprawa jest niezwykle obszerna, ma 140 stron, i powstała na bazie trzech preprintów, które są umieszczone na serwerze arxiv.org. Część dotycząca rozmaitości Cynka-Hulka została już opublikowana w zeszłym roku, w dobrym czasopiśmie Mathematische Nachrichten. Rozmaitości Borcea-Voisin dotyczy artykuł opublikowany trzy lata temu w tomie wydanym przez Centrum Banacha, ale główne rezultaty rozprawy na ten temat są w pracy, która pojawiła się w formie preprintu dopiero w lipcu bieżącego roku i zapewne jest złożona do recenzji.

Kilkustronicowy wstęp do rozprawy podaje motywację prowadzonych badań oraz pokrótce przedstawia zawartość pracy. Jako recenzent doceniam zwłaszcza przedstawienie oryginalnego wkładu autora i najważniejszych rezultatów rozprawy, które są wyszczególnione we wstępie. Obszerny rozdział 2 jest szerokim przedstawieniem materiału związanego z tematyką poruszaną w rozprawie. W tym rozdziale znajdują się również dwa kluczowe rezultaty autora, twierdzenia 2.3.3 i oraz 2.7.1, o których napisałem powyżej. Uważam, że w przeciwieństwie do krótkich artykułów badawczych, każda poważna rozprawa powinna zawierać część wprowadzającą czytelnika w najważniejsze pojęcia poruszane w pracy. Doceniam więc przedstawienie przez autora odpowiedniego materiału w rozdziale 2, wraz z przykładami. Z drugiej strony jednak, mam wrażenie, że część materiału podana została na zapas; na przykład podana jest klasyfikacja skończonych podgrup grupy SL w wymiarze 2 i 3 (sekcje 2.1.2 i 2.1.4), nie widzę jednak gdzie te rezultaty są używane w rozprawie.

Zasadniczo, rozprawa jest napisana w sposób staranny, zarówno pod względem redakcyjnym jak i językowym. Jako recenzent muszę jednak skupić się na niedociągnięciach, które zauważyłem. W czytaniu pracy przeszkadzał mi

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

przede wszystkim enigmatyczny sposób podawania odnośników do bibliografii. Poza nielicznymi wyjątkami, autor podaje odnośnik do artykułu lub książki nie precyzując numeru lematu, twierdzenia lub sekcji, do której się odnosi. Taki sposób odnoszenia się do materiału, na którym praca bazuje, jest bardzo uciążliwy dla czytelnika, który próbuje zweryfikować jej rezultaty. Sprawę komplikuje dodatkowo to, że niektóre sformułowania przedstawione w rozprawie niekoniecznie muszą się pokrywać z oryginalnymi, a są jedynie z nich wywiedzione, co nie jest jednocześnie zaznaczone. Na przykład, w rozdziale 6 rozprawy podane są rezultaty wynikające z artykułu Michała Kapustki, ale ich przedstawienie sugeruje, że są wzięte z tej pracy. Pozostałe uwagi dotyczące bibliografii są zdecydowanie mniejszego kalibru: nie rozumiem dlaczego pisząc o hipotezie Weila, która "od 1974 roku jest twierdzeniem", autor rozprawy nie podał odnośnika do pracy Deligne'a, nie rozumiem również dlaczego przestawiono kolejność nazwisk autorów pracy Katsury i Schütta.

W części recenzji dotyczącej redakcji rozprawy, chciałbym również zwrócić uwagę na kolizję oznaczeń: jest to problem trudny do uniknięcia, jednak w przypadku "zmiennych globalnych", czyli oznaczeń standardowych używanych dla danej grupy obiektów przedstawianych w pracy, warto zadbać o uniknięcie takich kolizji. W rozprawie X (czasami z indeksami) oznacza rozmaitość, składową punktów stałych itd., jednak w definicji 2.3.2 litera X pojawia się jako formalna zmienna. W sekcji 2.6 litera L oznacza szereg, a tuż na następnej stronie, w sekcji 2.7, L oznacza endomorfizm; litera i występuje z reguły jako indeks ale w rozdziale 6 pojawia się jednocześnie jako inwolucja.

Na koniec kilka uwag o charakterze merytorycznym: Wprowadzenie kluczowej definicji nie-symplektycznego działania grupy cyklicznej na rozmaitości Calabi-Yau jest zrobione "w biegu" w sekcji 2.3, nie podano osobnej definicji, przy czym brakuje mi założenia, że pierwiastek ξ_d powinien być pierwotny. Lemat 2.3.1 jest sformułowany w sposób nie do końca jasny: działanie grupy podane jest na produkcie kartezjańskim przestrzeni wektorowych, zaś składowe punktów stałych są liczone na jego podniesieniu do produktu tensorowego. Dowody kluczowych twierdzeń 2.3.3 i i 2.3.7 są bardzo zwięzłe i trudne do prześledzenia; na przykład, w dowodzie 2.3.3 warto podać uzasadnienie dlaczego sumowanie w formule Künnetha jest robione po podanym zbiorze indeksów, podobna uwaga dotyczy dowodu 2.7.1.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

Podsumowanie. Podane powyżej uwagi mają charakter czysto techniczny i nie wpływają istotnie na moją bardzo pozytywną ocenę rozprawy. Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wszystkie warunki postulowane zarówno w art. 13. Ustawy o stopnia naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z 14 marca 2003, z późniejszymi zmianami (Dz. U. 2017, poz. 1789), jak i w art. 187. Ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, z dnia 20 lipca 2018 roku. W związku z tym, z pełnym przekonaniem rekomenduję dopuszczenie autora rozprawy do kolejnych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktorskiego.

W mojej ocenie przedstawiona rozprawa nie jest przeciętna: na uwagę zasługuje szerokie podejście do tematyki badań zaprezentowane przez autora, które wskazuje na jego kompetencje w różnych działach geometrii algebraicznej wychodzące poza wąską specjalizację prezentowaną czasem w rozprawach doktorskich. Z drugiej jednak strony, uzyskane przez niego rezultaty nie wydają się na tyle ogólne, żeby mogły w sposób istotny wpłynąć na dziedzinę, której praca dotyczy. Dlatego też, oceniając pracę wysoko, wstrzymuję się od wnioskowania o jej wyróżnienie, przyjmując, że wyróżnianych powinno być istotnie mniej niż 10% prac doktorskich. O ile jednak praktyka instytucji nadającej doktorat dopuszcza wyróżnianie większej liczby rozpraw, to jestem skłonny zagłosować za wnioskiem o jej wyróżnienie.

Jarosław A. Wiśniewski

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl