Piotr Pragacz
profesor
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej
magistra Dominika Burka

Pan magister Dominik Burek jest doktorantem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Jego rozprawa doktorska nosi tytuł:

Arytmetic properties of finie quotiens of Calabi-Yau type manifolds.

Rozprawa została napisana pod kierunkiem prof. dr hab. Sławomira Cynka.

Rozmaitości Calabi-Yau należą do najintensywniej badanych rozmaitości w geometrii algebraicznej i fizyce matematycznej. W swojej rozprawie doktorskiej Dominik Burek konstruuje rodziny rozmaitości Calabi-Yau oraz oblicza ich liczby Hodge'a oraz funkcje zeta. Przypomnijmy, że rozmaitość Calabi-Yau to zespolona gładka rzutowa (Kählera) rozmaitość X spełniająca $K_X = \mathcal{O}_X$ oraz $H^i\mathcal{O}_X = 0$ dla $0 < i < \dim X$. Dla zwartej zespolonej rozmaitości X, liczby Hodge'a zdefiniowane są jako $h^{i,j}(X) = dim_{\mathbb{C}} H^j\Omega^i(X)$ dla $0 \leq i,j \leq \dim X$.

Niech $q = p^k$ będzie potęgą liczby pierwszej i niech $X/\mathbb{F}_q$ będzie rozmaitością zdefiniowaną nad $\mathbb{F}_q$. Wówczas funkcja zeta rozmaitości $X/\mathbb{F}_q$ jest zdefiniowana jako

$$Z_q(t) := exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_{q^r} \cdot \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]],$$

gdzie N_{q^r} jest liczbą $\mathbb{F}_{q^r}$-wymiernych punktów X.

Przypomnijmy jeszcze, że rozmaitość typu Calabi-Yau to zespolona gładka rzutowa (Kählera) rozmaitość X spełniająca $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$.

To są kluczowe definicje dla rezultatów rozprawy.

Niech $X_i\, , i = 1, \dots, n$ będą rozmaitościami typu Calabi-Yau z czysto nie-symplektycznymi automorfizmami $\phi_{i,d}\colon X_i \longrightarrow X_i$ stopnia d. Rozważmy grupę

$$G_{d,n} := \{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_d^n : m_1 + \dots + m_n = 0\} \cong \mathbb{Z}_d^{n-1}$$

która działa symplektycznie na $X_1 \times \dots \times X_n$ przez $\phi_{i,d}^{m_i}$ na *i*-tym czynniku. Przypuśćmy, że istnieje krepantna desingularyzacja $\widetilde{X_{d,n}}$ ilorazu

$$\mathcal{X}_{d,n} := X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \big/ \mathbb{Z}_d^{n-1}$$

Wówczas $\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}$ jest rozmaitością typu Calabi-Yau.

W Twierdzeniu 2.3.3 autor podaje wzór na liczby Hodge'a $\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}$ używając kohomologii Chena-Ruana.

W Twierdzeniu 2.7.1 podany jest wzór na funkcję zeta tej krepantnej desingularyzacji.

W rozdziale 3 w Twierdzeniu 3.2.3, autor podaje konstrukcję torycznej krepantnej desingularyzacji ilorazu $E_6^n \big/ \mathbb{Z}_6^{n-1}$. Jest to rozszerzenie konstrukcji Cynka-Hulka dla krzywych eliptycznych E_6 wyposażonych w czysto nie-symplektyczny automorfizm rzędu 6.

W rozdziale 3.3 autor wylicza na 2 sposoby liczby Hodge'a rozmaitości Cynka-Hulka $X_{d,n}$. Jedna metoda jest zastosowana w Twierdzeniu 3.3.1. Druga metoda jest opisana w rozdziale 3.3.5.

W rozdziale 3.4, autor wylicza funkcję zeta rozmaitości Cynka-Hulka $X_{d,n}$. Funkcja zeta rozmaitości $X_{d,n}$ zależy od jawnego modelu krzywej eliptycznej E_d nad $\mathbb{Z}$. W obliczeniu funkcji zeta wykorzystywane jest Twierdzenie 2.7.1.

Rozdział 4 poświęcony jest rozmaitościom Zariskiego. Rozmaitość algebraiczna (niewymierna) X wymiaru n nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $p > 0$ jest rozmaitością Zariskiego gdy istnieje czysto nierozdzielcze dominujące odwzorowanie wymierne $\mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ stopnia p. Autor wykorzystuje konstrukcję Cynka-Hulka, aby rozszerzyć twierdzenie Katsury-Schuetta na wyżej wymienione rozmaitości Calabi-Yau, które są rozmaitościami Zariskiego. Kluczowe rezultaty rozdziału 4 orzekają, że rozmaitości Calabi-Yau $\widetilde{E_3^n / F_2} = X_{3,n}$, $\widetilde{E_4^n / H_5} = X_{4,n}$, $\widetilde{E_6^n / J_5} = X_{6,n}$ są rozmaitościami Zariskiego.

Jako wnioski autor otrzymuje następujące rezultaty:

- W każdej nieparzystej charakterystyce $p \not\equiv 1\ (mod\ 12)$ istnieje rozmaitość Zariskiego Calabi-Yau dowolnego wymiaru.

- W dowolnej nieparzystej charakterystyce $p \not\equiv 1\ (mod\ 12)$ istnieje uniwymierna rozmaitość Calabi-Yau dowolnego wymiaru.

W rozdziale 5, autor bada rozmaitości Calabi-Yau typu Borcea-Voisin. Dokładniej konstruowane są wyżej wymiarowe uogólnienia klasycznej konstrukcji Borcea-Voisin, obliczone ich liczby Hodge'a oraz funkcje zeta. Konstrukcje Borcea-Voisin są ważne z punktu widzenia symetrii lustrzanej. Niech E będzie krzywą eliptyczną, zaś S będzie powierzchnią $K3$, obie posiadające nie-symplektyczne inwolucje α_E i α_S. Rozważmy iloraz

$S \times E /_{\alpha_S \times \alpha_E}$. Ten iloraz jest osobliwy i ma osobliwości cykliczne. Krepantna desingularyzacja $\widetilde{S \times E /_{\alpha_S \times \alpha_E}}$ jest rozmaitością Calabi-Yau z liczbami Hodge'a

$$h^{1,1} = 11 + 5N' - N \quad \text{oraz} \quad h^{1,2} = 11 + 5N - N',$$

gdzie N jest liczbą krzywych w $Fix(\alpha_S)$, zaś N' jest sumą genusów wszystkich tych krzywaych. Voison użyła tej konstrukcji do otrzymania „partnera zwierciadlanego". Cattaneo i Garbagnati uogólnili konstrukcje Borcea-Voisin do nie-symplektycznych automorfizmów powierzchni $K3$ wyższych stopni. Obliczyli oni liczby Hodge'a otrzymanych rozmaitości używając ich krepantnych desingularyzacji.

Autor rozprawy podaje wyżej wymiarowe uogólnienie klasycznej 3-wymiarowej rozmaitości Borcea-Voisin, rozważając krepantną desingularyzację $S_d \times E_d^{n-1} /_{G_{d,n}}$. Tutaj $d \in \{2,3,4,6\}$, S_d jest powierzchnią $K3$ z nie-symplektycznym automorfizmem stopnia d, E_d jest krzywą eliptyczną z niesymplektycznym automorfizmem stopnia d. Grupa

$$G_{d,n} = \{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_d^n : m_1 + \dots + m_n = 0\} \simeq \mathbb{Z}_d^{n-1}$$

działa w sposób naturalny na $S_d \times E_d^{n-1}$. Autor dowodzi, że istnieje krepantna desingularyzacja rozmaitości $S_d \times E_d^{n-1} /_{G_{d,n}}$, która jest rozmaitością Calabi-Yau wymiaru $n + 1$.

W dalszym ciągu rozdziału 5., autor wylicza liczby Hodge'a i funkcje zeta tej rozmaitości Calabi-Yau.

Przejdźmy do podsumowań. Autor rozprawy uzyskał szereg wartościowych rezultatów na temat desingularyzacji krepantnych, liczb Hodge'a i funkcji zeta. Są to Twierdzenia 2.3.3, 2.7.1, 3.2.3, 3.3.1, 3.3.5, 4.3.3, 4.3.5, 4.3.7, 5.3.1, 5.7.1, 5.7.2. Umiejętnie zastosował on szereg technik geometrii algebraicznej związanych z rozmaitościami typu Calabi-Yau. W swoich rozważaniach ulepsza on rezultaty takich matematyków jak Cynk i Hulek, Borcea i Voisin, Cattaneo i Garbagnati oraz Katsura i Schuett.

Strona redakcyjna jest bardzo dobra. Praca napisana jest jasno i poprawnie. Obszerna część wstępna ułatwia czytanie tej rozprawy. Praca jest bardzo „techniczna", zawiera wiele dość skomplikowanych wzorów. Pomimo to nie udało mi się w nich znaleźć żadnego istotnego błędu (poza kilkoma nieistotnymi „literówkami").

Dominik Burek jest autorem 4 prac opublikowanych w Mathematische Nachrichten, International Journal of Number Theory, Journal of Pure and Applied Algebra oraz Banach Center Publications.

Uważam, że wyniki uzyskane przez Dominika Burka są bardzo ciekawe i świadczą nie tylko o doskonałym opanowaniu „rzemiosła" przez ich autora, ale również o jego niewątpliwym talencie.

Biorąc powyższe pod uwagę, stwierdzam, że **praca doktorska Pana mgr Dominika Burka spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim w Ustawie o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (DZ.U. z 2016r. poz. 882)** i wnoszę o jej dopuszczenie do publicznej obrony.

Ponadto wnoszę o wyróżnienie tej rozprawy.

Piotr Pragacz

Warszawa. 10.08.2021

Piotr Pragacz