Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 2.04.2021

Recenzja rozprawy doktorskiej Bartosza Sobolewskiego

Last non-zero digits and p-adic valuations of special sequences

Rozprawa doktorska Bartosza Sobolewskiego traktuje o własnościach pewnych ciągów rekurencyjnych definiowanych przy pomocy zapisu cyfrowego liczb. Wychodząc od jakiegoś ciągu liczbowego, na przykład od ciągu silni kolejnych liczb całkowitych nieujemnych,

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800\ldots,$$

patrzymy na ostatnią *niezerową* cyfrę w kolejnych wyrazach i badamy nowy ciąg składający się z tych cyfr:

$$1, 1, 2, 6, 4, 2, 2, 4, 2, 8, 8, \ldots.$$

W 1967 Kakutani dowiódł, że ciąg ten jest 5-*automatyczny*, co oznacza, że można go wygenerować przez automat skończony nad alfabetem rozmiaru 5.

Oczywiście można wyobrazić sobie rozmaite warianty tego zagadnienia, w których zmieniamy wyjściowy ciąg, podstawę systemu liczbowego, a także liczbę i umiejscowienie interesujących nas cyfr. Zagadnienia tego typu są powiązane z teorią ergodyczną, teorią automatów czy równaniami Diofantycznymi. Niektóre sławne, od lat otwarte problemy teorii liczb mają podobny charakter. Nie wiadomo, na przykład, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których zapis cyfrowy składa się z samych jedynek. Pytanie to w systemie dwójkowym jest równoważne zagadnieniu liczb pierwszych Mersenne'a (są to liczby pierwsze postaci $2^p - 1$).

Przedłożona rozprawa zawiera szereg ciekawych wyników dotyczących własności ciągów otrzymywanych w określony sposób z zapisu cyfrowego różnych wyjściowych ciągów liczbowych.

W rozdziale 2 wyjściowym ciągiem jest ciąg silni $n!$ kolejnych liczb całkowitych nieujemnych. Autor rozważa ogólniejszy wariant problemu Kakutani'ego, w którym bada ciągi liczbowe utworzone z ostatniego bloku d kolejnych cyfr silni niekończącego się zerem (ciąg ten jest oznaczany przez $\ell_{b,d}(n!)$). W głównym wyniku rozdziału (Twierdzenie 2.2) wyznaczony jest zbiór podstaw b, przy których ciąg ten jest p-automatyczny (gdzie p jest szczególną liczbą pierwszą z rozkładu b na czynniki pierwsze). Jest to daleko idące uogólnienie nieco wcześniejszego rezultatu Lipki, który dotyczył przypadku jednocyfrowego. Co ciekawe, w przypadku podstaw b dających ciągi nieautomatyczne wykazano, że zgadzają się one z ciągami p-automatycznymi na zbiorze o gęstości 1. Wyniki te uzupełnia eleganckie twierdzenie mówiące o częstości występowania wyrazów w ciągach cyfrowych $\ell_{b,d}(n!)$ (Twierdzenie 2.3). Częstość ta pozostaje taka sama na podciągach biegnących po dowolnych postępach arytmetycznych. Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w bardzo dobrym czasopiśmie *Acta Arithmetica*.

W rozdziale 3 badane są podobne ciągi cyfrowe $\ell_{b,d}(f(n))$ tworzone na bazie wielomianów (lub ogólniejszych funkcji analitycznych p-adycznych). W głównym wyniku rozdziału podano pełną charakteryzację własności automatycznych tych ciągów w zależności od parametrów b, d oraz zadanej funkcji f (Twierdzenie 3.17). Rezultaty te są dość ogólne i techniczne, ale pozwalają na uzyskiwanie ciekawych wniosków dla konkretnych ciągów $f(n)$, w tym ciągów rekurencyjnych. Na przykład, jeżeli F_n jest n-tą liczbą Fibonacci'ego, to ciąg $\ell_{10}(F_n)$ (ostatnia niezerowa cyfra w zapisie dziesiętnym liczby F_n) jest 10-automatyczny (Przykład 3.7). Równolegle autor bada ciągi stowarzyszone $\mathcal{L}_b(f(n))$ powstające przez odcięcie wszystkich końcowych zer w zapisie liczby $f(n)$ przy podstawie b. W podobny sposób charakteryzuje zbiór tych liczb b, k, dla których otrzymany w ten sposób ciąg jest k-regularny (Twierdzenie 3.18).

Rozdział 4 poświęcony jest ciągom rekurencyjnym typu Fibonacci'ego dowolnego rzędu k (kolejny wyraz jest sumą k ostatnich wyrazów). Autor bada waluacje 2-adyczne takich ciągów, czyli ciągi postaci $\nu_2(F_n^{(k)})$, gdzie $F_n^{(k)}$ jest ciągiem Fibonacci'ego rzędu k zaś $\nu_2(n)$ oznacza wykładnik z jakim liczba 2 wchodzi w rozkład n. Główny wynik rozdziału (Twierdzenie 4.2) podaje dokładny wzór na ciągi waluacji, z których wynika ich 2-regularność (przy $k \geqslant 4$). Ponadto, w dalszej części pokazano ciekawe zastosowania uzyskanych wyników do rozwiązywania równań Diofantycznych pewnego specyficznego typu. Na przykład, dowiadujemy się (Twierdzenie 4.18), że przy ustalonym d, jedynie skończona liczba wyrazów ciągu $n!$ rozkłada się na iloczyn d uogólnionych liczb Fibonacci'ego (rzędu parzystego $k \geqslant 4$). Ponadto, można efektywnie wyliczyć stałą ograniczającą wielkość wszystkich rozwiązań. Oprócz tego, kolejny rezultat (Twierdzenie 4.24) podaje pełną informację o reprezentacji uogólnionych liczb Fibonacci'ego (rzędu parzystego $k \geqslant 4$) w postaci pewnych form kwadratowych. Rezultaty tego rozdziału zostały opublikowane w bardzo dobrym czasopiśmie *Journal of Number Theory*.

Metody dowodowe stosowane w pracy są w zasadzie elementarne, jednak dość trudne technicznie. Stanowią pomysłową kompilację analizy p-adycznej, metody morfizmów i twórczego wykorzystania własnych oraz istniejących wyników. O stopniu złożoności rozumowań świadczy choćby łączna liczba lematów w pracy, która wynosi 34.

Praca jest bardzo dobrze zredagowana. Liczne przykłady i uwagi znakomicie ilustrują i uzupełniają niełatwą miejscami materię. Dzięki temu lektura pracy jest całkiem przyjemna.

Właściwie dostrzegłem tylko jedną niedoskonałość, a mianowicie w sformułowaniu Twierdzenia 3.5 występuje funkcja Carmichaela λ, której definicja pojawia się po raz pierwszy dopiero kilka stron dalej.

Podsumowując, stwierdzam, że praca Bartosza Sobolewskiego to bardzo dobry doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących ciekawej tematyki ciągów bazujących na cyfrowych rozwinięciach liczb. Większość wyników wzmacnia czy uogólnia dokonania znanych w teorii liczb autorów (Kakutani, Luca, Ruzsa, itd.). Ich uzyskanie świadczy o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej intuicji i erudycji w zakresie tematyki pracy. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Bartosza Sobolewskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk