Streszczenie

Tematem niniejszej rozprawy jest badanie rozwinięć w różnych bazach wyrazów specjalnych ciągów liczbowych, takich jak silnie, ciągi zadane przez rekurencję liniową, wartości funkcji p-adycznych analitycznych dla argumentów naturalnych. Interesujące nas cechy rozwinięć to przede wszystkim ostatnie bloki cyfr niezakończone zerem, a także waluacja p-adyczna ν_p. Naszym głównym celem jest scharakteryzowanie sytuacji, w których wartości powyższych funkcji obliczonych dla kolejnych wyrazów odpowiednich ciągów tworzą ciągi automatyczne lub regularne.

Rozdział 1 stanowi wprowadzenie do głównych pojęć i narzędzi znanych w literaturze i używanych w dalszym ciągu pracy. W pierwszej części rozdziału zdefiniowane są ciągi automatyczne i regularne oraz podany jest przegląd ich najważniejszych własności. Druga część rozdziału dotyczy konstrukcji ciała liczb p-adycznych oraz podstawowych faktów z zakresu analizy p-adycznej.

Rozdział 2 jest oparty o pracę autora i poświęcony badaniu ciągu opisującego ostatni niezakończony zerem blok d cyfr w zapisie $n!$ dla kolejnych n. Podany jest warunek konieczny i wystarczający na to, aby rozważany ciąg był automatyczny. Co więcej, obliczona jest częstotliwość występowania w nim poszczególnych wartości. Otrzymane wyniki stanowią uogólnienie i uzupełnienie prac autorów takich jak Deshouillers, Luca, Ruzsa, Lipka, Byszewski, Konieczny.

W Rozdziale 3 rozważamy ostatnie niezakończone zerem bloki w zapisie $f(n)$, gdy f jest p-adyczną funkcją analityczną lub wielomianem. Przedstawiona jest klasyfikacja takich f, że otrzymany dla ustalonej bazy ciąg bloków jest, odpowiednio, automatyczny lub regularny. W przypadku, gdy baza jest potęgą liczby pierwszej, opisane wyniki okazują się blisko powiązane z rezultatami Bella oraz Shu i Yao dotyczącymi $\nu_p(f(n))$. Ponadto, otrzymujemy także pełny opis w sytuacji, gdy rozważana baza ma dwa lub więcej czynników pierwszych.

Rozdział 4 poświęcony jest obliczeniu waluacji 2-adycznej wyrazów uogólnionych ciągów Fibonacciego $(t_n(k))_{n\geq 0}$, zadanych przez rekurencję liniową stopnia k. Zagadnienie to było rozważane przez Lengyela i Marquesa dla $k = 2, 3, 4, 5$. W oparciu o pracę autora wyznaczamy dla $k \geq 4$ parzystego wzór na $\nu_2(t_n(k))$, z którego wynika, że ciąg ten jest 2-regularny. Podajemy również alternatywny dowód na częściowy wzór dla $k \geq 5$ nieparzystego z pracy Younga. Otrzymane wyniki są zastosowane do rozwiązania pewnych równań diofantycznych zawierających $t_n(k)$.

Bartosz Sobolewski

Abstract

This thesis is devoted to the study of base-b expansions of the terms of special number sequences, such as factorials, linear recurrence sequences, and p-adic analytic functions evaluated at nonnegative integers. We are interested primarily in the last blocks of digits not ending with zero and the p-adic valuation ν_p. Our main goal is to characterize the situation when the above functions evaluated at subsequent terms of considered sequences form automatic or regular sequences.

Chapter 1 serves as an introduction to main notions and tools known in the literature and used throughout the thesis. In the first part of the chapter the definition of automatic and regular sequences is provided, together with a survey of their key properties. The second part concerns the construction of the field of p-adic numbers as well as basic facts from p-adic analysis.

Chapter 2 is based on the author's work and dedicated to the investigation of the sequence describing the last block of d digits not ending with zero in the expansion of $n!$ for subsequent n. A necessary and sufficient condition is given for the automaticity of the considered sequence. Moreover, the frequency of each value in this sequence is computed. The obtained results generalize and complement the works of authors such as Deshouillers, Luca, Ruzsa, Lipka, Byszewski, Konieczny.

In Chapter 3 we consider the last blocks of digits not ending with zero in the expansion of $f(n)$, when f is a p-adic analytic function or a polynomial. We provide a classification of f such that for a fixed base the resulting sequence of blocks is automatic or regular, respectively. In the case of a prime power base the described results turn out to be closely related to the work of Bell, Shu and Yao on $\nu_p(f(n))$. Moreover, we also obtain a full description when the considered base has several prime factors.

Chapter 4 is devoted to calculating the 2-adic valuation of the terms of generalized Fibonacci sequences $(t_n(k))_{n\geq 0}$, defined by a linear recurrence of order k. This problem has been considered by Lengyel and Marques for $k = 2, 3, 4, 5$. Based on the author's paper we derive for $k \geq 4$ even a formula for $\nu_2(t_n(k))$, which implies 2-regularity of this sequence. We also provide an alternative proof for a partial formula in the case of $k \geq 5$ odd from the paper of Young. The obtained results are applied to solving certain Diophantine equations involving the terms $t_n(k)$.

Bartosz Sobolewski