Prof. dr hab. Marian Nowak

Instytut Matematyki , Uniwersytet Zielonogórski

Zielona Góra, 27 grudnia 2020r.

Opinia o rozprawie doktorskiej magistra Michała Kozdęby

zatytułowanej

" Projekcje minimalne w przestrzeniach funkcji mierzalnych "

Teoria projekcji minimalnych w przestrzeniach Banacha ma liczne i ważne zastosowania w teorii aproksymacji i analizie funkcjonalnej (zob. V.P. Odinets and G. Lewicki, Minimal projections in Banach spaces, Lectures Notes in Math., 1449, Springer , Berlin , 1990).

Przypomnijmy, że projekcja P_0 z przestrzeni Banacha S na jej domkniętą podprzestrzeń T nazywa się minimalna, jeżeli $\|P_0\| = \inf (\|P\| : P \in \mathcal{P}(S,T))$, gdzie $\mathcal{P}(S,T)$ jest zbiorem wszystkich ograniczonych liniowych projekcji z przestrzeni S na przestrzeń T. Główne problemy rozważane w tej teorii to istnienie projekcji minimalnych, jedyność projekcji minimalnych, efektywne wzory na projekcje minimalne oraz oszacowania norm projekcji minimalnych.

Rozprawa doktorska mgra. Michała Kozdęby poświęcona jest znalezieniu postaci projekcji minimalnych oraz wykazaniu jedyności projekcji minimalnych na pewnych przestrzeniach Banacha funkcji mierzalnych.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów. W rozdziale pierwszym, który pełni rolę wstępu, zebrane są niezbędne definicje i twierdzenia wykorzystywane w rozprawie. W szczególności, przytoczone są tutaj twierdzenia W. Rudina (Twierdzenie 1.5 i Twierdzenie 1.6) , które odgrywają kluczową rolę w dowodach głównych wyników rozprawy. Oryginalne wyniki autora zawarte są w pozostałych rozdziałach rozprawy.

Niech X, Y, Z będą zbiorami skończonymi i niech $S = L_p (X \times Y \times Z)$ oznacza przestrzeń Banacha (z p-normą) złożoną z wszystkich funkcji $f : X \times Y \times Z \rightarrow K$ (= ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych). Niech $T = L_p(X \times Y) + L_p(X \times Z) + L_p(Y \times Z)$ będzie podprzestrzenią S złożoną z funkcji zależnych od dwóch zmiennych. Przestrzeń S można interpretować jako przestrzeń „ macierzy trójwymiarowych" M(n,m,r), której elementami są zestawy n_Z klasycznych macierzy o wymiarach n_X na n_Z . Niech G będzie grupą skończoną generowana przez permutacje płaszczyzn macierzy z ich składaniem jako naturalnym działaniem.

W rozdziale drugim rozważany jest problem znalezienia postaci projekcji minimalnych z przestrzeni $S = L_p (X \times Y \times Z)$ na podprzestrzenie $T = L_p(X \times Y) + L_p(X \times Z) + L_p(Y \times Z)$ oraz $T = L_p(X) + L_p(Y) + L_p(Z)$. Głównymi rezultatami są tutaj Twierdzenie 2. 2 i Twierdzenie 2.7, gdzie wykazano, że istnieją jedyne projekcje Q z przestrzeni $L_p (X \times Y \times Z)$ na podprzestrzenie $T = L_p(X \times Y) + L_p(X \times Z) + L_p(Y \times Z)$ oraz $T = L_p(X) + L_p(Y) + L_p(Z)$ komutujące z grupą G. Stosując Twierdzenie 2.2 i Twierdzenie 2.7 oraz korzystając z Twierdzenia W. Rudina (Twierdzenie 1.6) wykazano tutaj , że projekcje Q są minimalne oraz uzyskano efektywne wzory na projekcje Q (Twierdzenie 2.3 i Twierdzenie 2.8). Należy podkreślić, że dowody Twierdzenia 2.2 i Twierdzenia 2.7 są pomysłowe i wymagały od autora stosowania wyrafinowanych technicznie metod.

W rozdziale trzecim badane są projekcje minimalne z przestrzeni $S = L_p (X \times Y \times Z)$ na podprzestrzeń $T = L_p(X \times Y) + L_p(X \times Z) + L_p(Y \times Z)$, gdzie X , Y i Z są przestrzeniami z bezatomowymi miarami probabilistycznymi. Wykorzystano tutaj wyniki rozdziału trzeciego do uzyskania wzoru na projekcję minimalną w przestrzeni funkcji prostych (Wniosek 3.7). Korzystając z Wniosku 3.4 oraz Wniosku 3.7 uzyskano efektywny wzór na projekcję minimalną Q dla $1 \le p$ (Twierdzenie 3.8). Wynik ten jest rozszerzeniem na przypadek przestrzeni $X \times Y \times Z$ wyniku W.A. Lighta i E.W. Cheneya (Approximation theory in tensor product spaces, Lectures Notes in Math., 1169, Springer, Berlin, 1985), gdzie uzyskano efektywną formułę na minimalną projekcję przestrzeni Banacha $L_p(X \times Y)$ na podprzestrzeń $L_p(X) + L_p(Y)$.

Uogólnienia wspomnianych wyników z rozdziałów drugiego i trzeciego dla skończonej liczby przestrzeni X_i, gdy i = 4,... są rozpatrywane w paragrafie 2.3 oraz paragrafie 3.2. Ponadto rozważane są tutaj również przypadki norm innych niż norma operatorowa.

Niech M(1,1,n) będzie podprzestrzenią przestrzeni S macierzy 3-wymiarowych M(n,m,r) o takich elementach $a_{i,j,k}$, że $a_{i1\ j1\ k} = a_{i2\ j2\ k}$ dla dowolnych $1 \le i_1 , i_2 \le n$, $1 \le j_1, j_2 \le m$. Analogiczne definiujemy podprzestrzenie macierzy M(1,m,1), M(n,1,1). W rozdziale czwartym rozważana jest podprzestrzeń T = M(1,1,n) + M(1,m,1) + M(n,1,1) przestrzeni S = M(n,m,r) , gdzie $3 \le m, n, r$. Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 4.7 , gdzie pokazano, że projekcja Q rozważana w rozdziale drugim jest jedyną projekcją minimalną. Zastosowana tu metoda bazuje na metodzie L. Skrzypka , który wykazał podobny rezultat dla zwykłych macierzy (L. Skrzypek, The uniqueness of minimal projections in smooth matrix spaces, J. Approx. Theory, Vol.107 (2000), 315-336 oraz L. Skrzypek, Minimal projections in spaces of functions of N variables, J. Approx. Theory, Vol.123 (2003), 214-231). Opiera się ona również na twierdzeniach W. Rudina (Twierdzenie 1.5) oraz B.L. Chalmersa i F.T. Metcalfa (The determination of minima projections and extensions In L^1, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.329 (1992), 289-305) .

Rozprawa jest zredagowana w sposób przejrzysty a jej układ jest zwarty i logiczne spójny. Nie zauważyłem istotnych usterek redakcyjnych. Trochę niezręczne jest stosowanie w paragrafie 1.2 oznaczenia X dla przestrzeni wektorowych, podczas gdy w pozostałej części rozprawy X oznacza przestrzeń z miarą. Nie ma to jednak żadnego wpływu na merytoryczną wartość rozprawy.

Ocena merytoryczna rozprawy. Moim zdaniem rozprawa doktorska mgra Michała Kozdęby jest merytorycznie poprawna i wnosi ważny wkład do teorii projekcji minimalnych na przestrzeniach Banacha. Tematyka rozprawy jest dobrze osadzona w literaturze przedmiotu i nawiązuje do wyników czołowych matematyków z tej dziedziny. Wyniki zawarte w rozprawie są oryginalne a dowody kluczowych twierdzeń wymagały pokonania sporych trudności technicznych. Warto tutaj zaznaczyć, że część wyników rozprawy została już opublikowana lub wysłana do druku .

Konkluzja. Biorąc powyższe pod uwagę jednoznacznie stwierdzam, że rozprawa doktorska mgra. Michała Kozdęby spełnia wymagania określone w Ustawie o stopniach i tytule naukowym. Wnioskuję o dopuszczenie mgra. Michała Kozdęby do dalszych etapów przewodu doktorskiego i nadanie Mu stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w zakresie dyscypliny matematyka. Ponadto, uważam , że rozprawa zasługuje na wyróżnienie.

Nowak

Marian Nowak