Opinia rozprawy doktorskiej mgr. Michała Kozdęby "Projekcje minimalne w przestrzeniach funkcji mierzalnych"

prof. dr hab. Adam Paszkiewicz
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Łódź, 5 listopada 2020 r.

Praca składa się ze wstępu (Rozdział 1.) i trzech następnych rozdziałów zawierających nowe wyniki Autora. Pierwszy zasadniczy cel pracy, który pochłonął chyba najwięcej wysiłku, to konstruowanie projekcji minimalnej na wybrane przestrzenie. Zasadnicze wyniki dotyczą przestrzeni macierzy trójindeksowych (Rozdział 2.) i przestrzeni funkcji od trzech zmiennych (Rozdział 3.). Podprzestrzeń, na którą rzutujemy jest wybierana pewnymi warunkami symetrii. Używane narzędzia sprowadzają się do klasycznych wyników W. Rudina opisanych w Rozdziale 1. (Twierdzenie 1.5 wraz z Twierdzeniem 1.6). Oto ich treść. Niech S będzie przestrzenią Banacha, T - jej domkniętą podprzestrzenią. Projekcją z S na T nazwiemy operator ograniczony $P : S \to T$, taki, że $P|_T$ jest identycznością. Projekcja P jest minimalna jeżeli $\|P\| \leq \|Q\|$ dla każdej innej projekcji Q z S na T. Niech G będzie grupą liniowych izomorfizmów przestrzeni S. Będziemy na niej rozpatrywać silną topologię operatorową i założymy jej zawartość. Jeżeli na podprzestrzeń T istnieje projekcja P i podprzestrzeń jest niezmiennicza względem G, to formuła $Q_P s := \int_G g^{-1} P g s d\mu(g)$ dla $s \in S$ określa pewną projekcję na T, komutującą z G. Przez μ oznaczyliśmy tu miarę Haara na G. Wynika stąd, że jeżeli dodatkowo G jest grupą surjektywnych izometrii S i wiemy, że istnieje tylko jedna projekcja P na T komutująca z G, to Q_P musi być projekcją minimalną (Twierdzenie 1.6, podstawa badań w Rozdziałach 2. i 3.). Dowód istnienia projekcji minimalnej i wskazanie jej postaci sprawdza się do znalezienia stosownej grupy izometrii i opisania jednej projekcji, która z nią komutuje.

W Sekcji 2.1 rozważono przestrzeń S macierzy trójindeksowych z normą l_p, $1 \leq p < \infty$.

Podprzestrzeń T jest sumą trzech podprzestrzeni. Każda taka podprzestrzeń powstaje jako klasy macierzy o wyrazach niezależnych od ustalonego indeksu. Znaleziona jest konkretna postać minimalnej projekcji. Prowadzą do tego długie, elementarne rachunki, ładnie przedstawione. W Sekcji 2.2 rozważa się taką samą przestrzeń S macierzy trójindeksowych. Podprzestrzeń T jest tym razem sumą trzech podprzestrzeni. Każda z nich to macierze o wyrazach niezależnych od dwóch ustalonych indeksów. Znów wskazany jest konkretny projektor minimalny. Dowód jest wyjątkowo długi, związany z rozważaniem licznych równań liniowych. Znów jest ładnie przedstawiony.

W tym momencie warto przejść do Twierdzenia 3.8 w Sekcji 3.2. W dowodzie (rozciągniętym na Sekcje 3.1 i 3.2) drobiazgowo uzyskano postać rzutu minimalnego $P : S \to T$ w następującej sytuacji. S jest przestrzenią L_p funkcji od trzech zmiennych (względem miary będącej produktem trzech miar bezatomowych). T jest sumą trzech przestrzeni funkcyjnych. Każda z nich, to klasa funkcji $f \in S$, takich, że wartość f nie zależy od jednej wybranej zmiennej. Podstawą badań jest tu wspomniany wynik z Sekcji 2.1. Zastosowanie teorii macierzy uzyskuje się poprzez przybliżenie elementów z L_p odpowiednimi funkcjami prostymi. Doktorant wspomina o analogicznych konstrukcjach w książce E. Cheney'a i W. Lighta (1985 r.) i w pracy A. Żwaka (1995 r.), ale funkcje proste są stosowane powszechnie i na różne sposoby. Dostrzeżenie możliwości dowodu Twierdzenia 3.8 użytą metodą i zrozumiałe przedstawienie całego rozumowania uznaję za oryginalne osiągnięcie Autora.

Po drobiazgowych rachunkach dla macierzy trójwskaźnikowych i dla funkcji od trzech zmiennych, Autor wskazuje analogiczne fakty w sytuacji, gdy 3 zostaje zastąpione dowolną liczbą naturalną $n \geq 3$. Dokładniej, uogólnia wyniki z Sekcji 2.1, uzyskując Twierdzenie 2.13, oraz uogólnia Twierdzenie 3.8 uzyskując Twierdzenie 3.10. W przestrzeni S macierzy n-indeksowych Autor rozważa przestrzeń T sum macierzy, takich że dla każdej z nich istnieje indeks, od którego nie zależą wyrazy tej macierzy. Analogicznie w przestrzeni S funkcji od n zmiennych rozważa przestrzeń T sum funkcji, gdzie każda taka funkcja jest niezależna od jednej ze zmiennych. Warto zaznaczyć, że uogólnienia te są przedstawione krótko, ale zrozumiale.

W pracy wskazany jest jeszcze jeden typ uogólnień, dotyczących istnienia projekcji minimalnej. W Sekcji 1.1, Autor przytacza też wzmocnioną wersję twierdzenia Rudina o minimalności projekcji komutującej z grupą (jako Twierdzenie 1.12). W Sekcji 2.3.2, wysuwa stąd szereg wniosków dotyczących różnego typu norm na przestrzeni macierzy wieloindeksowych. Wnioski te są raczej proste. Fenomen zależności rzutu minimalnego od normy, opisany w przykładzie 2.20, jest oczywisty.

Zauważymy teraz, że w każdym opisanym przypadku, po znalezieniu pewnej projekcji minimalnej P (przestrzeni S na podprzestrzeń T), warto odpowiedzieć na pytanie, czy projekcja ta jest jedna. W wielu przypadkach problem można sprowadzić do zaproponowania w przestrzeni S pewnego operatora E_P, związanego z P, przeprowadzającego T na T. Przyjmijmy dla uproszczenia, że S jest przestrzenią refleksywną i każdy punkt ma tylko jeden funkcjonał wybijający normę (tzn. norma jest gładka). Załóżmy też, że podprzestrzeń T jest skończenie wymiarowa, zaś P jest projekcją minimalną na T. Niech operator E_P, działający na S, będzie skończoną sumą $\sum_i y_i x_i(\cdot)$, dla par $(x_i(\cdot), y_i) \in S^* \times S$ spełniających $\|x_i(P_i y_i)\| = \|x_i\| \|y_i\| \|P\|$. G. Lewicki i L. Skrzypek w 2007 roku wykazali, że jeżeli pewien operator E_P, opisanej postaci, ma odwracalne obcięcie do podprzestrzeni T, to P jest jedyną projekcją minimalną. W ogólniejszej sytuacji, operatory tego typu znane są jako operatory Chalmersa, Metcalfa. Posłużyły one do sformułowania ogólnego kryterium minimalności projekcji w 1992 roku. Należy zaznaczyć, że badania jedyności projekcji minimalnej w przestrzeniach macierzy i funkcji wielu zmiennych, metodą Lewickiego, Skrzypka, zostało zapoczątkowane już w pracach L. Skrzypka w 2000 i 2003 roku.

Rozdział 4. omawianej pracy zawiera następujący zasadniczy wynik. Niech S będzie przestrzenią macierzy trójindeksowych, zaś T podprzestrzenią sum macierzy typu: wyrazy macierzy nie zależą od jednego indeksu ustalonego dla tej macierzy. Wówczas, przy naturalnej normie l_p na S istnieje dokładnie jedna projekcja minimalna z S na T (Twierdzenie 4.7). Metoda dowodu, ogólnie sugerowana przez prace S. Skrzypka, polega na zaproponowaniu pewnej grupy surjektywnych izometrii na przestrzeni S. W tym przypadku jest to (jak w Sekcji 2.1) grupa G permutacji wyrazów macierzy, generowana przez przestawienie dwóch warstw macierzy. Warstwy te są określone dwoma wartościami jednego indeksu. Dla ustalonej pary $(x(\cdot), y) \in S^* \times S$, wybijającej normę projekcji minimalnej S (opisanej w Sekcji 2.1), unormowana suma $E_P(s) = \sum_g g(y) s g^{-1}(x(s))$ jest już pożądanym operatorem Chalmersa, Metcalfa (gdy g przebiega grupę G). Autor osiąga ten rezultat pokazując, że obcięcie operatora E_P do podprzestrzeni T jest wielokrotnością identyczności (dowód Twierdzenia 4.7). Uzyskuje się to przez popisowy rezultat, polegający na opisaniu dowolnej operacji $L : T \to T$ komutującej z obcięciem do T wszystkich izometrii z grupy G (Twierdzenie 4.6). W dowodzie Twierdzenia 4.7, dającego jedyność projekcji minimalnej, niezbędny był też szereg pomocniczych wyników.

Rozdział 4. zawiera kilka uogólnień głównego wyniku. Norma L_p w przestrzeni S złożonej z macierzy jest zastępowana dość dowolną normą (np. normami Orlicza). Jedyność projekcji minimalnej jest przy tym zachowana. Zauważalny jest fakt, że w Rozdziale 4., poza zmianą normy, nie rozpatruje się innych par złożonych z przestrzeni S i podprzestrzeni T. Wskazuje to, że temat projekcji minimalnej jest daleki od wyczerpującego omówienia.

Podsumowując, opiniowana rozprawa zawiera złożone, oryginalne rozumowanie pokazujące jedyność projekcji P z S na T, komutującej z podgrupą G izometrii S, w pewnych naturalnych sytuacjach (gdy S jest przestrzenią macierzy wieloindeksowych). Pozwala to, za każdym razem, efektywnie opisać projekcję minimalną z S na T (rezultaty Rozdziału 2.). Oryginalne jest też wywnioskowanie, z niektórych faktów dotyczących macierzy, analogicznych faktów dotyczących funkcji na produktach przestrzeni z miarami bezatomowymi (Rozdział 3.). W wybranym przypadku pokazana jest też jedyność projekcji minimalnej (Rozdział 4.). Choć dowód przeprowadzony w Rozdziale 4. strukturą naśladuje wcześniejsze badania w przestrzeniach macierzy, właśnie w tym rozdziale zostały przełamane wyjątkowe trudności techniczne. Rozdział 4. jest przy tym przejrzyście napisany. Ogólnie biorąc Autor wykazał dużą dojrzałość w badaniach macierzy wieloindeksowych. Dołączam listę zauważonych błędów i sugerowanych poprawek, ale redakcję wszystkich rozumowań oceniam wysoko. Pewnym wyjątkiem jest pierwsza część wstępnego Rozdziału 1., dotycząca ogólnych przestrzeni Banacha. Warto w niej przynajmniej ujednolicić oznaczenia i wskazać uproszczenia, które daje refleksywność przestrzeni S.

Rozległość Rozdziału 2., pokazuje, że Autor nie wyczerpał naturalnych w tym momencie pytań pisząc Rozdział 3. i 4. Ilość przełamanych trudności jest jednak wyjątkowo duża. Pozwala ocenić pracę jako bardzo dobrą rozprawę doktorską.

Doktorant posiada też ciekawy, opublikowany dorobek. Wnioskuję o dopuszczenie mgr. Michała Kozdęby do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

A. Pełczyński

Errata:

str.	wiersz	jest	(raczej) powinno być
6	$18^\bullet$	w pierwszym	w drugim
6	$20^\bullet$	najpierw w	w
6	$1_\bullet$	normy operatorowej) projekcji	normy) projekcji, z silną normą operatorową.
7	$12^\bullet$	o okresie 2π	o okresie 2π, z normą supremum.
8	$10^\bullet$	tego izomorfizmu	izomorfizmu G na $\mathcal{A}$.
8	$13^\bullet$	ciągłe w silnej topologii operatorowej.	ciągłe.
8	$15^\bullet$, $17^\bullet$	trzeba uzgodnić oznaczenia	
9	$2^\bullet$	gdzie $P^{**} : X^{**} \to W$	oraz $P^{**}(X^{**}) \subset W$.
9	$6^\bullet$	$P^{**} = \sum_{j=1}^{n} \varphi(f_j) \cdot w_i$,	$P^{**}\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(f_j) \cdot w_j$,
9	$14^\bullet$, $17^\bullet$	trzeba doprecyzować symbol $y \otimes x$	
9	$13_\bullet$	μ jest	μ jest pewną
10	$11^\bullet$	$g^{-1} \circ A \circ g$	$g^{-1}Ag$
15	$8_\bullet$, $7_\bullet$	Zdefiniujmy ... grupę. Rozważmy zbiór $\{\pi_{l,m}^X : l, m \in \{1, \ldots, n_X\}, l \neq m\}$, który z naturalnym działaniem składania permutacji generuje grupęΠ_{n_X}.	
15	$2_\bullet$	z elementami S	z izometriami na S
16	$3^\bullet$	ponieważ z reguły ośmiu punktów	ponieważ
20	$1^\bullet$	$k \in Z$.	
22	$4^\bullet$	zatem	Zatem, skoro Q komutuje z G, to otrzymujemy
22	$6^\bullet$	opuścić	
22	$3_\bullet$, $1_\bullet$	jaśniej napisać o jakie macierze chodzi (podobnie str. 23, 24)	
24	$3_\bullet$	z_1).	w_1).
28	$7_\bullet$	$k \in Z$.	$k \in Z$, zaś na $X \times Y \times Z$ będzie rozpatrywany produkt tych miar.

str.	wiersz	jest	(raczej) powinno być
29	$11^\bullet$	$\ldots X_n$	$\ldots \times X_n$
30	$9^\bullet$	$\ldots X_n$	$\ldots \times X_n$
35	$8^\bullet$	norm	powyższych norm
35	$8_\bullet$	jaśniej napisać co to jest f	
36	$5_\bullet$	$f(s)ds$	$\lvert f(s)\rvert ds$
37	$11_\bullet$	$c_\alpha c_\beta = 0$ if $\alpha \neq \beta$	$c_i c_j = 0$ dla $i \neq j$
38	$2_\bullet$	$V_n \circ Q \circ V_n^{-1}$	$V_n^{-1} Q V_n$
45	$1_\bullet$	trzeba wyjaśnić jak rozumiemy $A_\pi y$, wówczas dowód Lematu 4.1 będzie zbędny	
46	$9^\bullet$	należy wyjaśnić dokładniej $\mathcal{E}(Q)$, czy użyta jest gdzieś przestrzeń niereflektywna S?	
46	$9_\bullet$	dodać kwantyfikację dla x, y	
50	$1_\bullet$	odpowiadającym	odpowiadających
62	$7_\bullet$	Approx	Approx.

Adam Paszkiewicz