dr hab. Łukasz Pańkowski, prof. UAM
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwerstytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 09.09.2020

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgra Piotra Miski

p-adic properties of combinatorial sequences and subsets of $\mathbb{N}$

Rozprawa doktorska mgr. Piotra Miski *p-adic properties of combinatorial sequences and subsets of* $\mathbb{N}$ składa się z cyklu czterech prac powiązanych tematycznie i opublikowanych w dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym. Promotorem rozprawy jest prof. UJ dr hab. Maciej Ulas. Zgodnie z tematem rozprawy omawia ona pewne własności p-adyczne wybranych ciągów kombinatorycznych oraz zbiorów ułamków utworzonych z pewnych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. W naturalny sposób rozprawę tematycznie można podzielić na dwie części. Pierwsza dotyczy badania waluacji p-adycznej pewnych ciągów kombinatorycznych. Druga część dotyczy gęstości p-adycznej zbioru wszystkich ułamków, gdzie licznik i mianownik brany jest z ustalonego podzbioru zbioru liczb naturalnych, w ciele liczb p-adycznych.

Na pierwszą część składają się następujące dwie prace naukowe:

[1] P. Miska, *On p-adic valuations of Stirling numbers*, Acta Arith. **186.4** (2018), 337–348.

[2] P. Miska, M. Ulas, *On some properties of the number of permutations being products of pairwise disjoint d-cycles*, Monats. Math. **192** (2020), 125–183.

W pierwszej z nich badana jest waluacja p-adyczna dla liczb Stirlinga drugiego typu $S(n,k)$, czyli wielkości liczącej liczbę podziału zbioru n-elementowego na dokładnie k niepustych podzbiorów. Przez waluację p-adyczną $\nu_p(x)$ (p jest liczbą pierwszą) niezerowej liczby wymiernej x rozumiemy liczbę całkowitą t, taką że $x = (a/b)p^t$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}_+$, $\mathrm{nwd}(a,b) = 1$ oraz $p \nmid ab$. Badanie własności ciągu waluacji $(\nu_p(S(n,k)))_{n\in\mathbb{N}_+}$ nie jest zagadnieniem nowym i było ono tematem badań dla wielu matematyków. W szczególności znana jest hipoteza, postawiona dla $p = 2$ przez T. Amdeberhana, D. Manna i V. Molla oraz dla $p \geqslant 3$ przez A. Berrizbeitia, L. Medina, A. Molla, V. Molla i L. Noble, dotycząca zachowania się ciągu $(\nu_p(S(n,k)))_{n\in[a]_d}$, gdzie n przebiega liczby pewnego ustalonego ciągu arytmetycznego $[a]_d := \{n \in \mathbb{N}_+ : n \equiv a \pmod d\}$. Hipoteza ta mówi, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}_+$ i liczby pierwszej p (jeżeli $p \geqslant 3$, to dodatkowo żądamy, aby $p > k$), istnieje liczba naturalna μ, taka że dla dostatecznie dużego m ciąg $(\nu_p(S(n,k)))_{n\in[a]_{L_{p^m}}}$ jest ciągiem stałym dla wszystkich oprócz μ reszt a modulo $L_{p^m} := (p-1)p^{\lceil \log_p k\rceil+m-2}$. Co więcej, każda z tych wyjątkowych μ reszt modulo $L_{p^{m+1}}$, dla których ciąg ten nie jest stały, pochodzi od dokładnie jednej klasy modulo L_{p^m}, dla której również ten ciąg nie jest stały. W literaturze hipoteza ta została udowodniona jedynie dla małych k i $p = 2$. Natomiast głównym wynikiem pracy [1] autorstwa Pana Miski jest twierdzenie potwierdzające tę hipotezę dla $p > k$. Co więcej, autor zauważył, że własność, o której mówi ta hipoteza, można udowodnić w pełnej ogólności dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_+$ i dowolnej liczby pierwszej p, o ile będziemy jedynie wymagali, aby ciąg $(\nu_p(S(n,k)))_{n\in[a]_d}$ był stały tylko dla prawie wszystkich $n \in [a]_d$ tzn. stały z wyjątkiem skończonej liczby liczb $n \in [a]_d$. Ponadto na uwagę zasługuje fakt, że główne twierdzenie pracy [1] zawiera również ciekawą zależność pozwalającą wyznaczyć wartość ciągu stałego $(\nu_p(S(n,k)))_{n\in[a]_{p^m(p-1)}}$ za pomocą ciągu $(\nu_p(S(n,k)))_{n\in[a]_{p^{m-1}(p-1)}}$, również w przypadku, gdy ciąg $(\nu_p(S(n,k)))_{n\in[a]_{p^{m-1}(p-1)}}$ jest jednym z μ wyjątkowych ciągów niestałych. Dowód głównego twierdzenia pracy [1] uważam za bardzo ciekawy i pomysłowy, pomimo że autor nie stosuje w nim bardzo zaawansowanych narzędzi. Ponadto warto wspomnieć, że oba twierdzenia pomocnicze (Theorem 2.1 i Theorem 2.2 w [1]) są udowodnione w większej ogólności i prawdopodobnie można je stosować dla innych ciągów kombinatorycznych spełniających odpowiednie własności.

Praca [2] została napisana przez Pana Miskę wspólnie z promotorem rozprawy. Jednak oświadczenie współautora jasno potwierdza, że wkład autorski Pana Miski był znaczący. Co więcej oświadczenie to jasno precyzuje, które fragmenty artykułu zostały opracowane przez promotora. Zatem biorąc pod uwagę obszerność tej pracy oraz dosyć techniczny charakter niektórych wyników omówię jedynie jej najciekawsze tezy z pominięciem tych uzyskanych przez promotora. Praca dotyczy pewnych własności p-adycznych ciągu $(H_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $H_d(n)$

jest liczbą permutacji w S_n będących iloczynem parami rozłącznych cykli długości d. Zagadnienie to jest dosyć dobrze zbadane w przypadku, gdy d jest liczbą pierwszą, co nie dziwi, gdyż w tym przypadku $H_d(n)$ liczy liczbę elementów rzędu d w grupie S_n. Cel jaki postawili sobie autorzy to zbadanie tego ciągu w przypadku, gdy d nie jest koniecznie liczbą pierwszą. Problem postawiony przez autorów, mimo że zdecydowanie mniej naturalny od przypadku, gdy d jest liczbą pierwszą, uważam wciąż za ciekawy i warty zbadania. Jedną z interesujących własności omówionych w [2] jest okresowość ciągu $(H_d(n) \pmod{c})_{n\in\mathbb{N}}$. Jak pokazali autorzy ciąg ten jest ciągiem stałym równym 1, gdy $c = d+1, d+2$ jest liczbą złożoną lub $c = d+k$ jest również liczbą złożoną oraz $d \geqslant \max(k+2, 3+2\sqrt{k+2})$. Natomiast w przypadku, gdy $c = p^r$ dla liczby pierwszej $p \neq d$ oraz $(d,p,r) \neq (4,2,2)$ ciąg $H_d(n) \pmod{c}$ jest okresowy o okresie c. Natomiast c jest okresem zasadniczym tego ciągu, o ile $p > d$. Ponadto autorzy podają dokładną charakteryzację tego ciągu w przypadku, gdy $c = d+1, d+2$ jest liczbą pierwszą, czego konsekwencją są równości $\nu_p(H_{p-1}(n)) = 0$ i $\nu_p(H_{p-2}(n)) = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Następnie autorzy pracy [2] podejmują próbę opisania ciągu $(\nu_p(H_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $p \geqslant d$ jest liczbą pierwszą. Warto wspomnieć, że przypadek $p = d$ został już wcześniej dobrze opisany w literaturze. Jednak autorzy w pracy [2] podają elegancji i dosyć prosty dowód znanego faktu mówiącego, że

$$\nu_p(H_p(n)) \geqslant \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor (p-1) + \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \pmod{p} \right),$$

gdzie nierówność staje się równością, o ile $p \mid \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Autorzy podają również dosyć elegancką charakteryzację ciągu $(\nu_p(H_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dla $p > d$, poprzez pokazanie w jaki sposób zachowują się rozwiązania kongruencji $H_d(n) \equiv 0 \pmod{p^k}$, gdy k zwiększymy o 1. Aby podkreślić różnorodność zagadnień arytmetycznych ciągu $H_d(n)$ poruszonych w pracy [2] przytoczę jedynie, że autorzy pokazali również, że dla dowolnego $d \geqslant 2$ zbiór dzielników pierwszych ciągu $(H_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieskończony. Co więcej, podali wzór na $\mathrm{nwd}(H_d(n)-1, n)$ oraz szereg wyników dotyczących największego wspólnego dzielnika liczb $H_a(n)$ i $H_b(n)$. Metody dowodowe zastosowane w pracy [2] bazują na dosyć elementarnych, lecz pomysłowych rozumowaniach. Wymagały one z pewnością dosyć żmudnych rachunków oraz przeanalizowania wielu poszczególnych przypadków, co bardzo dobrze pokazuje solidny warsztat dowodowy Pana Miski. Natomiast szeroki wachlarz własności arytmetycznych ciągu $H_d(n)$ zbadanych w pracy [2] pokazuje, że Pan Miska potrafi z dużą elastycznością podejść do zbadania postawionego problemu.

Drugim tematem poruszonym w rozprawie jest p-adyczna gęstość pewnych zbiorów ułamków w ciele liczb p-adycznych. Wyniki dotyczące tego zagadnienia zostały zawarte w pracach

[3] P. Miska, N. Murru, C. Sanna, *On the p-adic denseness of the quotient set of a polynomial image*, J. Number Theory **197** (2019), 218–227.

[4] P. Miska, C. Sanna, *p-adic denseness of members of partitions on* $\mathbb{N}$ *and their ratio sets*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **43** (2020), 1127–1133.

Przez zbiór ułamków zbioru $A \subset \mathbb{Z}$ rozumiemy zbiór $R(A) := \{a/b : a, b \in A, b \neq 0\}$. Zagadnienie p-adycznej gęstości zbioru $R(A)$ w ciele liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$ było przedmiotem badań wielu matematyków, lecz dotyczyły one głównie sytuacji, gdy zbiór A był ustalonym znanym ciągiem liczb naturalnych np. ciągiem Fibonacciego lub ciągiem Lucasa. Praca [3] dotyczy problemu p-adycznej gęstości zbiorów $R(A)$ w $\mathbb{Q}_p$, gdzie $A = f(\mathbb{Z}_+)$ dla pewnych funkcji $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_p$. Jak pokazują autorzy pracy [3] gęstość zbioru $R_f := R(f(\mathbb{Z}_+))$ jest ściśle powiązana z miejscami zerowymi funckji f i ich krotnościami. Mianowicie warunkiem konicznym na to, by zbiór R_f był gęsty w $\mathbb{Q}_p$ dla funkcji ciągłej $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ jest posiadanie miejsc zerowych funkcji f w $\mathbb{Z}_p$. Znacznie mniej oczywistym wynikiem pokazanym w [3] jest fakt, że jeżeli funkcja f jest analityczna oraz posiada dwa miejsca zerowe o krotnościach, które są liczbami względnie pierwszymi, to R_f jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$. Jako konsekwencję tej obserwacji autorzy charakteryzują kiedy zbiór R_f jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$, gdy f jest wielomianem niskiego stopnia o współczynnikach całkowitych. Następnie autorzy podają szereg wyników podających precyzyjną i pełną kategoryzację kiedy zbiór $R(S_m^n)$ jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$, gdzie $S_m^n := \{x_1^n + \ldots + x_m^n : x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Autorzy znacząco poszerzają wiedzę w tym temacie, gdyż dotychczas znane były jedynie wyniki w przypadku $n = 2, 3$. Oświadczenia współautorów tej pracy potwierdzają istotny wkład Pana Miski w powstanie tej pracy.

Ostatnia praca [4] wchodząca w skład rozprawy doktorskiej dotyczy gęstości p-adycznej zbiorów $A_1, \ldots, A_k$ w $\mathbb{Z}_p$ oraz zbiorów $R(A_1), \ldots, R(A_k)$ w $\mathbb{Q}_p$, gdzie zbiory $A_1, \ldots, A_k$ tworzą podział zbioru $\mathbb{N}$. Autorzy pokazują, że dla dowolnych $A_1, \ldots, A_k$ będących podziałem $\mathbb{N}$, istnieje co najwyżej $k-1$ liczb pierwszych p, takich że żaden ze zbiorów $A_1, \ldots, A_k$ nie jest gęsty w $\mathbb{Z}_p$. Ponadto autorzy pokazali, że liczba $k-1$ jest tutaj optymalna tzn. dla parami różnych liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_{k-1}$ podali oni przykład podziału zbioru $\mathbb{N}$ na k zbiorów, które nie są gęste w $\mathbb{Z}_{p_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Łatwym wnioskiem z tych rozważań jest fakt, że również dla co najwyżej $k-1$ liczb pierwszych p zbiory $R(A_1), \ldots, R(A_k)$ nie są gęste w $\mathbb{Q}_p$. Jak jednak pokazują autorzy, w tym przypadku liczba $k-1$ nie jest jest już optymalna i można ją poprawić do wartości $\lfloor \log_2 k \rfloor$, która jak się okazuje jest już optymalna. Również i w tym przypadku oświadczenia współautora jasno wskazują na znaczący wkład autorski Pana Miski.

Podsumowanie. Pan mgr Piotr Miska jest autorem dwunastu prac naukowych opublikowanych w większości w dobrych czasopismach o międzynarodowym zasięgu. Fakt ten wraz z merytoryczną zawartością prac wchodzących w skład rozprawy doktorskiej pokazuje bardzo wysoki poziom doktoranta. Dorobek wskazuje, że Pan Miska jest w stanie samodzielnie dowodzić twierdzeń oraz, co może być również bardzo istotne w dalszej karierze naukowej, potrafi nawiązywać współpracę z matematykami z innych ośrodków akademickich. Prace wchodzące w skład rozprawy są starannie napisane. Nieliczne usterki redakcyjne w żaden sposób nie wpływają na pozytywny odbiór pracy. Dowody przedstawione w rozprawie są spisane z wyjątkowo dużą ilością detali, co znacząco ułatwia czytanie pracy. Jednak biorąc pod uwagę, że rozprawa składa się z cyklu artykułów naukowych, dziwi w pewnych miejscach aż taka szczegółowość w przedstawianiu większości obliczeń. Metody dowodowe przedstawione w rozprawie opierają się głównie na dosyć elementarnych rozważaniach i nie opierają się na zaawansowanych metodach pochodzących z innych dziedzin matematyki. Niemniej jednak nie uważam tego za wadę, bo w przejrzysty sposób wskazuje to na dogłębne zrozumienie danego zagadnienia przez Pana Miskę. Z pewnością przeprowadzenie opisanych w rozprawie dowodów przy użyciu głównie technik dosyć klasycznych wymagało od doktoranta bardzo dokładnego zrozumienia natury badanych obiektów. Wszystko to świadczy o wysokim poziome matematycznym, dużej dojrzałości i bardzo dobrym opanowaniu technik dowodowych charakterystycznych dla tej tematyki. Podsumowując uważam, że **przedstawiona rozprawa spełnia z nawiązką ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Pana mgra Piotra Miski do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Pawlowski Ł.