INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

dr hab. Jonatan Gutman, prof. IM PAN
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
tel: +48 788 830 967, email: y.gutman@impan.pl
https://www.impan.pl/~gutman/

Warszawa, 20 Sierpnia 2020 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej "Topological Dynamics of Countable Amenable Groups" mgr Marta Straszak

Wstęp

Rozprawa doktorska, napisana w języku angielskim, składa się z 86 stron i jest podzielona na 8 rozdziałów w tym wstęp. Zawiera spis treści oraz bibliografią. Rozprawa została napisana pod kierunkiem dra hab. Dominika Kwietniaka, prof. UJ, i opiera się i rozszerza opublikowaną pracę "Martha Łącka and Marta Straszak. Quasi-uniform convergence in dynamical systems generated by an amenable group action. *Journal of the London Mathematical Society*, 98(3):687– 707, 2018."

Rozprawa dotyczy pytania jakie wartości entropii topologicznej można realizować dla naturalnych podklas przesunięć na alfabecie skończonym dla działań przeliczalnych grup mierzalnych. Historycznie dla przesunięć przez grupę $\mathbb{Z}$ na alfabecie $\mathscr{A} = \{1, 2, \ldots, A\}$ z typu Toeplitza zostało udowodnione przez Kůrka w oparciu o wyniki Susan Walters, że wszystkie możliwe wartości dla entropii topologicznej oprócz $\log A$, t.j. $[0, \log A)$, są realizowane. Ten wynik został uogólniony przez Fabrice Krieger w 2007 dla przesunięć przez przeliczalne i mierzalne grupy rezydualnie skończone. Głównym wynikiem Rozprawy jest:

Twierdzenie 8.1 Rozprawy: Niech G będzie grupą kongruentnie monokafelkowalną, a $\mathscr{A}$ będzie skończonym alfabetem. Wtedy dla każdej liczby $\gamma \in [0, 1)$ istnieje minimalny podukład Y układu dynamicznego $(\mathscr{A}^G, G)$ taki, że $h_{\text{top}}(Y) = \gamma \; log|\mathscr{A}|$.

Dodatkowym wynikiem udowodni w Rozprawie (Twierdzenie 8.2) jest że, dla każdej liczby $\gamma \in [0, 1)$ istnieje podukład tranzytywny i proksymalny (Z, G) układu dynamicznego $(\{0, 1\}^G, G)$ dla G grupy mierzalnej i rezydualnie skończonej takie, że $h_{\text{top}}(Z) = \gamma \log 2$. Zauważmy, że dla działań przez grupy przemienne nie ma nietrywialnych proksymalnych działań minimalnych, więc dwa powyższe wyniki są „niezależne".

Uważam, że te wyniki są interesujące, ale nie nazwałbym ich fundamentalnymi. Doktorantka zwraca uwagę na zasadnicze pytanie czy każda grupa mierzalna jest grupą kongruentnie monokafelkowalną, ale próba rozwiązania tego problemu nie jest wspomniana. Z drugiej strony jeżeli odpowiedź jest pozytywna, Twierdzenie 8.1 jest najlepszym możliwym dla kategorii grup mierzalnych i to jest bardzo satysfakcjonujące. Zwracamy uwagę, że w artykule na którym Rozprawa jest oparta, tylko słabszy wynik dla działań mierzalnych grup rezydualnych skończonych został udowodniony, będąc alternatywnym dowodem wyniku Fabrice Krieger. Ponieważ klasa grup (mierzalnych) kongruentnie monokafelkowalnych jest większa niż klasa grup mierzalnych rezydualnych skończonych, stwierdzono że Rozprawa zawiera oryginalny i wartościowy materiał, który nie został jeszcze opublikowany w literaturze.

Rozprawa jest bardzo dobrze napisana i jest przyjemna do czytania. Wiele instruktywnych przypadków ilustruje teorię. Czasami jednak podano zbyt wiele szczegółów, np. zdziwienie budzi dowód łatwego i klasycznego faktu, że każdy układ dynamiczny zawiera minimalny podukład. Rozprawa została również bardzo dobrze edytowana. Jeśli chodzi o literówki to wspomnę tylko, że w bibliografii nazwiska kilku matematyków nie są napisane wielkimi literami, np. Thue, Morse, Sarnak, Yorke, Lie i Haar.

Dowód głównego twierdzenia jest bardzo elegancki. Przyjrzyjmy się głównym składnikom dowodu. Dla zwartej przestrzeni metrycznej (X, ρ) i G grupy mierzalnej z ciągiem Følnera $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, Rozdział 4 wprowadza pseudometrykę Weyla dla $\underline{x}, \underline{z} \in X^G$:

$$D_W\big(\underline{x}, \underline{z}\big) := \limsup_{n\to\infty} \sup_{g\in G} \frac{1}{|F_n|} \sum_{f\in F_n g} \rho(\underline{x}(f), \underline{z}(f)).$$

Jest to sam w sobie interesujący i użyteczny przedmiot, ale jest też kluczowym składnikiem dowodu. Rzeczywiście, zgodnie z Twierdzeniem 5.2 funkcja entropii

$$h : (\mathscr{A}^G, D_W) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \qquad \text{zdefiniowana przez} \qquad h(x) := h_{\text{top}}(\overline{Gx})$$

jest ciągła. Następnie w Rozdziale 7 wprowadzono pojęcie konfiguracji quasi-Toeplitza (w związku z ciągiem Følnera i powiązanym *eleganckim ciągiem* *centrów*) dla działań przez grupy kongruentnie monokafelkowalne, uogólniając klasyczne pojęcie działań Toeplitza wprowadzone przez Jacobs i Keane w 1969 roku. Według głównego wynikiem tego rozdziału, Lemat 7.3, rodzina konfiguracji quasi-Toeplitza (w związku z ciągiem Følnera i powiązanym eleganckim ciągiem centrów) jest D_W - drogowo spójną. Ostatni krok dowodu składa się z trywialnej obserwacji, że z konfiguracji (quasi-Toeplitza) stałej powstaje układ dynamiczny z entropią zerową, oraz z konstrukcji konfiguracji quasi-Toeplitza $x \in \mathscr{A}^G$ takiej, że $h(x) \geqslant \gamma \log |\mathscr{A}|$. Główne twierdzenie wynika z połączenia wszystkich wymienionych faktów.

Rozprawa skorzystałaby na dokładniejszym omówieniu głównego twierdzenia w kontekście działań $\mathbb{Z}$, zarówno jego historii, jak i możliwych alternatywnych podejść (Twierdzenie Perrona Frobiniusa...). Wybór rozważenia kontekstu (mierzalnych) grup kongruentnie monokafelkowalnych nie jest najbardziej ogólnym możliwym i jest w rzeczywistości związany z technikami konfiguracji (quasi-)Toeplitza zastosowanymi w Rozprawie. Byłoby bardzo korzystne dla Rozprawy, gdyby zawierała dyskusję na temat głównego twierdzenia dla działań grupy soficzne w kontekście topologicznej entropii soficznej, wprowadzonej przez Kerr i Li.

Przyjrzyjmy się teraz dodatkowym wynikom, o których nie wspomniano powyżej.

Omówienie treści rozprawy i dodatkowych wyników

Rozdział 1 zawiera ogólne wprowadzenie do teorii układów dynamicznych wywodzącej się z nauk przyrodniczych, a także omówienie struktury Rozprawy.

Rozdział 2 zawiera definicje podstawowych pojęć dynamiki topologicznej, a także definicje kluczowe dla Rozprawy, takie jak grupy kongruentnie monokafelkowalne i kongruentne ciągi Følnera.

W Rozdziale 3 udowodniono raczej trywialne fakty dotyczące minimalności i proksymalności, na przykład podany jest wzór obejmujący syndetyczności do obliczenia $m(x)$ - liczba minimalnych podukładów $\overline{Gx}$.

W Rozdziale 4, po wprowadzeniu pseudometryki Weyla D_W, pokazano w Twierdzeniu 4.2, że dla działania grupy mierzalnej G na przesunięcie $\mathscr{A}^G$, D_W jest jednostajnie równoważna z pseudometryką określoną przez górną gęstość Banacha „lokalizacji różnic”:

$$D^\star(\underline{x}, \underline{z}) = \lim_{n\to\infty} \sup_{h\in G} \frac{|\{g \in G : \underline{x}(g) \neq \underline{z}(g)\} \cap F_n h|}{|F_n|}$$

Jest to przydatne twierdzenie, które zostało wielokrotnie używane w Rozprawie, na przykład w dowodzie ciągłości funkcji entropii w Rozdziale 5 wspomnianym powyżej.

Rozdział 5 zawiera, oprócz dowodu ciągłości funkcji entropii, dwie sekcje które nie są używane gdzie indziej w Rozprawie, ale zawierają interesujące wyniki. Na przykład Twierdzenie 5.3 jest uogólnieniem do działań przeliczalnych grup mierzalnych twierdzenia Downarowicza i Iwanika, że funkcja $m(\cdot)$ jest półciągła z dołu dla działań $\mathbb{Z}$.

Rozdział 6 zawiera materiał o *przesunięciach podporządkowanych* wprowadzone przez Kulczyckiego, Kwietniaka i Li. Zgodnie z Twierdzeniem 6.1 dla $Z \subseteq \{0,1\}^G$, jeśli $h_{\text{top}}(Z) = 0$, to entropia podporządkowanego przesunięcia $\breve{Z}$ pokrywa się z "asymptotyczną gęstością jedynek" w Z:

$$h_{\text{top}}(\breve{Z}) = \log(2) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \max\{\sum_{g\in F_n} w(g) : w \in \mathcal{B}_{F_n}(Z)\}.$$

Wynik ten jest kluczem do konstrukcji w Twierdzenie 8.2.

Rozdział 7, w którym wprowadzono pojęcie konfiguracji quasi-Toeplitza, został już wspomniany.

Ostatni rozdział, Rozdział 8, zawiera dowody Twierdzeń 8.1 i 8.2.

Konkluzja

Rozprawa jest głownie (ale nie tylko) oparta na artykule opublikowanym w "Journal of the London Mathematical Society". Według rankingu Australijskiego Towarzystwa Matematycznego jest to czasopismo z typu A w skali A*, A, B, C. Ponad to, współautorka Doktorantki w artykule oświadczyła że każda autorka wniosła równy wkład.

Art. 13 ust. 1. *ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki* stwierdza, że „Rozprawa doktorska, ... powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub oryginalne dokonanie artystyczne oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej".

W moim przekonaniu Rozprawa mgr Marty Straszak "Topological Dynamics of Countable Amenable Groups" spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym przedkładam Radzie Wydziału Matematyki Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego wniosek o przyjęcie Rozprawy i dopuszczenie mgr Marty Straszak do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jonatan Gutman

Jonatan Gutman