dr hab. inż. Jacek Serafin
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Wrocław, 1.09.2020 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Marty Straszak
"Topological Dynamics of Countable Amenable Groups"

1. Opis problematyki i wyników rozprawy.
Rozprawa doktorska mgr Marty Straszak dotyczy zagadnień dynamiki układów topologicznych z działaniem grup średniowalnych (inaczej: grup ze średnią); ogólnie rozpatruje się zwartą przestrzeń metryczną X i przeliczalną grupę średniowalną G działającą na X poprzez homeomorfizmy. Ważnym przypadkiem szczególnym, często omawianym przez doktorantkę, jest sytuacja gdy $X \subset A^G$, gdzie A jest zbiorem skończonym zwanym alfabetem oraz G działa na X poprzez uogólnione przesunięcia (shifty): $(gx)(h) = x(hg)$, dla $g, h \in G, x \in X$.
Tematyka podjęta przez mgr Straszak plasuje się w ważnym nurcie badań entropii (topologicznej) układów z działaniem grupy ze średnią, jest to obszar zainteresowań wielu światowej klasy matematyków. Główne wyniki dotyczą możliwości zrealizowania każdej wartości $h \in [0, \log |A|)$ jako entropii pewnego minimalnego podukładu symbolicznego (w skrócie: subshiftu) układu (A^G, G), gdzie G jest przeliczalną grupą ze średnią. Dla podkreślenia wagi podejmowanych zagadnień, warto wspomnieć o pracy Hochmana i Meyerovitcha o możliwych wartościach entropii dla wielowymiarowych shiftów typu skończonego, opublikowanej w Annals of Mathematics.
Rozprawa liczy 84 strony i składa się z ośmiu rozdziałów. Bibliografia zawiera 60 pozycji, wśród nich jest jedna praca (pozycja [9] w spisie) opublikowana w 2018 roku przez doktorantkę w Journal of the London Mathematical Society, jest to artykuł napisany wspólnie z M. Łącką; współautorka załączyła oświadczenie o wkładzie 50% do pracy.

Rozdział 1. ma charakter wstępny, zawiera pewne uwagi historyczne i możliwe motywacje; znajdujemy w nim zapowiedź stosowanych technik i narzędzi takich jak pseudometryka Weyla, zbieżność kwazi-jednostajna, konfiguracje kwazi-Toeplitzowskie, shifty subordynowane.
W rozdziale 2. autorka wprowadza najważniejsze pojęcia z zakresu układów dynamicznych, definiuje grupę ze średnią, ciąg Følnera, entropię topologiczną, przestrzenie shiftowe; wprowadza też istotne z punktu widzenia rozprawy pojęcia grupy rezydualnie skończonej oraz grupy kongruentnie monokafelkowalnej. Skończony podzbiór F grupy G nazywamy monokafelkiem jeśli istnieje zbiór C tzw. środków taki, że rodzina zbiorów postaci Fc dla $c \in C$ tworzy rozbicie (czyli pokrycie zbiorami rozłącznymi) grupy G. Grupa ze średnią to grupa G, w której istnieje ciąg Følnera $\mathcal{F} = \{F_n\}$ podzbiorów skończonych "coraz lepiej niezmienniczych" czyli spełniających warunek $\frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \to 0$ dla wszystkich $g \in G$. Grupa kongruentnie monokafelkowalna to przeliczalna grupa ze średnią G, dla której istnieje specjalny ciąg Følnera $\mathcal{F} = \{F_n\}$ wyczerpujący grupę G oraz taki, że F_{n+1} jest pokryty przez rozłączne przesunięcia elementu F_n, dla $n \geq 1$. Doktorantka cytuje wynik Cortez i Petite'a mówiący, że każda rezydualnie skończona (czyli taka w której przekrój wszystkich podgrup normalnych o skończonym indeksie jest trywialny) grupa ze średnią jest kongruentnie kafelkowalna. Pozwala to następnie uogólniać m. in. twierdzenie Kriegera z pracy [37].
Rozdziały 3. do 7. stanowią elementy składowe dowodów głównych twierdzeń 8.1 i 8.2; zaprezentowane wyniki ukazały się w zasadzie w całości w pracy [9]. Wyjątkiem jest rozdział 6., w którym znajdują się nowe wyniki dotyczące shiftów subordynowanych.
W rozdziale 3. doktorantka zajmuje się badaniem podukładów minimalnych układu dynamicznego; dla elementu x definiuje $m(x)$ jako ilość podukładów minimalnych w domknięciu

orbity $\overline{Gx}$ a następnie uogólnia wynik Downarowicza i Iwanika ([19], działanie grupy $\mathbb{Z}$) pokazując, że $m(x)$ jest minimalną licznością takiego zbioru $Z \subset \overline{Gx}$, że orbita punktu x odwiedza dowolnie małe otoczenie zbioru Z w sposób syndetyczny.
W rozdziale 4. doktorantka wprowadza pojęcie pseudometryki Weyla, będącej jednym z fundamentalnych narzędzi w dalszych rozważaniach. Dla elementów x, y przestrzeni X^G pseudometryka ta zadana jest wzorem $D_W(x,y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \sup_{g\in G} \sum_{f\in F_n g} \rho(x(f), y(f))$, dla ustalonego ciągu Følnera $\mathcal{F}$. Autorka podaje też inne, równoważne definicje pseudometryki Weyla, dowodzi też m. in. faktu, że wartość $D_W(x,y)$ nie zależy od wyboru ciągu Følnera. Zauważmy, że problem niejednoznaczności był nieobecny dla działania $\mathbb{Z}$ oraz, że dowód kluczowego lematu korzysta w istotny sposób z wyników przełomowej pracy Lindenstraussa i Weissa ([43], Mean Topological Dimension).
Rozdział 5. dotyczy zastosowań tzw. zbieżności kwazi-jednostajnej czyli zbieżności w pseudometryce Weyla do badania ilości składowych minimalnych, entropii topologicznej h_{top} oraz zbioru miar niezmienniczych. Doktorantka używa pojęć wprowadzonych przez R. Bowena i definiuje wielkości h_{sep} oraz h_{span} za pomocą zbiorów (F,ϵ)-rozdzielonych oraz (F,ϵ)-rozpinających. Przypomnijmy dla przykładu, że jeśli F jest skończonym podzbiorem G oraz $\epsilon > 0$, to zbiór Z jest (F,ϵ)-rozdzielony, jeśli dla różnych punktów $x, y \in Z$, ich orbity wzdłuż F są przynajmniej raz w odległości co najmniej ϵ. Stosując dość standardowe, choć nietrywialne, techniki, mgr Straszak pokazuje, że $h_{sep}(X) = h_{span}(X) = h_{top}(X)$, co pozwala używać zbiorów rozdzielonych bądź rozpinających do wszelakich rozważań entropijnych.
Doktorantka rozważa "funkcję entropii na orbicie domkniętej" na przestrzeni (X, G) zadaną wzorem $h(x) = h_{top}(\overline{Gx})$ i pokazuje, że funkcja ta jest dolnie półciągła ze względu na zbieżność kwazi-jednostajną; ponadto funkcja h nie musi być ciągła. W sytuacji gdy $X = A^G$ czyli X jest subshiftem, funkcja h staje się ciągła. Dowód ciągłości jest ładną kombinacją technik dynamiki symbolicznej, klasycznej teorii entropii Bowena oraz ponownie wyniku Lindenstraussa i Weissa. W dalszej części rozdziału 5. autorka bada funkcję $x \mapsto m(x)$, przyporządkowującą punktowi x ilość składowych minimalnych orbity $\overline{Gx}$; używając narzędzi z rozdziału 3. dowodzi, że funkcja ta jest dolnie półciągła (w pseudometryce D_W). Istotną część rozdziału 5. doktorantka poświęca badaniu zbioru miar niezmienniczych, pokazując m. in. że funkcja przyporządkowująca punktowi x ilość ergodycznych miar niezmienniczych o nośniku w $\overline{Gx}$, jest dolnie półciągła.
Rozdział 6. zawiera nowe wyniki dotyczące tzw. shiftów subordynowanych, jest w zasadzie niezależny od pozostałych części rozprawy i jest interesujący sam w sobie. Dla układu $Z \subset \{0,1\}^G$, shift subordynowany $\check{Z}$ definiuje się jako zbiór takich x dla których istnieje $z \in Z$, leksykograficznie nie mniejszy od x, tzn. $\check{Z} = \{x \in \{0,1\}^G : \exists z \in Z \ \ x(g) \leq z(g), g \in G\}$. Jest jasne, że wyjściowy układ Z może być bardzo ubogi natomiast $\check{Z}$ może być bardzo nietrywialny (np. biorąc jednopunktowy układ $Z = \{1^G\}$ dostajemy pełny shift jako $\check{Z}$). Mgr Straszak pokazuje elegancki sposób na liczenie entropii $\check{Z}$ w sytuacji gdy $h_{top}(Z) = 0$, wzorem (twierdzenie 6.1) $h_{top}(\check{Z}) = \log 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \max\{\sum_{g\in F_n} w(g) : w \in \mathcal{B}_{F_n}(Z)\}$, widać tu związek entropii z asymptotyczną gęstością występowania symbolu 1 w układzie Z. Autorka pokazuje następnie ciekawy związek między gęstością występowania symbolu 1 w Z a maksymalną (maksimum po zbiorze miar niezmienniczych) miarą cylindra $[1]_e = \{x : x(e) = 1\}$, co pozwala na podanie (lemat 6.6) nowego sposobu obliczania entropii shiftu subordynowanego: $h_{top}(\check{Z}) = \max_{\mu\in\mathcal{M}_{G(Z)}} \mu([1]_e) \cdot \log 2$. W ostatniej części rozdziału 6. doktorantka rozpatruje układ $Z = \overline{Gz}$ zadany przez tzw. konfigurację okresową z na $\{0,1\}^G$ z działaniem grupy rezydualnie skończonej. Korzystając z metod rozwiniętych w rozdziałach 6. i 2. uzyskuje zwarty wzór na entropię subshiftu subordynowanego: $h_{top}(\check{Z}) = \frac{\log 2}{|F_N|} \sum_{g\in F_N} z(g)$, gdzie $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem podgrup normalnych jak w lemacie 2.4, natomiast H_N jest okresem konfiguracji z.
W rozdziale 7. autorka rozwija kolejny (ostatni już) zestaw metod niezbędnych do przeprowadzenia dowodów głównych twierdzeń, definiując tzw. konfiguracje kwazi-Toeplitzowskie. Ciągi Toeplitza zostały wprowadzone przez Jacobsa i Keane'a w pracy [35], w klasie tych ciągów badane są od lat zjawiska różnej natury dynamicznej (wspomnijmy choćby realizacje możliwych funkcji entropii

czy pewne kwestie związane z hipotezą Sarnaka). Uogólnienia ciągów Toeplitza , tzw. konfiguracje kwazi-Toeplitzowskie, były badane przez Cecchi, Cortez i Petite'a ([8],[10],[11]). Ciąg $x \in A^{\mathbb{Z}}$ nazywamy Toeplitza jeśli każda jego współrzędna występuje okresowo, tzn. dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ istnieje okres $p \in \mathbb{N}$ taki, że $x(n + ip) = x(n)$, dla dowolnego $i \in \mathbb{Z}$; układ Toeplitza uzyskuje się biorąc domknięcie orbity ciągu Toeplitza. Doktorantka przypomina klasyczną konstrukcję ciągu Toeplitza nad $\mathbb{Z}$, opisuje też dokładnie konfigurację kwazi-Toeplitzowską dla działania grupy $(\mathbb{Q}, +)$, co samo w sobie jest dość skomplikowane. Definiuje następnie konfigurację kwazi-Toeplitzowską dla działania grupy kongruentnie monokafelkowalnej (definicja wymaga ustalenia w grupie G pewnego specjalnego ciągu Følnera), czyli w największej możliwej obecnie ogólności, używając pojęć rozdziału 2. Dowodzi następnie w dość elementarny sposób, że jeśli x jest kwazi-Toeplitzowską konfiguracją z zadanym kongruentnym ciągiem Følnera, to $\overline{Gx}$ jest układem minimalnym. Dużo bardziej pomysłowy i zaawansowany technicznie jest dowód kluczowego faktu (lemat 7.3), że rodzina konfiguracji kwazi-Toeplitzowskich jest łukowo spójna.
Rozdział 8. zawiera dwa główne wyniki rozprawy: twierdzenia 8.1 i 8.2. Pierwsze z twierdzeń uogólnia ważny wynik F. Kriegera mówiący, że jeśli grupa ze średnią G jest rezydualnie skończona i działa poprzez shifty na A^G, to każdą wartość z przedziału $[0, \log |A|)$ można zrealizować jako entropię pewnego minimalnego podukładu symbolicznego pełnego shiftu A^G. Doktorantka dowodzi prawdziwości tego wyniku przy słabszym założeniu, że grupa ze średnią G jest kongruentnie monokafelkowalna. Idea dowodu jest prosta choć szczegóły konstrukcji są skomplikowane; tworzy się dwie konfiguracje kwazi-Toeplitzowskie, jedną o entropii zero, drugą o entropii bliskiej $\log |A|$; następnie korzystając z ciągłości funkcji entropii w układach shiftowych oraz ze spójności łukowej rodziny konfiguracji kwazi-Toeplitzowskich uzyskuje się konfigurację x o żądanej entropii oraz w efekcie docelowy układ minimalny $\overline{Gx}$.
Autorka twierdzi, że metody przez nią stosowane są istotnie prostsze od oryginalnych metod Kriegera; szkoda, że rozprawa nie zawiera w takim razie choćby krótkiego opisu technik użytych przez Kriegera w pracach [37] i [38].
Drugie ze wspomnianych twierdzeń mówi, że jeśli rezydualnie skończona grupa ze średnią G działa na $\{0, 1\}^G$, to każdą wartość z przedziału $[0, \log 2)$ można zrealizować jako entropię pewnego podukładu proksymalnego. Docelowy układ proksymalny o entropii $\gamma \cdot \log 2$, dla $\gamma \in [0, 1)$, uzyskuje się jako subordynowany shift domknięcia orbity specjalnie skonstruowanego elementu o gęstości γ występowania symbolu 1 wzdłuż pewnego ciągu Følnera. Konstrukcja jest pomysłowa i technicznie zaawansowana, choć mimo wszystko standardowa w świecie kodowania układów symbolicznych.

2. Uwagi i wątpliwości.
Podaję poniżej ważniejsze z krytycznych uwag, nasuwających się po lekturze rozprawy:

- Przykład 3.1, dowód jest niepotrzebny, jest to absolutna klasyka, wystarcza tutaj Lemat 3.1 i jego dowód.

- W dowodzie Twierdzenia 3.1 występuje zarówno $\rho(\cdot, \cdot)$ jak i $dist(\cdot, \cdot)$, które nie zostało zdefiniowane.

- Dowód Lematu 3.3 jest oczywisty.

- Dowód Lematu 3.4 to klasyka, można było pominąć.

- Argumentacja na dolnej połowie strony 21 jest co najmniej mętna i nieczytelna, chodzi o dowód, że jedyne minimalne subshifty to $\overline{\mathbb{Z}z_1}, \overline{\mathbb{Z}z_2}, \ldots, \overline{\mathbb{Z}z_m}$; tu mógłby się pojawić dokładniejszy opis kosztem dowodów lematów 3.3 i 3.4

Jen

- Na początku rozdziału 4. mamy przykład sytuacji występującej wiele razy w rozprawie: "przegadany" fragment, gdzie co najmniej dwa razy autorka zapowiada co się za chwilę wydarzy; należy tego unikać w przyszłości.

- Strona 23: nie trzeba tłumaczyć co to jest "power set"; irytuje napis: use $\mathcal{F}$ to denote a Følner sequence $\mathcal{F} = ...$

- Sformułowanie Lematu 4.1 zawiera ustęp: "Recall that $\sup_{\mathcal{F}}$ means that ..." co jest lekko irytujące jako że to samo jest napisane 19 linii wyżej na stronie 23.

- Lematy 4.2 i 4.3 są oczywiste, ich dowody pominąłbym.

- W Lemacie 4.4 autorka definiuje zbiór $\hat{E}$; wydaje mi się, że takie obiekty były już rozważane w pracach Downarowicza, Huczka i Zhanga pod nazwą "saturacja zbioru" (np. w pracy "Symbolic Extensions of Amenable Group Actions and the Comparison Property" Downarowicza i Zhanga); po co definiować $\hat{F}_n$ w dowodzie lematu 4.5 jeśli pół strony wyżej jest definicja $\hat{E}$?

- Podrozdział 4.2, tu warto może przypomnieć, że pseudometrykę Weyla w przestrzeni trajektorii wprowadzili Jacobs i Keane a rozwijali m.in. Downarowicz i Iwanik, jeśli nawet była o tym mowa to na samym początku rozprawy.

- Połowa strony 27: uwaga w stylu "Note that by Lemma 4.9 the above..." wprowadza czytelnika w błąd; naturalne jest poszukiwanie rzeczonego lematu na stronach już przeczytanych, podczas gdy pojawia się on kilka stron dalej; podobna sytuacja występuje w przykładzie 4.2, gdzie autorka odwołuje się do twierdzenia 4.2, które dopiero pojawi się kilka stron dalej w tekście.

- Twierdzenie 4.1 jest uogólnieniem wyniku Jacobsa i Keane'a, warto o tym było napisać.

- Strona 28, linie 15 i 16 to powtórzenie linii -10, -9 ze strony 27.

- Błąd logiczny w sformułowaniu Lematu 4.8: wielkość $D_W(\underline{x}, \underline{z})$ zależy potencjalnie od wyboru ciągu Følnera $\mathcal{F}$, należałoby tu skorzystać z późniejszego Lematu 4.9.

- Twierdzenie 4.2 to uogólnienie na działanie grupy ze średnią Wniosku 1 z pracy [19], a dokładniej wniosku z Prop. 1 tamże; Lemat 4.12 jest adaptacją Prop.1 z pracy [19], należało o tym napisać.

- W sformułowaniu Twierdzenia 5.1 zastąpiłbym "satisfying" przez "defined by"; przykład 5.1 nie jest "adjusted" a raczej jest identyczny z przykładem 3 z [19].

- Koniec dowodu Twierdzenia 5.1: chciałbym zobaczyć uzasadnienie zdania "If $h(x) = \infty$ then the proof is similar."

- Ciągi Følnera spełniające warunek $F_n = F_n^{-1}$ nazywa się zwykle symetrycznymi.

- Strona 44, linia 4: tu dodałbym, że $H(t)$ oznacza entropię binarną, chwilę wcześniej H ozaczało coś zupełnie innego.

- Ta uwaga mogłaby być napisana przez każdą osobę, która zapoznała się dokładnie z pracą [9], będącą rdzeniem rozprawy; dowód Twierdzenia 5.3 został w zasadzie przepisany słowo w słowo z dowodu twierdzenia 35 w pracy [9], zamieniono jedynie indeks s na k, w jakim celu? Cała sekcja 5.2 została przepisana z [9], tyle, że w innej kolejności, dla utrudnienia? Zbiór miar dystrybucyjnych dla $\underline{x}$ oznaczany jest w pracy [9] przez $\hat{\omega}_{\mathcal{F}}(\underline{x})$ a w rozprawie przez $Dis_{\mathcal{F}}(\underline{x})$, dlaczego? To wszystko utrudnia lekturę.

- Lemat 5.8 (Bogołubowa-Kryłowa) to klasyka, dowód można znaleźć w każdej książce dotyczącej układów dynamicznych.

- Niektóre dowody są niepotrzebnie nieczytelne, dobrym przykładem jest Lemat 5.10; jego dowód polega na sformułowaniu i udowodnieniu Lematu 5.16 a następnie jednego wiersza komentarza, że prawdziwość Lematu 5.10 wynika wprost z Lematu 5.16. Nie rozumiem takiego postępowania.

- Co oznacza X w sformułowaniu Lematu 6.1? Co oznacza symbol *argmax* w linii 4 na stronie 58? Czy dowodu Lematu 6.7 nie można wydłużyć o kilka wierszy i przeprowadzić wprost, bez wprowadzania lematów 6.8 i 6.9? Jest to kolejny przykład pewnej maniery polegającej na dzieleniu rozumowań na wiele (zbyt wiele!) drobnych kroków (czytaj: lematów) i zmuszaniu czytelnika do "przeskakiwania" ze strony na stronę w celu śledzenia odpowiedniego rozumowania; nie jest to zbyt dobra strategia.

- Początek rozdziału 8: tu warto sformułować i rozwinąć wątek wyjaśniający dlaczego zaprezentowany dowód Twierdzenia 8.1 jest przystępniejszy od oryginalnego rozumowania Kriegera.

3. Ocena rozprawy i konkluzja.

Większa część rozprawy opiera się na publikacji [9] i jest w zasadzie pewną modyfikacją prowadzonych w [9] rozumowań. Fakt ten muszę uznać za słabą stronę rozprawy. Nie sądzę, aby powstała kolejna publikacja na podstawie rozdziałów 3,4,5,7. Z drugiej strony, tematyka shiftów subordynowanych, poruszona w rozdziale 6. i będąca fundamentem dowodu twierdzenia 8.2 oraz wyniki uzyskane tamże, mogą moim zdaniem być punktem wyjścia do przygotowania dobrej publikacji. Nie mam wątpliwości, że doktorantka wykazała się znajomością bardzo nietrywialnych technik kodowania w dynamice topologicznej oraz dobrym zrozumieniem problemów jakie spotyka się zwykle w przypadku działań grup ze średnią, gdzie przestają działać mechanizmy i intuicje znane z klasycznej dynamiki działania grupy $\mathbb{Z}$. Mgr Straszak bardzo sprawnie posługuje się narzędziami takimi jak konfiguracje kwazi-Toeplitzowskie oraz oszacowania entropijne, co uznaję za mocną stronę rozprawy.

Recenzowana rozprawa zawiera niewątpliwie naturalne i interesujące wyniki. Pytania o możliwe wartości entropii są bardzo klasyczne i w związku z tym każdy sensowny wynik spotka się z zainteresowaniem środowiska matematycznego. Choć sformułowanie głównego twierdzenia wydaje się być relatywnie proste i zrozumiałe dla osoby spoza kręgu układów dynamicznych, to ścieżka dowodu jest pełna pułapek i wymaga wieloetapowych, złożonych rozumowań, z którymi doktorantka radzi sobie bardzo dobrze.

Nie zauważyłem w rozprawie poważnych błędów merytorycznych, niemniej zamieszczona powyżej lista uwag i wątpliwości obniża nieco moją ocenę pracy. Rozprawa napisana jest w języku angielskim, nie mam większym zastrzeżeń co do poprawności językowej; zauważyłem kilkanaście drobnych błędów, nieistotnych dla oceny pracy.

Konkluzja: po zapoznaniu się z rozprawą doktorską mgr Marty Straszak uznaję, że spełnia ona wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie mgr Marty Straszak do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Serafin

Jacek Serafin