mgr Piotr Miska
Instytut Matematyki UJ
Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
email: piotr.miska@uj.edu.pl

Kraków, 29.04.2020

Streszczenie rozprawy doktorskiej

p-adic properties of combinatorial sequences and subsets of $\mathbb{N}$

Rozprawa doktorska pt. *p-adic properties of combinatorial sequences and subsets of* $\mathbb{N}$ jest poświęcona dwóm zagadnieniom z zakresu analizy p-adycznej.

Pierwszym zagadnieniem jest badanie waluacji p-adycznych wybranych ciągów liczbowych pojawiających się w naturalny sposób w kombinatoryce. Jest to przedmiot badań wielu matematyków, m. in. T. Amdeberhana, V. Molla, L. Mediny, T. Lengyela, F. Clarke'a, D. Davisa, H. Ochiaiego. W ramach tego zagadnienia skupiłem się na liczbach Stirlinga drugiego rodzaju oraz liczbach permutacji o zadanych typach rozkładu na cykle.

Autorzy prac [1, 3] postawili hipotezy dotyczące zachowania waluacji p-adycznych liczb Stirlinga drugiego rodzaju $S(n,k)$. W pracy [7] udzieliłem twierdzącej odpowiedzi na wspomniane hipotezy dowodząc jakościowego opisu waluacji p-adycznych wyrazów ciągu $(S(n,k))_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$ jest dowolnie ustalone.

W pracach [2, 5] ich autorzy badali waluacje p-adyczne liczb permutacji $\sigma \in S_n$ takich, że $\sigma^p = id$, gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą. Powyższe permutacje są iloczynami parami rozłącznych cykli długości p. Naturalną kontynuacją wspomnianych badań jest podjęte w pracy [9] rozszerzenie ich wyników na ciągi $(H_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $d > 1$, zaś $H_d(n)$ jest liczbą permutacji w S_n, które są iloczynami rozłącznych d-cykli.

Drugie zagadnienie w ramach niniejszej rozprawy związane jest z gęstością zbiorów ilorazów elementów pewnych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ w ciałach liczb p-adycznych. Zbiorem ilorazów zbioru $A \subset \mathbb{N}$ nazywamy zbiór postaci $R(A) = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in A, b \neq 0\right\}$. Pierwszą publikacją, która obszernie opracowuje temat gęstości zbiorów $R(A)$ w $\mathbb{Q}_p$, gdzie $A \subset \mathbb{N}$, jest praca [4]. Jedno z pytań jej autorów dotyczy istnienia zbiorów A i B, które stanowią podział zbioru $\mathbb{N}$, natomiast ich zbiory ilorazów nie są gęste w $\mathbb{Q}_p$ dla jakiejkolwiek liczby pierwszej p. W publikacji [8] wykazałem, że taki podział nie istnieje. Poza tym, w kontekście wyników uzyskanych dla sum kwadratów i sześcianów liczb naturalnych, rozstrzygnąłem w pracy [6], kiedy zbiór $R(A)$ jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$, gdzie A jest zbiorem sum ustalonej liczby potęg liczb naturalnych o ustalonym wykładniku.

Literatura

[1] T. Amdeberhan, D. Manna, V. Moll, *The 2-adic Valuation of Stirling Numbers*, Experiment. Math. (2008), 17, 69-82.
[2] T. Amdeberhan, V. Moll, *Involutions and their progenies*, J. Comb. 6 (2015), no. 4, 483-508.
[3] A. Berrizbeitia, L. Medina, A. Moll, V. Moll, L. Noble, *The p-adic valuation of Stirling numbers*, Journal for Algebra and Number Theory Academia (2010), 1, 1-30.
[4] S. R. Garcia, Y. X. Hong, F. Luca, E. Pinsker, C. Sanna, E. Schechter, A. Starr, *p-adic quotient sets*, Acta Arith. 179 (2017), no. 2, 163-184.
[5] H. Ishihara, H. Ochiai, Y. Takegahara, T. Yoshida, *p-Divisibility of the Number of Solutions of $x^p = 1$ in a Symmetric Group*, Ann. Comb. 5 (2001), 197-210.
[6] P. Miska, N. Murru, C. Sanna, *On the p-adic denseness of the quotient set of a polynomial image*, J. Number Theory, vol. 197 (2019), 218–227;
[7] P. Miska, *On p-adic valuations of Stirling numbers*, Acta Arith., vol. 186.4 (2018), 337–348;
[8] P. Miska, C. Sanna, *p-Adic Denseness of Members of Partitions of $\mathbb{N}$ and Their Ratio Sets*, B. Malays. Math. Sci. So., vol. 43 (2020), 1127–1133;
[9] P. Miska, M. Ulas, *On some properties of the number of permutations being products of pairwise disjoint d-cycles*, Monatsh. Math. vol. 192 (2020), 125–183.

Piotr Miska

mgr Piotr Miska
Instytut Matematyki UJ
Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
email: piotr.miska@uj.edu.pl

Kraków, 29.04.2020

Abstract of the dissertation
p-adic properties of combinatorial sequences and subsets of $\mathbb{N}$

The dissertation entitled *p-adic properties of combinatorial sequences and subsets of* $\mathbb{N}$ is devoted to two issues from the area of p-adic analysis.

The first issue is study of p-adic valuations of some sequences appearing in a natural way in combinatorics. This is a subject of study of many mathematicians, e.g. T. Amdeberhan, V. Moll, L. Medina, T. Lengyel, F. Clarke, D. Davis, H. Ochiai. Under this topic I focused on Stirling numbers of the second kind and numbers of permutations with prescribed type of decomposition into cycles.

The authors of the papers [1, 3] established conjectures concerning behaviour of p-adic valuations of Stirling numbers of the second kind $S(n,k)$. In the paper [7] I answered affirmatively on the mentioned conjectures by proving a qualitative description of p-adic valuations of the terms of the sequence $(S(n,k))_{n\in\mathbb{N}}$, where $k \in \mathbb{N}_+$ is arbitrarily fixed.

In the papers [2, 5] their authors studied p-adic valuations of the numbers of permutations $\sigma \in S_n$ such that $\sigma^p = id$, where p is a fixed prime number. These permutations are products of pairwise disjoint cycles of the length p. A natural continuation of the mentioned study is, undertaken in [9], extension of its results on the sequences $(H_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$, where $d > 1$ and $H_d(n)$ is a number of permutaions in S_n which are products of pairwise disjoint d-cycles.

The second issue under the present dissertation is connected to the denseness of sets contained from the ratios of elements of some subsets of non-negative integers in the fields of p-adic numbers. The ratio set of a given set $A \subset \mathbb{N}$ is a set of the form $R(A) = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in A, b \neq 0\right\}$. The first publication that comprehensively studies the subject of denseness of the sets $R(A)$ in $\mathbb{Q}_p$, where $A \subset \mathbb{N}$, is the paper [4]. One of the questions raised by its authors concerns the existence of subsets A and B which create a partition of $\mathbb{N}$ and their ratio sets are not dense in $\mathbb{Q}_p$ for any prime number p. In publication [8] I showed that such a partition cannot exist. Except from this, in the context of the results on sums of squares and cubes of non-negative integers, I determined in [6] when the set $R(A)$ is dense in $\mathbb{Q}_p$, where A is the set of a fixed number of powers of non-negative integers with a fixed exponent.

References

[1] T. Amdeberhan, D. Manna, V. Moll, *The 2-adic Valuation of Stirling Numbers*, Experiment. Math. (2008), 17, 69-82.

[2] T. Amdeberhan, V. Moll, *Involutions and their progenies*, J. Comb. 6 (2015), no. 4, 483-508.

[3] A. Berrizbeitia, L. Medina, A. Moll, V. Moll, L. Noble, *The p-adic valuation of Stirling numbers*, Journal for Algebra and Number Theory Academia (2010), 1, 1-30.

[4] S. R. Garcia, Y. X. Hong, F. Luca, E. Pinsker, C. Sanna, E. Schechter, A. Starr, *p-adic quotient sets*, Acta Arith. 179 (2017), no. 2, 163-184.

[5] H. Ishihara, H. Ochiai, Y. Takegahara, T. Yoshida, *p-Divisibility of the Number of Solutions of $x^p = 1$ in a Symmetric Group*, Ann. Comb. 5 (2001), 197-210.

[6] P. Miska, N. Murru, C. Sanna, *On the p-adic denseness of the quotient set of a polynomial image*, J. Number Theory, vol. 197 (2019), 218–227;

[7] P. Miska, *On p-adic valuations of Stirling numbers*, Acta Arith., vol. 186.4 (2018), 337–348;

[8] P. Miska, C. Sanna, *p-Adic Denseness of Members of Partitions of $\mathbb{N}$ and Their Ratio Sets*, B. Malays. Math. Sci. So., vol. 43 (2020), 1127–1133;

[9] P. Miska, M. Ulas, *On some properties of the number of permutations being products of pairwise disjoint d-cycles*, Monatsh. Math. vol. 192 (2020), 125–183.

Piotr Miska