Streszczenie

Układy dynamiczne są wszechobecne we współczesnej nauce. Niemal każde zjawisko występujące w świecie, czy to w fizyce, biologii, ekonomii czy socjologii, może zostać przedstawione jako układ dynamiczny. Doprowadziło to do potrzeby jak najlepszego zrozumienia matematycznych własności układów dynamicznych, w szczególności ich zachowań asymptotycznych. Poprzez lata badań stało się jasne, że choć wiele układów dynamicznych pochodzących od zjawisk przyrodniczych, poddaje się szczegółowej analizie matematycznej, pozwalając na dokładne przewidywanie ich przyszłych zachowań, istnieją wyjątki, które nie zachowują się w taki sposób. Do przełomowego odkrycia doszło w 1961 roku, kiedy to Edward Lorenz zaobserwował, że jego model opisujący zjawiska atmosferyczne jest niezwykle czuły na warunki początkowe, a tym samym generuje chaos. Dało to początek nowej dziedzinie matematyki – Teorii Chaosu. Jednym z najważniejszych narzędzi do badania chaosu, i jednocześnie jednym z głównych obiektów badań w tej pracy, jest pojęcie entropii, obecne również w fizyce, teorii informacji oraz statystyce.

W niniejszej rozprawie badamy dyskretne układy dynamiczne, składające się z przestrzeni X, będącej zbiorem wszystkich możliwych stanów, w których może znajdować się pewien układ fizyczny, oraz odwzorowania $T\colon X \to X$, opisującego jak zmieniają się te stany w jednostce czasu. Inaczej, o układach dynamicznych możemy myśleć jak o działaniu addytywnej grupy $\mathbb{Z}$ na X. Prowadzi to do uogólnienia, w którym $\mathbb{Z}$ zastępujemy przez dowolną dyskretną przeliczalną grupę G. Ponadto, zakładamy dodatkowo, że G jest grupą mierzalną, co pozwala na uogólnienie podstawowych pojęć Teorii Ergodycznej, takich jak entropia i gęstość Banacha, jak i fundamentalnych rezultatów, takich jak Twierdzenie Krylova-Bogolyubova oraz Twierdzenie Ergodyczne.

Jedną z głównych motywacji niniejszej rozprawy jest następujące fundamentalne pytanie dotyczące entropii podstawowego symbolicznego układu dynamicznego, przestrzeni Cantora $X = \{0,1\}^G$. Jakie wartości z przedziału $[0, \log 2)$ mogą być realizowane jako entropia podukładów X spełniających pewne szczególne własności? Jedną z prób odpowiedzi na to pytanie podjął F. Krieger, dowodząc poprzez skomplikowaną konstrukcję kombinatoryczną, że każda wartość może być osiągana przez entropię pewnych podukładów minimalnych X, przy założeniu, że G jest rezydualnie skończona. W niniejszej pracy prezentujemy zupełnie nowy dowód twierdzenia o realizowalności entropii układów minimalnych, który pozwala nam uogólnić to twierdzenie z grup rezydualnie skończonych na grupy kongruentnie monokafelkowalne. Kluczowym elementem naszego dowodu jest fakt, że jeżeli zamiast standardowej metryki na X, rozważamy metrykę Weyla, to entropia staje się funkcją ciągłą. W rozprawie badamy również relacje pomiędzy metryką Weyla, a miarami niezmienniczymi na X oraz podukładami minimalnymi X, uogólniając wyniki Downarowicza i Iwanika, którzy badali analogiczne zależności w przypadku $G = \mathbb{Z}$.

Ponadto, prezentujemy nowy wariant twierdzenia o realizowalności entropii, który mówi, że entropia układów proksymalnych również osiąga wszystkie wartości z przedziału $[0, \log 2)$. Jednak do dowodu tego faktu podchodzimy z zupełnie innej perspektywy. Rozwijamy teorię shiftów podrzędnych, pokazując, że ich entropia wyraża się poprzez asymptotyczną gęstość jedynek.

Mat. Strzyż.

Abstract

Dynamical systems are ubiquitous in all of today's science. Virtually every natural process, whether it is in physics, biology, economics or sociology can be modeled as a dynamical system. Consequently, there has been a lot of research aimed to understand their mathematical properties and especially their asymptotic behavior. While many of the nature-inspired dynamical systems are amenable to a detailed mathematical analysis and thus allow for reliable predictions of future behavior, it became clear quite early on that not all of them behave this way. Notably, in 1961, Lorenz discovered that his model of atmospheric convection is extremely sensitive to initial conditions, thus even dynamical systems derived from nature may generate chaos. Since then Chaos Theory became a standalone branch of mathematics. One of the most important tools of this theory, and also the main research subject of this thesis, is the notion of entropy, familiar from physics, information theory and statistics.

In this dissertation, we are concerned with discrete dynamical systems that consist of a state-space X and a map $T\colon X \to X$ that specifies how the states evolve in a unit of time. Another way of thinking about dynamical systems is to identify them with the action of the additive group $\mathbb{Z}$ on X. This leads to a generalization, where we replace $\mathbb{Z}$ with an arbitrary countable discrete group G. Moreover, it is convenient to additionally assume that G is amenable. This assumption allows us to generalize basic concepts of Ergodic Theory such as entropy or Banach Density, as well as to prove generalizations of fundamental results such as Krylov–Bogolyubov Theorem or the Pointwise Ergodic Theorem.

One of the main motivations for this thesis is the following fundamental question about the entropy in the archetypical example of a symbolic dynamical system, the Cantor space $X = \{0,1\}^G$. Which values between 0 and $\log 2$ can be realized as the entropy on a particular family of subsystems of X? One attempt of answering this question was made by F. Krieger, who proved via an intricate construction that each value can be realized as the entropy of some minimal subsystem of X, provided that G is residually finite. In this thesis, we present a novel approach to the proof of realizability theorem for minimal subsystems that allows us to extend it from residually finite groups to congruent monotileable groups. In our proof, the crucial realization is that if the space X is equipped with the Weyl metric, then the entropy becomes a continuous function (while the analogous property for the standard metric on $\{0,1\}^G$ fails). In connection to that, we study the interplay between the Weyl metric, invariant measures on X and minimal subsystems of X, and obtain generalizations of the results of Downarowicz and Iwanik (who studied the case $G = \mathbb{Z}$).

As another contribution, we prove a new variant of the realizability theorem that proximal subsystems also achieve all values of entropy. This result we approach from a completely different angle. We develop the theory of subordinate shifts and show that we can control their entropy, manipulating the density of 1's in their primary shifts.