



UNIwersytet  
Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki  
Instytut Informatyki

Warszawa, 29 stycznia 2020

Rektor

Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

**Recenzja rozprawy habilitacyjnej dr. Piotra Micka**

*Strukturalna teoria posetów i grafów oraz jej algorytmiczne zastosowania*

**Omówienie tematyki i wyników.** Głównym trzonem zaprezentowanego osiągnięcia jest seria prac na temat wymiaru zbiorów częściowo uporządkowanych (posetów). *Wymiar* posetu  $X$  to minimalna liczność rodziny liniowych rozszerzeń  $X$ , której przecięcie daje dokładnie  $X$  (tj., dla każdych dwóch nieporównywalnych elementów  $x$  i  $y$ , istnieje w rodzinie porządek, w którym  $x < y$  i istnieje w rodzinie porządek, w którym  $x > y$ ). Wymiar okazuje się być bardzo ciekawym i często trudnym do zrozumienia niezmiennikiem częściowego porządku. Autoreferat przekonująco argumentuje, że w świecie posetów pełni on rolę liczby chromatycznej, prawdopodobnie najbardziej znanego i dogłębnie badanego (ale zdecydowanie nie zbadanego) niezmiennika w teorii grafów.

Podstawowym nurtem teorii wymiarów posetów jest badanie związku wymiaru ze strukturalnymi własnościami tzw. graf pokryw, którego wierzchołkami są elementy posetów, a krawędź łączy dwa elementy, które są porównywalne, ale ich porównywalność nie wynika z przechodniości. Graf pokryw, w pewnym sensie, reprezentuje topologiczne własności posetu. Fundamentalny przykład Kelly'ego pokazuje, że istnieją posety o dowolnie dużym wymiarze i planarnym grafie pokryw (czyli w świecie posetów nie będzie odpowiednika twierdzenia o czterech barwach).

W świecie grafów, jednym z głównych nurtów badania liczby chromatycznej jest badanie zjawiska  $\chi$ -ograniczoności: klasa grafów  $\mathcal{G}$  jest  $\chi$ -ograniczona jeśli dla każdego całkowitego  $a \geq 1$  istnieje  $b \geq 1$  takie, że jeśli  $G \in \mathcal{G}$  nie ma klik na  $a$  wierzchołkach jako podgrafu, to liczba chromatyczna  $G$  jest ograniczona przez  $b$ . W świecie posetów możemy badać

następujące zdanie dla ustalonej klasy grafów  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{array}{l} \text{jeśli graf pokryć posetu należy do } \mathcal{G}, \\ \text{to wymiar posetu jest ograniczony przez funkcję jego wysokości.} \end{array} \quad (1)$$

Wysokość posetu to długość najdłuższego łańcucha.

Punktem wyjścia głównego trzonu osiągnięcia jest praca Streiba i Trottera z 2014 roku pokazująca, że to zdanie jest prawdziwe dla klasy grafów planarnych. Kandydat, wraz z współautorami, pociągnął tę teorię dużo dalej. Wśród wielu wyników wymienionych w autoreferacie, chciałem tutaj zwrócić uwagę na dwa.

Pierwszym z nich jest dobre zrozumienie zależności wysokości i wymiaru dla posetów, których graf pokryć ma ograniczoną szerokość drzewową. Dowód wymagał dobrego zrozumienia, jak dużo “informacji”, istotnych dla wyznaczania wymiaru posetu, może przepłynąć przez mały separator. Końcowy wynik określa jawną (wykładniczą) zależność wymiaru od szerokości drzewowej i wysokości. Nadmienię, że w świecie  $\chi$ -ograniczoności taka jawna zależność byłaby dodatkowym atutem, gdyż często otrzymywane zależności są niejawne i nieelementarne.

Drugi wynik jest dużym uogólnieniem wyniku Streiba i Trottera i bardzo eleganckim zwieńczeniem całej teorii: zdanie (1) jest prawdziwe dla dowolnej klasy grafów o ograniczonej ekspansji.

W teorii grafów (oraz w algorytmice) wiele twierdzeń prawdziwych dla grafów planarnych można uogólnić do szerszych klas grafów: grafów zanurzalnych w ustalonej powierzchni, grafów wykluczających ustalony minor lub topologiczny minor, czy wreszcie klas grafów o ograniczonej ekspansji czy nigdzie gęstych klas grafów. Klasy grafów o wykluczonym (topologicznym) minorze zachowują bardzo dużo gęstościowych i topologicznych własności grafów planarnych, podczas gdy klasy grafów o ograniczonej ekspansji i nigdzie gęste klasy grafów zachowują gęstościowe własności grafów planarnych.

W świecie klas grafów o wykluczonym (topologicznym) minorze dowody opierające się na topologicznych własnościach grafów prawie zawsze opierają się na bardzo mocnych i skomplikowanych twierdzeniach dekompozycyjnych (strukturalnych), dowodząc wprawdzie tezy dla grafów o ograniczonym genusie lub maksymalnym stopniu, a następnie pokazując, jak teza się zachowuje na małych separatorach pomiędzy takimi grafami. Do tej linii należy dowód Walczaka zdania (1) dla klas grafów o wykluczonym ustalonym topologicznym minorze.

Jeśli zaś dowód opiera się tylko na gęstościowych własnościach klas grafów rzadkich, bardzo często można go uogólnić dla klas grafów o ograniczonej ekspansji. Pojęcie ograniczonej ekspansji i nigdzie gęstości zostało wprowadzone stosunkowo niedawno przez Ossone de Mendez i Nešetřila i okazało się strzałem w dziesiątkę: jest wystarczająco pojemne, by objąć bardzo dużo przykładów, a jednocześnie wystarczająco mocne, by implikować wiele własności strukturalnych i algorytmicznych. Przy tym, nieobecność założeń natury topologicznej w teorii powoduje, że jeśli już coś da się udowodnić, to dowód jest stosunkowo prosty i elegancki. Tak też jest w przypadku pracy [A1], dowodzącej zdanie (1) dla dowolnej

klasy grafów o ograniczonej ekspansji.

Od strony technicznej, chciałem zwrócić uwagę na dwa aspekty omówionych prac. Po pierwsze, praca [A1] pokazała bardzo głębokie zrozumienie teorii klas grafów rzadkich u kandydata. Zgodnie z deklaracją, był on głównym motorem napędowym użycia tej teorii w badaniach. Po drugie, omawiana seria prac opracowała technikę „warstwowania”, analogiczną do bardzo popularnej w świecie  $\chi$ -ograniczoności techniki rozważania warstw przeszukiwania grafu w szerszym. Tym samym omawiana seria prac zawiera zarówno wynik będący eleganckim zwieńczeniem teorii, jak i technikę mającą potencjalne szerokie zastosowanie w dziedzinie.

Drugi nurt w prezentowanym osiągnięciu dotyczy kolorowania on-line. Zadaniem tutaj jest opracowanie algorytmu, który poznaje graf (należący do ustalonej klasy grafów) po jednym wierzchołku i, w momencie zobaczenia wierzchołka, musi przyznać mu kolor. Zadaniem jest użycie jak najmniejszej liczby kolorów w porównaniu do optymalnej liczby kolorów „off-line”, czyli po prostu liczby chromatycznej grafu.

W badaniach różnych wariantów liczby chromatycznej znaczącą rolę odgrywają klasy grafów *geometryczne*, czyli o następującej reprezentacji: każdy wierzchołek odpowiada jakiemuś obiektowi w ustalonej przestrzeni topologicznej (np. na płaszczyźnie) i dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadające im obiekty mają niepuste przecięcie. Klasycznymi przykładami tutaj są grafy przecięć odcinków na płaszczyźnie, odcinków na prostej, czy prostopadłościanów w  $\mathbb{R}^d$ .

Przedstawione prace [A6] i [A7] rozwiązują poszczególne otwarte problemy w tej dziedzinie. Na szczególną uwagę tutaj zasługuje wynik [A7] (opublikowany na czołowej światowej konferencji dotyczącej geometrii obliczeniowej), dotyczący grafu przecięć wypukłych obiektów rozpiętych między dwoma równoległymi prostymi. Ta klasa grafów przecięć uogólnia wiele badanych klas grafów (np. grafy permutacji) i uzyskany wynik w elegancki sposób uogólnia serię wcześniejszych prac innych autorów.

Wreszcie, ostatnia z przedstawionych prac [A8] dotyczy innego wariantu kolorowania: mając dany skończony zbiór punktów  $\mathcal{P}$  w przestrzeni oraz zbiór  $\mathcal{F}$  obiektów. Chcemy pokolorować  $\mathcal{P}$  przy pomocy  $k$  kolorów tak, by każdy obiekt w  $\mathcal{F}$  albo zawierał mniej niż  $f(k)$  kolorów, albo zawierał wszystkie kolory. Dla jakiej funkcji  $f$  jest to możliwe? Praca [A8] zawiera wielomianowe ograniczenie  $f$  dla przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  i obiektów  $\mathcal{F}$  postaci  $\{(x, y, z) \mid x \leq a, y \leq b, z \leq c\}$ , poprawiając poprzednie podwójnie wykładnicze ograniczenie.

Warte uwagi jest to, że praca [A8] ukazała się na konferencji SODA, najlepszej światowej konferencji algorytmicznej.

**Ocena osiągnięcia naukowego.** Zaprezentowane osiągnięcie naukowe należy zaliczyć do wybitnych. W szczególności, seria prac [A1]–[A5] jest rozwinięciem wyniku Streiba i Trottera dla grafów planarnych, rozwija spójną teorię zależności wymiaru od wysokości posetów o rzadkich grafach pokryw, zwieńczoną eleganckim wynikiem dotyczącym grafów o ogra-

niczzonej ekspansji. Pozostałe prace również są interesujące, uogólniają znane wyniki lub rozwiązują interesujące problemy otwarte.

Na uwagę zwracają bardzo dobre miejsca publikowania prac z osiągnięcia naukowego: dwie prace na konferencji SODA (najlepsza światowa konferencja algorytmiczna), jedna praca na konferencji SoCG (najlepsza światowa konferencja dotycząca geometrii obliczeniowej), czy dwie prace w czasopiśmie Combinatorica (jedno z najlepszych czasopism kombinatorycznych).

**Inne osiągnięcia i publikacje.** Autoreferat zawiera krótkie omówienie bardzo dużej liczby innych wyników kandydata, świadczących o jego dużym i szerokim dorobku, obejmującym wiele działów kombinatoryki oraz algorytmiki.

Na szczególną uwagę zwraca tutaj praca [B1], gdzie autorzy pokazują kontrprzykład do popularnej kilka lat temu hipotezy, że grafy przecięć odcinków na płaszczyźnie są  $\chi$ -ograniczonej. Przykład z tej pracy stał się znanym przykładem w środowisku badaczy strukturalnej teorii grafów; wielokrotnie w rozmowach na konferencjach słyszałem określenie go jako „the Polish example”.

Kandydat jest bardzo aktywny w międzynarodowym środowisku naukowym: w ankiecie znajdujemy informację o kilku wyjazdach na co najmniej jeden semestr i wielu krótkich wyjazdach naukowych, pięciu referatach zaproszonych na międzynarodowych konferencjach lub warsztatach, współorganizację wielu warsztatów i spotkań (w tym Polish Combinatorial Conference).

Wreszcie, kandydat prezentuje co najmniej przyzwoity dorobek z zakresu opieki nad studentami, zarówno na poziomie licencjackim, magisterskim, jak i doktorskim.

**Podsumowanie.** Oceniam przedstawioną rozprawę habilitacyjną oraz dorobek dydaktyczny i naukowy dr. Micka zdecydowanie pozytywnie i wnioskuję o nadanie dr. Mickowi tytułu doktora habilitowanego w dziedzinie nauk matematycznych w dyscyplinie informatyka. Jednocześnie, z uwagi na wybitny charakter zaprezentowanych wyników w osiągnięciu naukowym, wnioskuję o wyróżnienie.

Z poważaniem,

Marcin Pilipczuk