dr hab. Janusz Wysoczański
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław

Wrocław, 20.12.2019r.

Recenzja Rozprawy Doktorskiej Pani magister Anny Szczepanek

1. Opis Rozprawy

Rozprawa Pani magister Anny Szczepanek jest napisana po angielsku i ma tytuł "QUANTUM DYNAMICAL ENTROPY OF UNITARY OPERATORS IN FINITE-DIMENSIONAL STATE SPACES".

Składa się z Wprowadzenia (Introduction), Wstępnych Informacji Podstawowych (Preliminaries), 4 Rozdziałów (Chapters), Bibliografii, Spisu Symboli, Indeksu Nazw oraz Streszczeń (w języku polskim i angielskim). Jest to bardzo obszerna Rozprawa: liczy 187 stron (oraz po jednej stronie "Summary" i "Streszczenie"), a jej Bibliografia składa się z imponującej liczby 192 pozycji. Okazuje się, że w tekście Rozprawy cytowanych jest 191 pozycji Bibliografii (poza [1] Accardi, Ohya, Watanabe, która także jest związana z tematyką Rozprawy). Można podziwiać u Autorki znajomość ogromu literatury badanej tematyki.

We Wprowadzeniu Autorka podaje swoje motywacje, opisuje w sposób ogólny użyte metody badawcze i uzyskane wyniki a także przedstawia sposób w jaki Rozprawa jest ułożona. Dzięki temu czytelnik od razu nabiera wstępnej orientacji co do tematyki i zakresu Rozprawy. Ze względu na rozmiar Rozprawy bardzo pomocne w jej czytaniu są także Skorowidz używanych symboli oraz Indeks nazw, umieszczone po Bibliografii.

W Rozprawie jest też sporo rysunków, które świetnie pokazują przykłady badanych zjawisk i ich własności. Te rysunki zrobiły na mnie duże wrażenie i były bardzo pomocne w budowaniu intuicji.

Badania Autorki dotyczą ewolucji przestrzeni stanów oznaczanych $\mathcal{S}(\mathbb{C}^d)$ i zwanych *kwantowymi*, na d-wymiarowej przestrzeni zespolonej $\mathbb{C}^d$, pod działaniem ustalonego operatora unitarnego $\mathcal{S}(\mathbb{C}^d) \ni \rho \mapsto U\rho U^* \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^d)$, co w tej teorii ma nazwę *kwantowego kanału unitarnego*. Stan kwantowy jest utożsamiany z operatorem hermitowskim $\rho = \rho^*$ dodatnim $\rho \geq 0$ na $\mathbb{C}^d$ o śladzie $\mathrm{tr}(\rho) = 1$. Ogólnie badany stan podlega ewolucji pod działaniem ustalonego systemu zwanego PIFS, w którym główną rolę odgrywają funkcje ewolucji $\rho \mapsto F_j(\rho)$ i prawdopodobieństwa $p_j(\rho)$. W Rozprawie są one rozpatrywane w szczególnych sytuacjach, zależnych od układu pomiarów $\Pi := \{\Pi_1, \dots, \Pi_k\}$ które są hermitowskimi operatorami dodatnimi o sumie będącej operatorem identycznościowym $\mathbb{I}_d$ na $\mathbb{C}^d$. Wówczas jeśli $p_j(\rho) := \mathrm{tr}(\Pi_j U \rho U^*) \neq 0$ i $B_j := \sqrt{\Pi_j}$ to

$$F_j(\rho) := \frac{B_j U \rho U^* B_j}{p_j(\rho)}.$$

Taki system określony przez ustalone U oraz Π oznaczany jest symbolem $\mathcal{F}_{U,\Pi}$ i nosi nazwę *częściowego iterowanego systemu funkcyjnego* (ang. "partial iterated function system" PIFS).

2. Omówienie uzyskanych wyników

2.1. **Rozdział 1.** W Rozdziale 1, noszącym tytuł "Framework", Autorka rozpatruje dwa rodzaje pomiarów:

(1) PVM (*miary o wartościach projektorowych*) w którym operatory pomiaru Π_j, $j = 1, \ldots, k \leq d$ są rzutami ortogonalnymi: $\Pi_j = (\Pi_j)^* = (\Pi_j)^2$, wzajemnie prostopadłymi: $\Pi_j\Pi_i = 0$ dla $1 \leq i \neq j \leq k$,

(2) rank-1 POVM (*miary o wartościach będących rzutami ortogonalnymi jednowymiarowymi niekoniecznie wzajemnie ortogonalnymi*) w których operatory pomiaru są dane jako $\Pi_j(h) := \frac{d}{k}\langle\varphi_j|h\rangle \cdot \varphi_j$ dla $h \in \mathbb{C}^d$ i $1 \leq j \leq k \geq d$ oraz $\|\varphi_j\| = 1$, wówczas wektory φ_j stanowią tak zwaną *ramkę* (ang. "frame") czyli układ wektorów spełniających uogólnioną równość Parsevala (z ustaloną stałą.)

W takim schemacie Autorka bada ewolucję kwantową jakiej podlega stan określony przez unormowany operator identycznościowy $\rho_* := \frac{1}{d}\mathbb{I}_d$, który jest stanem *maksymalnie zmieszanym* (ma maksymalną *entropię Shannona*, równą $\ln d$). W badanich Autorki jest on także punktem równowagi rozpatrywanych ewolucji (ze względu na ich jednorodność, co oznacza, że zarówno prawdopodobieństwa p_i jak i funkcje $p_i \cdot F_i$ są afiniczne dla wszystkich $1 \leq i \leq k$).

W przypadku rank-1 POVM taki stan, pod działaniem F_j, przechodzi w $F_j(\rho_*) = \rho_j := \frac{k}{d}\Pi_j$ z jednakowym prawdopodobieństwem $p_j(\rho_*) = \frac{1}{k}$ niezależnie od $1 \leq j \leq k$.

To pozwala określić proces Markowa na skończonej przestrzeni stanów $S_* := \{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$ z początkowym prawdopodobieństwem jednostajnym $\pi_*(\rho_j) = \frac{1}{k}$ i macierzą przejścia $P_*(\rho_i, \rho_j) = p_j(\rho_i) = \frac{d}{k}|\langle\varphi_j|U\varphi_j\rangle|^2$. Jeśli oznaczymy $I_k := \{1, 2, \ldots, k\}$ oraz złożenie $F_\kappa := F_{k_m} \circ F_{k_{m-1}} \circ \cdots \circ F_{k_1}$ dla $\kappa = (k_1, \ldots, k_m) \in I_k^m$, to $F_\kappa(\rho_*) \in S_*$ i proces ewolucji może być opisany przez nieskończone ciągi liczb ze zbioru I_k, z prawdopodobieństwem produktowym $\mathbb{P}$. Jednym z wyników tego Rozdziału jest pokazanie, że **miara ta nie jest ergodyczna**, zarówno dla rank-1 POVM (Theorem 1.35) jak i dla PVM (Theorem 1.41). Oba te Twierdzenia są ciekawe, chociaż niezbyt odpowiadają mojej intuicji (co wyjaśniam w dalszej części). Nie-ergodyczność miary $\mathbb{P}_{\rho_*}$ jest tutaj konsekwencją jej dosyć szczególnej postaci – w pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że miara ta jest skupiona na skończonym zbiorze. W przypadku PVM jest to także konsekwencja badanego modelu złożonego z dwóch rzutów ortogonalnych: jednowymiarowego Π_2 i $d-1$-wymiarowego Π_1.

Także Twierdzenie 1.42 o niezmienniczości prawdopodobieństwa na odwracalność ciągu indeksów, dla procesu startującego z indetyczności, wygląda ciekawie, chociaż też dotyczy tylko tego specyficznego rodzaju pomiaru PVM.

2.2. **Rozdział 2.** W Rozdziale 2 pod tytułem "Ball & point qutrit systems" Autorka bada szczegółowo system w $\mathbb{C}^3$, w którym za ewolucję odpowiada ustalony operator unitarny U a pomiar jest dokonywany przez układ dwóch projektorów (wzajemnie) ortogonalnych Π_1 (rzędu 2) oraz Π_2 (rzędu 1), co daje rozkład całej przestrzeni $\mathbb{C}^3 = \Pi_1(\mathbb{C}^3) \oplus \Pi_2(\mathbb{C}^3)$ na sumę ortogonalną dwóch podprzestrzeni. W tej sytuacji rzut jednowymiarowy Π_2 jest dany przez wektor jednostkowy $z \in \mathbb{C}^3$ i w pierwszym kroku ewolucji otrzymuje się $F_1(\rho_*) = \frac{1}{2}\Pi_1 =: \rho_m$ z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ oraz $F_2(\rho_*) = \Pi_2 =: \rho_z$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$.

Najpierw jest rozpatrzony przypadek $p_1(\rho_z) = 0$, czyli gdy F_1 nie wpływa na ewolucję ρ_z. Okazuje się, że wówczas z musi być wektorem własnym U, czyli że powyższy rozkład $\mathbb{C}^3$ jest niezmienniczy dla operatora unitarnego U (Proposition 2.1). W tym przypadku pokazano, że entropia dynamiczna układu (zdefiniowana na stronie 35), startującego z ρ_*, jest równa $H(U, \Pi) = 0$.

Dużo bardziej złożony jest przypadek $p_1(\rho_z) > 0$, w którym $F_1(\rho_z) = \rho_v$ jest stanem wektorowym określonym przez wektor niezerowy $v := \Pi_1 Uz$, leżący w obrazie $\Theta := \Pi_1(\mathbb{C}^3)$. Główną rolę w opisie ewolucji systemu odgrywa operator $A := \Pi_1 U \restriction_\Theta$ oraz jego wartości własne $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Ich badaniu Autorka poświęca kolejne strony tego Rozdziału. W szczególności operator ten jest odwracalny dokładnie wtedy, gdy $\omega := \langle z|Uz\rangle \neq 0$ i wówczas każdy ze stanów $\{\rho_m, \rho_v\}$ może być poddany działaniu nieskończenie wielu iteracji F_1, przy czym na (którejś z) trajektorii $\{F_1^n(\rho_i) : n \in \mathbb{N}\}$ (dla $i \in \{m, v\}$) może się pojawić punkt osobliwy, czyli taki stan ρ, dla którego $F_1(\rho) = \rho$ lub $p_1(\rho) = 0$, stabilizujący dalszą ewolucję danej trajektorii. Dla przykładu, stan wektorowy ρ_w jest osobliwy, gdy w jest wektorem własnym operatora A.

Początkowo Autorka bada działanie systemu na stany wektorowe, utożsamiane z płaszczyzną rzutową $\mathbb{CP}^1$, co jest równoważne z działaniem homografii Möbiusa, których klasyfikacja jest znana - opisana za pomocą ich punktów stałych (jeden lub dwa) i ich charakteru (homografie te są nazywane loksodromiczne, eliptyczne albo paraboliczne). Przy pomocy operatora A Autorka wyróżnia trzy rodzaje sytuacji, które mogą się pojawić w trajektoriach stanów wektorowych poddanych działaniu systemu, czyli de facto poddanych iteracjom działania F_1:

- (G) *typowe* (ang. generic), gdy A odwracalny i $\lambda_1 \neq \lambda_2$, prowadząca do dynamiki loksodromicznej lub eliptycznej;
- (D) *z defektem i nieosobliwe*, gdy $\lambda_1 = \lambda_2$ oraz $0 < |\lambda_1| < 1$, prowadzące do dynamiki parabolicznej;
- (S) *singularne*, gdy A nie jest odwracalna, wówczas dynamika jest zdegenerowana (może mieć jeden punkt stały lub nie mieć żadnego).

Rozszerzając te wyniki na dowolne stany (niekoniecznie wektorowe) Autorka uzyskuje opis dynamiki na $\mathcal{S}(\Theta)$ dla operatora A, który nie jest unitarny: podane są opisy punktów stałych transformacji F_1 (Observation 2.14) oraz *typowych* trajektorii nietrywialnych (Observation 2.15). Trajektorie te mogą być nieskończone i zbieżne do punktu (w przypadku D i niektórych G), okresowe lub prawie okresowe (w pozostałych przypadkach G) lub zrzucane w jeden punkt pod działaniem F_1 (w przypadkach S). Odnosząc te wyniki do opisu zachownia trajektorii danych stanów ρ_m oraz $\rho_v := F_1(\rho_z)$ Autorka pokazuje (Observation 2.19), że (gdy A nie jest unitarny, to) ρ_m nie może być osobliwy dla F_1 natomiast ρ_v może być albo punktem stałym albo $p_1(\rho_v) = 0$. Pełna klasyfikacja możliwych łańcuchów Markowa i ich trajektorii jest podana w Theorem 2.21 z objaśnieniami na rysunkach. W szczególności ważną i sympatyczną rolę w tej klasyfikacji odgrywa Krecik (=taupek, strona 70), który odpowiada za trajektorię z jednym tunelem, w którym ten Krecik się porusza, co odpowiada kolejnym iteracjom $F_1^n(\rho_m)$, które mogą dążyć do ρ_{e_1} gdy $n \to \infty$ lub wracać do ρ_z, a $F_1(\rho_z) \in \{\rho_z, \rho_{e_2}\}$ (gdzie $\{e_1, e_2\}$ są jednostkowymi wektorami własnymi operatora A).

W następnym Podrozdziale (Section 2.2) badany jest możliwy opis trajektorii poprzez *obraz numeryczny* $\mathcal{W}(U) := \{\omega := \langle z|Uz\rangle \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{C}^3, \|z\| = 1\}$ unitarnego operatora ewolucji U, który jest uwypukleniem (otoczką wypukłą) jego (co najwyżej trzech) wartości własnych. W Theorem 2.22 pokazano, że dwa wektory jednostkowe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^3$ dają ten sam punkt w $\mathcal{W}(U)$ dokładnie wtedy, gdy generują dwa *sprzężone* (równoważne) systemy. System $\mathcal{F}_{U,\Pi}$ zależy od $z \in \mathbb{C}^3$ poprzez drugi (jednowymiarowy) projektor $\Pi_2(h) = \langle z|h\rangle \cdot z$. Sprzężoność systemów oznacza, że istnieje operator unitarny komutujący z U, który przekształca $z_1 \mapsto z_2$. W konsekwencji otrzymujemy wzajemną jednoznaczność punktów $\omega \in \mathcal{W}(U)$ obrazu numerycznego oraz systemów $\mathcal{F}_{U,\Pi}$ (z dokładnością do ich sprzężenia). Pozwala to rozpatrywać tylko systemy postaci $\mathcal{F}_{U,\omega}$ gdzie $\omega := \langle z|Uz\rangle \in \mathcal{W}(U)$ oraz Π_2 jest rzutem ortogonalnym na z, a $\Pi_1 = \mathbb{I}_3 - \Pi_2$, ponieważ działanie takiego systemu jest takie samo dla wszystkich z, które dają tą samą liczbę $\omega \in \mathcal{W}(U)$.

W komentarzu (Remark 2.23) do tego Twierdzenia Autorka zauważa, że nie da się go uogólnić na wyższe wymiary – na $\mathbb{C}^3$ wartości własne operatora unitarnego stanowią jednoznaczny układ współrzędnych barycentrycznych (o ile są różne), a np. na $\mathbb{C}^4$ tak nie jest (podany jest kontrprzykład).

Jako że klasyfikacja trajektorii przy pomocy własności operatora A składa się z dziewięciu przypadków, każdy z nich został również zbadany i opisany, w Theorem 2.32, przy pomocy położenia liczby ω obrazie numerycznym $\mathcal{W}(U)$ oraz tego jakim trójkątem jest ten obraz. Na przykład, jeśli $\omega = 0$, to trajektorie zależą od tego, czy trójkąt $\mathcal{W}(U)$ jest równoboczny, ostrokątny ale nie równoboczny czy prostokątny.

Kolejny Podrozdział 2.2.3 poświęca Autorka zbadaniu związków pomiędzy niezmienniczością kwantowej entropii dynamicznej $H(U, \Pi)$ (oraz entropii wyjścia $G(U, \Pi)$) na zmianę operatora unitarnego U poprzez przekształcenia: fazy $U \mapsto e^{it}U$, bazy $U \mapsto VUV^*$ (V-unitarny) i odwrotność $U \mapsto U^* = U^{-1}$ (pokazanej w Proposition 1.47) a izometriami koła jednostkowego $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ (obrotami okręgu jednostkowego lub sprzężeniem zespolonym $z \mapsto \bar{z}$). Analogicznie jak poprzednio te entropie zależą tylko od parametru $\omega := \langle z, Uz \rangle \in \mathbb{D}$. Okazuje się (Theorem 2.40 i dalej Corollary 2.41) że jeśli spektrum operatora unitarnego $\sigma(U_1)$ przekształcimy przez izometrię koła $T : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$ na spektrum innego operatora unitarnego $\sigma(U_2) = T(\sigma(U_1))$, to dla dowolnego ω w obrazie numerycznym U_1 otrzymamy równoważność systemów $\mathcal{F}_{U_1,\omega}$ i $\mathcal{F}_{U_2,T(\omega)}$ a w konsekwencji takie same entropie dynamiczną $H(U, \Pi)$ oraz wyjścia $G(U, \Pi)$. W szczególności takie izometrie dla $U := U_1 = U_2$ nie zmieniają systemu $\mathcal{F}_{U,\omega}$. Dowód opiera się na jednoznaczności spektrum operatora unitarnego (z dokładnością do zmiany bazy $\mathbb{C}^3$).

W następnych dwóch Podrozdziałach wyliczone są wzory na entropię dynamiczną H (2.3. *Formulae for dynamical entropy*) oraz entropię wyjścia G (2.4. *Formulae for excess entropy*) dla wszystkich typów trajektorii opisanych w Theorem 2.21. Wyniki te są uzyskane dzięki dosyć obszernym i szczegółowym rachunkom, przy pomocy których Autorka znajduje miarę graniczną μ_*, potrzebną do zastosowania wzoru Blackwella w wersji (1.34) (ze strony 50). Ostatnim osiągnięciem Rozdziału 2 jest szczegółowe rozpatrzenie dynamiki systemu dla pewnej szczególnej macierzy unitarnej U_{CW}, wymyślonej przez Jamesa Crutchfielda i Karolinę Wiesner (ok. 2007), która w $\mathbb{R}^3$ jest ortogonalną macierzą obrotu wokół osi Y o kąt 45° złożonym z obrotem wokół osi X o kąt prosty. Autorka opisuje zachowanie systemu dla rzeczywistych parametrów ω z obrazu numerycznego U_{CW}. Obliczone są też entropie dynamiczna i wyjścia dla szczególnych wartości tego parametru, wśród których Autorka odzyskuje także rezultaty Crutchfelda i Wiesner. Więcej pracy wymagał szczególnie przypadek $\omega = \mathrm{trU_{CW}}$ (proces skończony eliptyczny), dla którego Autorka podała reprezentację tego operatora unitarnego w odpowiedniej bazie, co pozwolił na uzyskanie postaci macierzy A oraz wektora v potrzebne do wzoru na entropię dynamiczną (2.41); entropia wyjścia jest obliczona bezpośrednio przy użyciu prawdopodobieństw przejścia. Dla innych parametrów $\omega \in \mathcal{W}(U_{CW})$ z obrazu numerycznego podane są (piękne i kolorowe) obrazy uzyskane w sposób numeryczny, w szczególności pokazane jest dla jakich zespolonych parametrów z tego obrazu numerycznego rozpatrywany proces jest typu eliptycznego - są to punkty na hiperboli łączącej dwie nierzeczywiste wartości własne operatora U_{CW}.

2.3. **Rozdział 3.** W Rozdziale 3, mającym tytuł "Dynamical entropy of unitary operators", wprowadzone jest pojęcie *entropii dynamicznej operatora unitarnego* względem ustalonego pomiaru, które mierzy relatywny wpływ takiego operatora na losowość w ewolucji badanego systemu kwantowego. Relatywność jest względem sytuacji, w której istotną rolę odgrywa sam pomiar, a jako operator unitarny występuje identyczność $\mathbb{I}_d$. Zatem entropia dynamiczna operatora U (względem pomiaru Π) jest określona jako różnica: $H_{dyn}(U,\Pi) := H(U,\Pi) - H(\mathbb{I}_d,\Pi)$. Rozważany pomiar jest typu rank-1 POVM (jednowymiarowe projektory związane z ramką wektorów jednostkowych $\varphi_j \in \mathbb{C}^d$, dla $j = 1,\ldots,k$). Autorka pokazuje ogólne oszacowania na entropię dynamiczną dowolnego operatora unitarnego, w niektórych przypadkach jest ona zawsze nieujemna, w innych może być ujemna dla niektórych operatorów unitarnych. Pokazane są przykłady takich sytuacji, w szczególności (Example 3.5) dla $k = d^2$ i $|\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle|^2 = \frac{1}{d+1}$ (czyli pomiaru typu SIC-POVM) ta entropia jest zawsze ujemna (dla wszystkich unitarnych U). W kolejnym Przykładzie (Example 3.7 dla $d = 2$ i dowolnego k nieparzystego) pokazane są dwa operatory unitarne których entropia dynamiczna ma różne znaki. Dalej, w Example 3.8 jest analizowana szczegółowo sytuacja ramki o atrakcyjnej nazwie *Mercedes-Benz*, czyli tworzącej trójkąt równoboczny na sferze Blocha. Wówczas operatory unitarne odpowiadające obrotom wokół takich wektorów mają zawsze dynamiczną entropię nieujemną, a te związane z obrotami wokół osi prostopadłej do trójkąta mają zawsze entropię dynamiczną niedodatnią. Wszystkie te własności uzasadnione są rzetelnymi i nietrywialnymi rachunkami.

2.4. **Rozdział 4.** W Rozdziale 4, zatytułowanym "Measurement-independent dynamical entropies of unitaries", zdefiniowane są entropie dynamiczne: typu PVM i POVM, niezależne od pomiaru, aby mierzyć losowość ewolucji powodowną przez dany operator unitarny niezależnie od projektorów pomiarowych. W podanych dwóch definicjach niezależność od pomiarów uzyskuje się poprzez wzięcie supremów entropii dynamicznych tego operatora: albo po pomiarach typu rank-1 PVM (oznaczonej $\overline{H}^{\mathrm{dyn}}(U)$) albo typu rank-1 POVM (oznaczonej $H^{\mathrm{dyn}}(U)$). W Proposition 4.2 uzasadnione są niezmienniczości obu definicji na typowe transformacje (zmiany fazowe, sprzężenia czy odwracanie operatora unitarnego). W Theorem 4.3 podane zostało oszacowanie entropii dynamicznej dla rank-1 PVM (uśrednionej względem miary Haara dla grupy unitarnej $\mathcal{U}(\mathbb{C}^d)$), które wykorzystuje wzór Jonesa $\int_{\mathcal{U}(\mathbb{C}^d)} H(U,\Pi)dU = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{d}$ (niezależnie od pomiaru typu rank-1 PVM).

W Podrozdziale 4.2 pokazane jest, że maksymalną entropię dynamiczną posiadają operatory unitarne (nazwane *chaotycznymi*) pochodzące od zespolonych macierzy Hadamarda.

W następnym Podrozdziale 4.3 badana jest entropia dynamiczna typu PVM dla operatorów unitarnych na $\mathbb{C}^d$, gdy $d = 2$ (t.zw. *qubits*) oraz $d = 3$ (t.zw. *qutrits*) a także dla systemów złożonych z potęgi tensorowej jednego takiego operatora dwuwymiarowego. W przypadku $d = 2$ wyliczona jest entropia dynamiczna typu PVM dla dowolnego operatora unitarnego na $\mathbb{C}^2$ - pokazane zostało, że zależy ona tylko od długości krótszego łuku okręgu jednostkowego łączącego obie wartości własne tego operatora. Używając wzoru Weyla na całkowanie po grupie unitarnej (funkcji stałych na klasach sprzężoności) obliczona została (Theorem 4.11) objętość podzbioru macierzy chaotycznych, równa $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$, a także (Theorem 4.12) uśredniona wartość entropii dynamicznej typu PVM równa $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi + 1 - 2C}{2\pi}$, gdzie $C := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Rachunki nie są tutaj trudne, ale pokazują że uśredniona entropia dynamiczna typu PVM jest bliska maksymalnej możliwej. Ponadto pokazana została charakteryzacja macierzy unitarnych, chaotycznych na $\mathbb{C}^2$, jako takich, dla których ślad jest w kole o promieniu $\sqrt{2}$. Dalej badane są macierze unitarne chaotyczne na $\mathbb{C}^3$. Ich objętość daje się wyrazić, ale jako całka nieelementarna (Theorem 4.17), którą można przybliżyć numerycznie, co pozwala stwierdzić, że jest ona mniejsza niż dla qubitów. Ogólnie chaotyczność macierzy unitarnej na $\mathbb{C}^3$ jest zdeterminowana tylko przez jej ślad oraz wyznacznik (Theorem 4.16) a dowód sprowadza się do obliczeń dla t.zw. macierzy Fouriera F_3. Tą samą metodą, dostarczoną w Theorem 4.14, daje się uzyskać analogicną charakteryzację dla $d = 5$ ale dla $d = 4$ niestety nie. Wyniki te (dla $d = 3$ i $d = 5$) są także wsparte odpowiednimi rysunkami.

W dalszej części Podrozdziału 4.3 badana jest entropia dynamiczna typu PVM dla systemów z ewolucją zadaną przez iloczyny tensorowe $A = U^{\otimes n}$ oraz $B = U \otimes \mathbb{I}_2^{\otimes n}$, gdzie $U = \mathrm{diag}(1, e^{i\theta}) \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^2)$ jest diagonalna (systemy wielo-qubitowe). W Proposition 4.19 pokazano, dla jakich parametrów θ takie operatory są chaotyczne. W przypadku A jest charakteryzacja dla $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, a jego chaotyczność jest równoważna chaotyczności U. Natomiast dla $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ pokazano przykład rozróżniający entropie dynamiczne obu takich operatorów. Dalej pokazano przykłady różnych zachowań entropii dynamicznej systemów wielo-qubitowych w porównaniu z jedno-qubitowymi, w szczególności pokazano nierówności porównujące te entropie. Sformułowano także pewne hipotezy z tym związane: w przypadku A są to Example 4.24, Proposition 4.27 oraz Conjecture 4.26, a w przypadku B są to Theorem 4.29, Propositions 4.31-4.34 oraz Conjectures 4.30, 4.35. W szczególności w Theorem 4.29 podano oszacowanie od dołu entropii dynamicznej typu PVM dla przypadku B i dla $0 \leq \theta \leq \pi$ przez wartości funkcji $G_n(\theta) := \eta(\frac{1+\cos\theta}{2}) + (2^n - 1)\eta(\frac{1-\cos\theta}{2(2^n-1)})$ gdzie $\eta(x) = -x \ln x$ $(x > 0)$ i $\eta(0) = 0$. Dla $0 \leq \theta \leq \arccos(2^{1-n} - 1)$ ta entropia okazuje być równa wartościom funkcji $G_n(\theta)$. Przykłady opierają się na badaniu własności macierzy zespolonych Hadamarda oraz macierzy Fouriera, natomiast dowody własności i twierdzeń wykorzystują niebanalne metody algebry liniowej wraz z istnieniem pewnych szczególnych ramek typu $EFT(2^{n+1}, 2^n)$.

Ostatnią częścią Rozprawy jest Podrozdział 4.4, nie będący częścią wspólnej publikacji z Promotorem. Autorka pokazuje, że w przypadku $\mathbb{C}^2$, czyli t.zw. qubitów, entropie dynamiczne $\overline{H}^{\mathrm{dyn}}(U)$ (typu POVM) i $H^{\mathrm{dyn}}(U)$ (typu PVM) są takie same. Ponieważ w pomiarze typu rank-1 PVM projektory Π_j, $k \leq 2$, są rzutami ortogonalnymi na wzajemnie ortogonalne wektory jednostkowe, natomiast w pomiarze typu rank-1 POVM projektory Π_j są rzutami ortogonalnymi na wektory (dowolnej) ramki φ_j, otrzymuje się trywialną nierówność $H^{\mathrm{dyn}}(U) \leq \overline{H}^{\mathrm{dyn}}(U)$. Dlatego wystarczy pokazać nierówność przeciwną, a korzystając z jawnej postaci $H^{\mathrm{dyn}}(U)$ wyrażonej w Proposition 4.9 poprzez funkcję $\eta(x)$, problem sprowadza się do pokazania nierówności $H_{\mathrm{dyn}}(U, \Pi) \leq \eta(\cos^2 \frac{\theta}{2}) + \eta(\sin^2 \frac{\theta}{2})$ dla dowolnego pomiaru Π typu rank-1 POVM i dla $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Główna trudność polega na dowolności ramki $\varphi_j \in \mathbb{C}^2$, ale poprzez odpowiednie jej przedstawienie i wykorzystanie wklęsłości funkcji $\eta(x)$ zagadnienie sprowadza się do oszacowania od góry (4.24) funkcji

$$\begin{aligned} g(x, y, \psi, \theta) &:= \eta(xy + (1-x)(1-y) + 2\sqrt{xy(1-x)(1-y)} \cdot \cos\psi \cos\theta) \\ &+ \eta(xy + (1-x)(1-y) + 2\sqrt{xy(1-x)(1-y)} \cdot \cos\psi) \end{aligned}$$

Dowód tego oszacowania zajmuje ponad 17 stron rzetelnej i niezwykle drobiazgowej analizy, wykorzystującej reprezentację wektorów ramki na sferze Blocha. Niewątpliwie wymagało to od Autorki jakiejś intuicji, aby przypuszczać, że takie oszacowanie, a w konsekwencji równość dwóch entropii dynamicznych dla qubitów, są możliwe.

3. Uwagi dodatkowe

(1) W analizie funkcjonalnej, szczególnie w teorii algebr operatorowych, *stan* (na *-algebrze $\mathcal{A}$ z jedynką) jest to funkcjonał liniowy dodatni unormowany w jedynce. Określenie jako *stan* operatora liniowego dodatniego o śladzie jeden jest oczywiście konwencją polegającą na pewnym utożsamieniu, wynikającym z twierdzenia o postaci funkcjonału liniowego dodatniego unormowanego na przestrzeni Hilberta, które mówi, że jest on postaci $\mathcal{L}(H) \ni A \mapsto \mathrm{tr}(\rho A) \in \mathbb{C}$ dla pewnego operatora dodatniego śladowego $\rho \in \mathcal{L}(H)$ o śladzie $\mathrm{tr}(\rho) = 1$. Wydaje mi się, że warto byłoby nadmienić to we wstępie do Rozdziału 1 (Punkt 1.1.1.) (dla $H = \mathbb{C}^d$).

(2) Określony w Definicji 1.4 na stronie 31 Rozprawy "częściowo iterowany system funkcyjny" (PIFS) określony jest niecałkiem precyzyjnie. Jeśli dla uproszczenia użyjemy notacji $D_i := \mathrm{Dom}\, F_i = \{x \in X : p_i(x) \neq 0\}$, to dziedziną funkcji F_i jest D_i, a obrazem (zbiorem wartości) jest $F_i(D_i) \subset X$. Wówczas wzór określający *operator ewolucji* Ψ ma sens jedynie dla borelowskich podzbiorów $B \subset X$ spełniających dodatkowy warunek $B \subset \cap_{i=1}^{k} F_i(D_i)$, aby można było rozpatrywać przeciwobrazy $F_i^{-1}(B)$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, k$.

Ma to też konsekwencje w dalszym określeniu iteracji (strona 32). Wydaje się, że lepiej byłoby zdefiniować iteracje $D_{\iota j} := \{\rho \in D_\iota : F_\iota(\rho) \in D_j\}$ dla $\iota \in I_k^n$ oraz $j \in I_k$, zamiast $D_{\iota j} := D_\iota \cap F_\iota^{-1}(D_j)$, ponieważ przeciwobraz $F_\iota^{-1}(D_j)$ może nie być dobrze określony (jeśli nie jest spełniony warunek $D_j \subset F_\iota(D_\iota)$). Chodzi o następujący drobiazg: jeśli $F : X \to Y$, to F^{-1} jest określona tylko na obrazie $F(X) \subset Y$, a niekoniecznie na całym zbiorze Y (jeśli $F(X) \neq Y$). Natomiast jeśli F jest surjekcją, to nie ma tego problemu.

W konsekwencji wzór (1.14) powinien określać indukcyjnie iterację prawdopodobieństwa jako $p_{i\iota}(\rho) := p_i(F_\iota(\rho))p_\iota(\rho)$ dla $\rho \in D_\iota$ spełniających dodatkowo warunek $F_\iota(\rho) \in D_j$ (a poza tym zero). Takie sformułowanie lepiej wskazywałoby na jakich stanach $\rho \in S(\mathbb{C}^d)$ nowe prawdopodobieństwo $p_{\iota j}$ zeruje się, a na jakich nie. Niemiej jednak wzór (1.14) jest poprawny.

Powyższy problem jest rozwiązany w szczególnym przypadku miary Diraca w objaśnieniu do wzoru (1.13).

Przy okazji dodam, że oznaczenia w tych definicjach nie są łatwo czytelne, ponieważ ι (grecka litera jota) oraz i są do siebie bardzo podobne i ustalenie która z tych liter jest na którym miejscu ($i\iota$ czy ιi) wymaga bardzo dobrego wzroku. Nawet litera κ byłaby tutaj lepsza od ι (a jeszcze bardziej czytelne byłyby np. α, β, γ).

(3) Na pierwszy rzut oka dowód Theorem 1.35, znajdujący się na stronie 43, wydał mi się niepoprawny, ponieważ intuicyjne dla miary produktowej na nieskończonym produkcie $I_k^{\mathbb{N}}$ zazwyczaj punkty są miary zero. Jednak po dokładnej analizie przekonałem się, że dowód jest poprawny i oczywiście twierdzenie to jest prawdziwe, ponieważ rozpatrywana miara $\mathbb{P}_{\rho*}$ jest bardzo szczególna - np. punkt $(j, j, j, \ldots)$ (dla każdego $j = 1, \ldots, k$) może mieć miarę $1/k$ (w szczególnym przypadku układu ortonormalnego i $k = d$) - wówczas miara $\mathbb{P}_{\rho*}$ jest skupiona w tych k punktach a niemal cała przestrzeń $I_k^{\mathbb{N}}$, poza tymi punktami, ma miarę zero. Oczywiście każdy taki punkt rozpina nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą na przesunięcia. To samo dotyczy dowodu Theorem 1.41.

W dowodach tych (Theorem 1.35 strona 43 oraz Theorem 1.41, (iii)$\Rightarrow$ (iv) na stronie 47) pojawia się szczegół, który mi się nie podoba. Mianowicie, ponieważ operator przesunięcia S jest zdefiniowany jako "obcinanie" pierwszego wyrazu ciągu (strona 33):

$$(Ss)_j := s_{j+1}, \qquad \text{czyli} \qquad S : (s_1, s_2, s_3, \ldots) \mapsto Ss = (s_2, s_3, s_4, \ldots)$$

(np. $(Ss)_1 = s_2$), więc operator ten nie jest odwracalny, jako że nie jest różnowartościowy. Nie ma zatem sensu pisanie S^{-1}. Domyślam się, że Autorce mogło raczej chodzić o operator sprzężony S^* (zamiast S^{-1} lub ew. zamiast S), który jest przesunięciem "w prawo"

$$S^* : (s_1, s_2, s_3, \ldots) \mapsto S^*s = (0, s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots).$$

Ten akurat jest (jednostronnie) odwracalny i $(S^*)^{-1} = S$ w tym senie, że $SS^* = id$.

(4) Na stronie 44 powinno być chyba "take a closer *look* at".

4. Uwagi końcowe

Rozprawa doktorska Pani Anny Szczepanek zawiera ogromną ilość oryginalnych i nietrywialnych wyników dotyczących badania entropii systemów kwantowych, których ewolucja jest determinowana przez operatory unitarne, a pomiary są dokonywane przy pomocy różnych zestawów projektorów ortogonalnych. Widać w niej ogromną wiedzę Autorki, jej umiejętności badawcze oraz rachunkowe a także jej intuicję dotyczącą badanych zjawisk. Rozprawa jest napisana świetnym językiem angielskim i wsparta wieloma ciekawymi i bardzo pożytecznymi rysunkami, których wytworzenie wydaje mi się dalece niebanalne. Pani Anna Szczepanek ma jedną publikację, wspólną z Promotorem, która stanowi podsumowanie wyników uzyskanych w Rozdziale 4. Czasopismo *IEEE Transactions on Information Theory*, w którym ukazała się ta publikacja, jest wysoko cenione (także bibliometrycznie: IF=3,215, i 200 pkt na nowej liście czasopism MNiSW). Można się spodziewać, że takich publikacji, wspólnych i samodzielnych, będzie więcej, jako że w ośrodku krakowskim jest także profesor Karol Życzkowski, wybitny specjalista w dziedzinie informacji kwantowej, z którym współpracuje Autorka wraz z Promotorem i którego wyniki są w Rozprawie wykorzystywane.

5. Konkluzja

Rozprawa doktorska Pani Anny Szczepanek bez najmniejszych wątpliwości spełnia według mnie wszystkie wymagania ustawowe. Dlatego z przyjemnością wnoszę o dopuszczenie Pani Anny Szczepanek do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Uważam także, że ta Rozprawa powinna zostać wyróżniona, zatem oficjalnie zgłaszam taki wniosek.

Janusz Wysoczański