Kwantowa entropia dynamiczna operatorów unitarnych w skończenie wymiarowych przestrzeniach stanów

Streszczenie

Kwantowa entropia dynamiczna jest miarą nieredukowalnej losowości wyników następujących po sobie pomiarów układu kwantowego, który pomiędzy dwoma kolejnymi pomiarami podlega ewolucji unitarnej. Łączna ewolucja takiego układu opisywana jest za pomocą częściowego iterowanego układu funkcyjnego (PIFS, *partial iterated function system*) na zespolonej przestrzeni rzutowej, zaś entropia dynamiczna wyraża się za pomocą tzw. wzoru całkowego Blackwella. Uzyskanie efektywnego wzoru na entropię dynamiczną nie sprawia trudności jedynie w sytuacji, gdy pomiar składa się z operatorów o rzędzie jeden. W pierwszej części rozprawy badamy entropię dynamiczną względem pomiarów rzutowych (PVM; *projection valued measure*), które zawierają operatory o rzędzie większym niż jeden. Najprostszym przypadkiem tego problemu jest układ trójwymiarowy oraz pomiar złożony z dwóch rzutowań (o rzędach jeden i dwa). Przypadek ten był badany przez Crutchfielda i Wiesner dla pewnego konkretnego operatora unitarnego oraz dwóch pomiarów. W rozprawie podajemy klasyfikację wszystkich tego typu układów trójwymiarowych: wyróżniamy osiem typów łańcuchów Markowa, które mogą zostać wygenerowane w przestrzeni stanów kwantowych, po czym dla każdego typu wyprowadzamy efektywny wzór na entropię dynamiczną oraz entropię nadwyżkową.

W drugiej części rozważamy pojęcie kwantowej entropii dynamicznej niezależnej od pomiaru. Wielkość ta jest zdefiniowana jako maksimum kwantowej entropii dynamicznej (względem pomiaru) po klasie pomiarów złożonych z rzutowań jednowymiarowych (rank-1 PVM), którym odpowiadają bazy ortonormalne przestrzeni zespolonej. Wyróżniamy klasę operatorów chaotycznych, czyli operatorów o maksymalnej entropii. Korzystając z pojęcia zespolonej macierzy Hadamarda, podajemy warunek konieczny na chaotyczność, który wyraża się w języku śladu i wyznacznika operatora. Dla wymiarów dwa i trzy ten warunek jest również wystarczający, co pozwala na obliczenie objętości zbioru operatorów chaotycznych w grupie unitarnej (względem miary Haara), a także, w wymiarze dwa, średniej wartości kwantowej entropii dynamicznej. Uzyskujemy także efektywny warunek konieczny (w języku śladu) na chaotyczność operatora w wymiarze pięć.

Układy wyżej wymiarowe rozważane są w sytuacji wielu kubitów (układów dwuwymiarowych), z których każdy podlega lokalnej ewolucji opisywanej tym samym operatorem unitarnym. Chaotyczność tego operatora okazuje się być warunkiem koniecznym i wystarczającym osiągania przez cały układ maksymalnej entropii dynamicznej. Drugim analizowanym przypadkiem jest układ złożony z jednego kubitu o nietrywialnej ewolucji unitarnej oraz towarzyszących mu kubitów pomocniczych (o ewolucji trywialnej). Pokazujemy, że takie rozszerzanie układu o pomocnicze kubity prowadzi do spadku entropii dynamicznej (unormowanej liczbą kubitów) oraz wyznaczamy granicę entropii dynamicznej przy liczbie kubitów pomocniczych dążącej do nieskończoności – granica ta okazuje się być zawsze dodatnia. Wyróżniamy także klasę uporczywie chaotycznych operatorów unitarnych jako tych, które są chaotyczne pomimo obecności dowolnie wielu pomocniczych kubitów, oraz podajemy charakteryzację operatorów uporczywie chaotycznych w wymiarach dwa i trzy.

Kwantową entropię dynamiczną niezależną od pomiaru można również zdefiniować jako supremum entropii dynamicznej względem pomiaru po szerszej klasie tzw. pomiarów uogólnionych, którym odpowiadają miary półspektralne (POVM; *positive operator valued measure*). Wykazujemy, że w wymiarze dwa maksymalizacja (odpowiednio znormalizowanej) entropii po zbiorach: mniejszym, rank-1 PVM-ów, i większym, rank-1 POVM-ów, daje ten sam wynik.

Anna Szczepanek

QUANTUM DYNAMICAL ENTROPY OF UNITARY OPERATORS
IN FINITE-DIMENSIONAL STATE SPACES

Summary

Quantum dynamical entropy measures the irreducible randomness in the sequences of outcomes generated by a repetitively measured quantum system that between two consecutive measurements is subject to unitary evolution. Joint evolution of such a system can be described by a *Partial Iterated Function System* (PIFS) acting on a complex projective space and its dynamical entropy is given by the so-called Blackwell integral formula. It is only in the case of measurements consisting exclusively of rank-1 operators that a closed-form expression for quantum dynamical entropy can be fairly easily derived. In the first part of the dissertation we study quantum dynamical entropy with respect to *projective measurements* (PVMs) that contain projectors of ranks higher than one. The simplest case of this problem is a three-dimensional quantum system measured with a PVM consisting of two projectors, one of which has rank two and the other has rank one. This case was investigated by Crutchfield & Wiesner, who analysed a specific unitary operator with respect to two measurements. We provide a classification of all such three-dimensional systems, identifying eight types of Markov chains that they can generate in the space of quantum states and then deriving for each chain type efficient formulae for quantum dynamical entropy and excess entropy.

In the second part we consider the notion of quantum dynamical entropy independent of measurement. This quantity is defined as the maximum of quantum dynamical entropy (with respect to a measurement) over the class of rank-1 PVMs, which correspond to orthonormal bases of the underlying complex space. We distinguish the class of chaotic unitary operators as those unitaries that attain the maximal value of quantum dynamical entropy. Employing the notion of a complex Hadamard matrix, we derive a necessary condition for chaoticity in terms of the trace and determinant of a unitary. In dimensions two and three this condition is sufficient as well, which allows for the calculation of the volume of chaotic unitaries in the unitary ensemble (with respect to the Haar measure) and, in dimension two, the average value of quantum dynamical entropy. We also obtain an effective necessary trace condition for chaoticity in dimension five.

Higher dimensional systems are studied in the particular case of several qubits that are all subject to the (local) action of the same unitary. We prove that this unitary is chaotic if and only if the dynamical entropy of the composite system is maximal. We also analyse the case of non-trivial unitary dynamics affecting one qubit, while the remaining ancillary qubits are governed by the trivial dynamics. We show that quantum dynamical entropy (per one qubit) eventually decreases (i.e., when sufficiently many ancillary qubits have been taken into account) and we compute its limit as the number of ancillary qubits grows to infinity – this limit turns out to be strictly positive. Furthermore, we distinguish the class of stubbornly chaotic unitaries as those that are chaotic despite the presence of arbitrarily many ancillary qubits. We establish a necessary trace condition for a unitary to be stubbornly chaotic and characterise stubbornly chaotic unitaries in dimensions two and three.

Quantum dynamical entropy independent of measurement can be also defined as the supremum of quantum dynamical entropy with respect to a measurement over the bigger class of generalised measurements, which correspond to semispectral measures (POVM; *positive operator valued measure*). We prove that in dimension two the maximisation over the bigger set of rank-1 POVMs leads to the same result as the maximisation over the smaller set of rank-1 PVMs.

Anna Szczepanek