UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

Katarzyna Niemiec

Systemy Weierstrassa i generowane struktury modelowo zupełne

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
dr. hab. Krzysztofa Nowaka

Kraków 2013

Składam serdeczne podziękowania Panu dr. hab. Krzysztofowi Nowakowi za nieocenioną pomoc, poświęcony czas, a także za ogromną życzliwość.

Spis treści

Wprowadzenie 6

Rozdział 1. Zbieżne systemy Weierstrassa 8

Rozdział 2. Struktury generowane przez systemy Weierstrassa. Eliminacja kwantyfikatorów. Opis funkcji definiowalnych przez termy 13

Rozdział 3. Zbieżne systemy Weierstrassa zamknięte ze względu na podstawianie pierwiastków i rektylinearyzacja funkcji definiowalnych 28

Rozdział 4. Systemy Weierstrassa wyznaczone przez funkcje elementarne i funkcje eliptyczne 34

§ 1. System Weierstrassa wyznaczony przez zawężone funkcje elementarne 34
§ 2. Podstawowe informacje o funkcjach eliptycznych 36
§ 3. System Weierstrassa wyznaczony przez funkcje eliptyczne 42

Rozdział 5. Zachowanie wielomianów Weierstrassa przy rozdmuchaniu i twierdzenie o rzędzie 44

Literatura 59

Wprowadzenie

Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest zbieżnym systemom Weierstrassa oraz generowanym przez nie strukturom o-minimalnym. Pojęcie systemu Weierstrassa zostało wprowadzone przez Denefa–Lipschitza [11] w celu uogólnienia twierdzenia aproksymacyjnego Artina [3], które klasycznie dotyczyło zbieżnych szeregów potęgowych. Obecnie wiemy już, że w szerokiej klasie pierścieni lokalnych R, R ma własność aproksymacyjną wtedy i tylko wtedy, gdy jest henselowski i doskonały (w sensie Grothendiecka). Ta charakteryzacja została uzyskana przez Rotthaus [41, 42]. Pojęcie zbieżnego systemu Weierstrassa wprowadził van den Dries w pracy [13] poświęconej strukturze wyznaczonej przez funkcje elementarne, a inspiracją dla niego było ujęcie Tarskiego zbiorów i funkcji definiowalnych w geometrii elementarnej.

Rozdział 1 zawiera podstawowe pojęcia i własności zbieżnych, rzeczywistych i zespolonych systemów Weierstrassa $\mathcal{W}$. W Rozdziale 2 definiuję strukturę $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$ wyznaczoną przez zawężone rzeczywiste funkcje $\mathcal{W}$-analityczne. Głównym jego celem jest wykazanie, że struktura ta dopuszcza eliminację kwantyfikatorów w języku wzbogaconym o nazwę funkcji odwrotnej $1/x$. Dla struktury $\mathbb{R}_{an}$ wyznaczonej przez rzeczywiste funkcje analityczne, udowodnili to Denef-van den Dries [12], wzmacniając tym samym twierdzenie Gabrielova [16] o dopełnieniu (modelowa zupełność $\mathbb{R}_{an}$). Natomiast prezentowany przeze mnie dowód został zainspirowany artykułami K.J. Nowaka [31], w których zastosowane zostało podejście teorio-modelowe oparte na teście Robinsona modelowej zupełności. Dowód przedstawiony w rozprawie wykorzystuje jednak pewne kryterium eliminacji kwantyfikatorów (w stylu Robinsona), które pozwala na uzyskanie jej bezpośrednio.

W klasycznym przypadku, struktura $\mathbb{R}_{an}$ posiada — jak udowodnili van den Dries–Macintyre–Marker [14] — aksjomatykę uniwersalną w języku wzbogaconym o nazwy funkcji odwrotnej $1/x$ i pierwiastków $\sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, \ldots$; dla dowodu zob. także artykuł K.J. Nowaka [31]. Dowód ten przenosi się praktycznie bez zmian na przypadek zawężonych funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych. Opiera się on na eliminacji kwantyfikatorów w języku wzbogaconym o nazwę funkcji odwrotnej $1/x$ oraz na pewnym waluacyjnym kryterium rzeczywistej domkniętości ciała z waluacją. Fakt, że dana struktura ma aksjomatykę uniwersalną i eliminację kwantyfikatorów jest niezmiernie ważny, gdyż wtedy każdą funkcję definiowalną można przedstawić za pomocą skończonej liczby termów. Umożliwia to, w szczególności, prowadzenie indukcji ze względu na złożoność termów. Będzie to wykorzystane w Rozdziale 3, w którym prezentuję pewne twierdzenia o rektylinearyzacji funkcji definiowalnych w strukturze $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$, uzyskane przez K.J. Nowaka [34]. Słabsze twierdzenia o rektylinearyzacji funkcji definiowalnych zachodzą dla wszystkich rzeczywistych zbieżnych systemów Weierstrassa, natomiast mocniejsze dla systemów, które są zamknięte ze względu na podstawianie pierwiastków. Przykładami takich systemów są systemy wyznaczone w Rozdziale 4 przez funkcje elementarne oraz przez różne klasy funkcji eliptycznych. Badanie systemów wyznaczonych przez funkcje eliptyczne opiera się w dużej mierze na formule dodawania dla eliptycznej funkcji Weierstrassa.

W Rozdziale 5 badam zachowanie zespolonych wielomianów Weierstrassa o współczynnikach formalnych przy rozdmuchaniach jego współczynników. Wprowadzone jest tu pojęcie $\mathcal{W}$-analitycznego modyfikowanego pierwiastka Puiseux dla takich wielomianów. Załóżmy, że rozważany zespolony system Weierstrassa jest zamknięty ze względu na przedłużanie analityczne. Głównym rezultatem jest twierdzenie, że jeśli nierozkładalny wielomian Weierstrassa o współczynnikach formalnych ma $\mathcal{W}$-analityczny modyfikowany pierwiastek Puiseux, to jego współczynniki są $\mathcal{W}$-analityczne. Twierdzenie to, wraz z mocnymi twierdzeniami o rektylinearyzacji z Rozdziału 3, pozwala na udowodnienie twierdzenia Gabrielowa o rzędzie, a także jego uogólnienia na te rzeczywiste systemy Weierstrassa, które są śladem zespolonego systemu zamkniętego ze względu na przedłużanie analityczne. Przykładem systemów zamkniętych ze względu na przedłużanie analityczne jest system zbieżnych szeregów różniczkowo algebraicznych, omówiony w Rozdziale 5 tej rozprawy.

Stosując powyżej opisane techniki, nie potrafimy uzyskać bezpośredniego dowodu twierdzenia o rzędzie dla zespolonych systemów Weierstrassa zamkniętych ze względu na przedłużanie analityczne. Spowodowane jest to faktem, że w dowodzie wykorzystujemy rektylinearyzację funkcji definiowalnych przez systemy rzeczywiste. Jednakże pewne twierdzenie Milmana [28] umożliwia redukcję analizy formalnych relacji pomiędzy zespolonymi funkcjami analitycznymi do analizy relacji formalnych pomiędzy ich częściami rzeczywistymi i urojonymi. Pozwala to na uzyskanie klasycznej zespolonej wersji twierdzenia Gabrielowa o rzędzie. Wydaje się możliwym uogólnienie twierdzenia o rzędzie na przypadek tych zespolonych systemów Weierstrassa, które są zamknięte ze względu na przedłużanie analityczne oraz branie części rzeczywistej i urojonej (rozważanych w [34]). Wymagałoby to, jak sądzę, uogólnienia twierdzenia Milmana na przypadek takich systemów. Ich przykładem jest tu znowu system szeregów różniczkowo algebraicznych.

Rozdział 1. Zbieżne systemy Weierstrassa

Oznaczmy przez $\mathbb{K}[[x]]$ pierścień szeregów formalnych zmiennych $x = (x_1, ..., x_n)$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ charakterystyki zero i rozważmy podpierścienie

$$\mathcal{W}_n = \mathbb{K}\langle x_1, ..., x_n\rangle \subset \mathbb{K}[[x]], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Szereg $f(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ jest regularny rzędu d względem x_n gdy

$$f(0, x_n) = \sum_{j=d}^{+\infty} a_j x_n^j \text{ oraz } a_d \neq 0.$$

Definicja. Rodzinę pierścieni $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy systemem Weierstrassa nad $\mathbb{K}$, jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ spełnione są następujące warunki:

(W1) $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}\langle x\rangle \subset \mathbb{K}[[x]]$, oraz jeśli σ jest permutacją zbioru $\{1, ..., n\}$ i $f(x) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$, wtedy również $f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$. Ponadto dla dowolnego $m > 0$, $\mathbb{K}\langle x, x_{n+1}, ..., x_{n+m}\rangle \cap \mathbb{K}[[x]] = \mathbb{K}\langle x\rangle$.

(W2) Jeśli $f(x) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$ jest jednością w $\mathbb{K}[[x]]$, to jest jednością w $\mathbb{K}\langle x\rangle$.

(W3) Jeśli $f(x, x_{n+1}) \in \mathbb{K}\langle x, x_{n+1}\rangle$ oraz $f(0, x_{n+1}) \in \mathbb{K}[[x_{n+1}]]$ jest rzędu d, wtedy dla dowolnego $g \in \mathbb{K}\langle x, x_{n+1}\rangle$ istnieje $Q \in \mathbb{K}\langle x, x_{n+1}\rangle$ oraz $R_i \in \mathbb{K}\langle x\rangle$, $i = 0, .., d-1$ takie, że

$$g = Q\, f + R_{d-1}\, x_{n+1}^{d-1} + ... + R_0.$$

Niech teraz $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. System Weierstrassa $\mathcal{W}$ nazywamy zbieżnym, gdy spełnia poniższy warunek:

(W4) Dla dowolnego $f(x) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$ istnieje polidysk

$$\Delta = \{x \in \mathbb{C}^n : \ |x_1| < \epsilon_1, ..., |x_n| < \epsilon_n\}$$

taki, że $f(x)$ jest zbieżny w Δ oraz dla dowolnego $a \in \Delta \cap \mathbb{K}^n$ szereg

$$f(a + x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha!} \in \mathbb{K}\langle x\rangle.$$

Lemat 1.1. *Niech* $f(y) \in \mathbb{C}[[y]]$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $f(y) \not\equiv 0$. *Wtedy dla generycznego podstawienia liniowego* $y = L(y')$ *postaci*

$$y_1 = y_1' + z_1 y_n',\ ...., y_{n-1} = y_{n-1}' + z_{n-1} y_n',\ y_n = y_n',$$

gdzie $z_1, ..., z_{n-1} \in \mathbb{R}$, *szereg* $(f \circ L)(y')$ *jest regularny względem* $y_n = y_n'$.

DOWÓD. Szereg

$$(f \circ L)(y') = f(y_1' + z_1 y_n', ..., y_{n-1}' + z_{n-1} y_n', y_n')$$

jest regularny względem y_n', gdy $f(z_1 y_n', ..., z_{n-1} y_n', y_n') \not\equiv 0$.
Niech

$$f(y) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \phi_\nu(y),$$

gdzie $\phi_\nu(y)$ są wielomianami jednorodnymi stopnia ν. Wtedy

$$f(z_1 y_n', ..., z_{n-1} y_n', y_n') = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} y_n'^{\nu} \phi_\nu(z_1, ..., z_{n-1}, 1).$$

Jeśli więc $\phi_\nu(y) \not\equiv 0$ dla pewnego $\nu \in \mathbb{N}$, to również $\phi_\nu(z_1, ..., z_{n-1}, 1) \not\equiv 0$. Wtedy wystarczy wziąć $(z_1, ..., z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ takie, że $\phi_\nu(z_1, ..., z_{n-1}, 1) \neq 0$. Zbiór takich $(z_1, ..., z_{n-1})$ jest dopełnieniem nigdziegęstego zbioru algebraicznego $\{z \in \mathbb{C}^{n-1} : \phi_\nu(z_1, ..., z_{n-1}, 1) = 0\}$.

Własności systemów Weierstrassa.

1) $K\langle x \rangle$ jest pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym $(x_1, ..., x_n)$.

2) (zamkniętość ze względu na złożenie) Jeśli $y = (y_1, ..., y_m)$ oraz

$$f(x, y) \in \mathbb{K}\langle x, y \rangle,\ g(x) = (g_1(x), ..., g_m(x)),\ g_i(x) \in (x)\,\mathbb{K}\langle x \rangle,\ i = 1, ..., m,$$

to $f(x, g(x)) \in \mathbb{K}\langle x \rangle$.

3) (zamkniętość ze względu na funkcje uwikłane) Niech $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_m)$ oraz $f = (f_1, ..., f_m)$, $f_i \in \mathbb{K}\langle x, y \rangle$, $i = 1, ..., m$. Jeśli

$$f_i(x, y) \equiv 0 \bmod (x, y),\ i = 1, ..., m,\ \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,...,m} \not\equiv 0 \bmod (x, y),$$

to istnieje $y(x) = (y_1(x), ..., y_m(x))$, $y_i(x) \in (x)\mathbb{K}\langle x\rangle$, $i = 1, ..., m$ taki, że $f(x, y(x)) = 0$.

4) (zamkniętość ze względu na wydzielanie przez współrzędną) Dla każdego $i = 1, ..., n$, jeżeli x_i dzieli $f(x) \in K\langle x\rangle$ w $\mathbb{K}[[x]]$, to x_i dzieli $f(x)$ w $\mathbb{K}\langle x\rangle$.

5) (zamkniętość ze względu na różniczkowanie) Jeśli $f(x) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$, to $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{K}\langle x\rangle$, $i = 1, ..., n$.

6) Pierścienie $\mathbb{K}\langle x\rangle$ są noetherowskie, a więc uzupełnienie $\mathbb{K}[[x]]$ jest modułem wiernie płaskim nad $\mathbb{K}\langle x\rangle$.

DOWÓD. Ad.1) Stosując wielokrotnie warunek (W3), dowolny szereg $g \in \mathbb{K}\langle x\rangle$ można przedstawić w następującej formie:

$$g = U_1(x_1, ..., x_n)\, x_n + U_2(x_1, ..., x_{n-1})\, x_{n-1} + \ldots + U_n(x_1)\, x_1 + a,$$

gdzie $U_1(x_1, ..., x_n), ..., U_n(x_1) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$, $a \in \mathbb{K}$. Oczywiście, gdy $a \neq 0$ wtedy g jest odwracalny w $\mathbb{K}[[x]]$, a więc także w $\mathbb{K}\langle x\rangle$ (własność (W2)).

Ad.2) Stosując wielokrotnie warunek (W3), otrzymujemy

$$f(x, y) = U_1(x, y)(y_1 - g_1(x)) + R_1(x, y_2, ..., y_m) = U_1(x, y)(y_1 - g_1(x)) +$$
$$+ U_2(x, y_2, ..., y_m)(y_2 - g_2(x)) + R_2(x, y_3, ..., y_m) = U_1(x, y)(y_1 - g_1(x)) +$$
$$+ U_2(x, y_2, ..., y_m)(y_2 - g_2(x)) + ... + U_m(x, y_m)(y_m - g_m(x)) + R_m(x),$$

gdzie $U_1, ..., U_m, R_1, ..., R_m \in K\langle x, y\rangle$ i $R_m(x) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$. Podstawiając $g(x)$ w miejsce y, otrzymujemy $f(x, g(x)) = R_m(x) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$.

Ad.3) Dowód prowadzimy przez indukcję ze względu na m. Jeśli $m = 1$, to mamy tylko jedno równanie $f_1(x, y_1) = 0$ takie, że $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \not\equiv 0 \bmod (x, y)$. Dlatego szereg $f_1(x, y_1)$ zawiera składnik postaci ay_1, gdzie $a \neq 0$. Stosując znów warunek (W3), otrzymujemy:

$$y_1 = U(x, y_1) f_1(x, y_1) + R_0(x), \tag{1}$$

gdzie $U \in K\langle x, y_1\rangle$, $R_0(x) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$. Zastępując y_1 przez $R_0(x)$, mamy:

$$U(x, R_0(x)) f_1(x, R_0(x)) = 0.$$

Różniczkując równość (1), otrzymujemy

$$1 = \frac{\partial U}{\partial y_1}(x, y_1) f_1(x, y_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(x, y_1) U(x, y_1).$$

Z założenia $f_1(0,0) = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0,0) \neq 0$, skąd $U(x, y_1)$ jest jednością. Dlatego $f_1(x, R_0)(x) = 0$, co kończy dowód przypadku $m = 1$.

Załóżmy teraz, że twierdzenie zachodzi w przypadku $m-1$ równań. Bez straty ogólności możemy założyć, że macierz Jacobiego $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m}$ jest macierzą trójkątną modulo (x, y), a więc $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \not\equiv 0 \bmod (x, y)$ i $\frac{\partial f_i}{\partial y_1} \equiv 0 \bmod (x, y)$ dla $i = 2, ..., m$. Wtedy istnieje szereg $y_1(x, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{K}\langle x, y_2, ..., y_m\rangle$, taki, że:

$$f_1(x, y_1(x, y_2, ..., y_m), y_2, ..., y_m) = 0.$$

Stosujemy teraz założenie indukcyjne do układu $m-1$ równań

$$f_i(x, y_1(x, y_2, ..., y_m), y_2, ..., y_m) = 0, \quad i = 2, 3, .., m,$$

którego jakobian jest postaci:

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_j}\right)_{i,j=2,\ldots,m} \equiv \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=2,\ldots,m} \not\equiv 0 \bmod (x, y).$$

Wtedy na mocy założenia indukcyjnego istnieją $y_2(x), ..., y_m(x) \in (x)\,\mathbb{K}\langle x\rangle$ takie, że

$$f_i(x, y_1(x, y_2(x), ..., y_m(x)), y_2(x), ..., y_m(x)) = 0, \quad i = 2, ..., m,$$

co było do okazania.

Ad.4) Załóżmy, że x_n dzieli $g(x) \in K\langle x\rangle$ w $K[[x]]$. Stosując własność (W3), otrzymujemy $g(x) = x_n Q(x) + R(x_1, ..., x_{n-1})$, gdzie $Q(x) \in K\langle x\rangle$. Ponieważ $g(x) = x_n q(x)$, gdzie $q(x) \in K[[x]]$, więc $g(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = 0$. Dlatego $R(x_1, ..., x_{n-1}) = 0$, co daje podzielność w $K\langle x\rangle$.

Ad.5) Można przyjąć, że $i = 1$. Dzięki własności 2), $f(x_1 + h, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}\langle x, h\rangle$. Stosując (W3) do $f = h^2$, otrzymujemy

$$f(x_1 + h, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) = U(x, h)h^2 + R_1(x)h + R_0(x),$$

gdzie $U \in \mathbb{K}\langle x, h\rangle$ oraz $R_0(x),\ R_1(x) \in \mathbb{K}\langle x\rangle$. Ponieważ $R_0(x) = 0$, więc

$$R_1(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \in \mathbb{K}\langle x\rangle,$$

co było do okazania.

Ad.6) Dowód przez indukcję ze względu na n. Dla $n = 0$, $\mathcal{W}_0 = \mathbb{K}$, więc twierdzenie jest trywialne. Niech $n > 0$; załóżmy, że $\mathcal{W}_{n-1} = \mathbb{K}\langle x_1, ..., x_{n-1}\rangle$ jest pierścieniem noetherowskim. Wtedy oczywiście pierścień $\mathcal{W}_{n-1}[x_n]$ jest noetherowski. Dalej, niech $I \neq 0$ będzie dowolnym ideałem pierścienia $\mathbb{K}\langle x\rangle$. Udowodnimy, że I jest skończenie generowany. Stosując liniową zmianę zmiennych, można przyjąć, że I zawiera element g regularny względem zmiennej x_n. Fakt ten wynika z Lematu 1.1.

Oczywiście wystarczy wykazać, że ideał

$$I/g\,\mathbb{K}\langle x\rangle \subset \mathbb{K}\langle x\rangle/g\,\mathbb{K}\langle x\rangle$$

jest skończenie generowany. Dzięki warunkowi (W3), ideał $I/g\,\mathbb{K}\langle x\rangle$ jest obrazem ideału $I \cap \mathbb{K}\langle x_1, ..., x_{n-1}\rangle[x_n]$ poprzez kanoniczny epimorfizm pierścieni:

$$\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n] \longrightarrow \mathbb{K}\langle x\rangle/g\mathbb{K}\langle x\rangle.$$

Ale z założenia indukcyjnego wynika, że ideał $I \cap \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n]$ jest skończenie generowany, a stąd takim jest też ideał $I/g\,\mathbb{K}\langle x\rangle$, co kończy dowód.

Fakt, że zbieżne rzeczywiste systemy Weierstrassa $\mathcal{W}$ są zamknięte ze względu na złożenie, na branie funkcji uwikłanej (lub, równoważnie, funkcji odwrotnej) i na wydzielanie przez współrzędną (co implikuje zamkniętość ze względu na różniczkowanie) oznacza, że spełniają aksjomaty nakładane na tzw. systemy quasi-analityczne. W geometrii wyznaczonej przez takie systemy mamy więc do dyspozycji — jak wykazali Bierstone–Milman [9] — pewne algorytmy desingularyzacyjne, a w tym tramsformację do przecięć normalnych. Dysponujemy zatem transformacją funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych do przecięć normalnych poprzez rozdmuchania wzdłuż gładkich podrozmaitości $\mathcal{W}$-analitycznych (definicja $\mathcal{W}$-analityczności podana jest w Rozdziale 2). Jest to dla nas szczególnie ważne, gdyż umożliwia rozwinięcie techniki rektylinearyzacji funkcji definiowalnych przez systemy Weierstrassa, którą przedstawiam w Rozdziale 3 rozprawy.

Zauważmy na koniec, że pierścienie $\mathbb{K}\langle x\rangle$ są henselowskie i doskonałe (w sensie Grothendiecka), a zatem mają własność aproksymacyjną Artina.

Rozdział 2. Struktury generowane przez systemy Weierstrassa. Eliminacja kwantyfikatorów. Opis funkcji definiowalnych przez termy

Niech $\mathcal{W}$ będzie zbieżnym systemem Weierstrassa nad $\mathbb{R}$. W rozdziale tym przedstawię wzbogacenie $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$ ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ o zawężone funkcje $\mathcal{W}$-analityczne, które jest wielomianowo ograniczoną strukturą o-minimalną. Głównym celem jest podanie dowodu eliminacji kwantyfikatorów dla tej struktury w języku wzbogaconym o nazwę funkcji odwrotnej $1/x$. Rezultat ten jest uogólnieniem twierdzenia Denefa–van den Driesa [12], chociaż przedstawiony tu jego dowód jest zainspirowany artykułami K.J. Nowaka [31], w których podejście teorio-modelowe bazuje na teście Robinsona dla modelowej zupełności. Mój dowód wykorzystuje jednak pewne teorio-modelowe kryterium eliminacji kwantyfikatorów, które pozwala na jej uzyskanie w bezpośredni sposób.

Struktura $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$ posiada aksjomatykę uniwersalną w języku wzbogaconym o nazwy funkcji odwrotnej $1/x$ i pierwiastków $\sqrt[n]{x}$, $n > 1$. Rezultat ten jest uogólnieniem twierdzenia van den Driesa–Macintyre'a–Markera [14]; dla dowodu zob. także artykuł K.J. Nowaka [31]. Jego dowód, wykorzystujący eliminację kwantyfikatorów, przenosi się praktycznie bez zmian na przypadek zawężonych funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych. Rezultat ten jest bardzo ważny również i z tego powodu, że w strukturze, która dopuszcza eliminację kwantyfikatorów i posiada aksjomatykę uniwersalną, funkcje definiowalne są opisane przez termy (twierdzenie Herbranda [23]), a to z kolei, pozwala na prowadzenie indukcji ze względu na złożoność termów. Fakt ten może być użyty do uzyskania rektylinearyzacji funkcji definiowalnych, o czym będzie traktował Rozdział 3 tej rozprawy. Przejdę teraz do przypomnienia podstawowych pojęć teorio-modelowych.

Będziemy zajmować się językami i strukturami pierwszego rzędu. Język $\mathcal{L}$ składa się z symboli logicznych, tzn.: $\vee$, $\wedge$, $\neg$ $\forall$, $\exists$, $=$, przeliczalnej ilości symboli zmiennych: x, y, z, x_1, $x_2, \ldots$, symboli pomocniczych (nawiasy, przecinki), oraz sygnatury, czyli: symboli stałych $c \in C$, symboli funkcji $f \in F$, symboli relacyjnych $r \in R$. Język pierwszego rzędu jest wyznaczony przez wskazanie jego sygnatury.

Niech $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_m)$, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definicja. *1) Strukturą $\mathcal{M}$ języka $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-strukturą) nazywamy układ*

$$\mathcal{M} = \left(M, \{f^{\mathcal{M}}\}_{f \in F}, \{c^{\mathcal{M}}\}_{c \in C}, \{r^{\mathcal{M}}\}_{r \in R}\right),$$

gdzie:

a) M jest zbiorem niepustym zwanym uniwersum struktury,

b) każdemu symbolowi f ze zbioru symboli funkcyjnych F przypisujemy funkcję $f^{\mathcal{M}} : M^{\sigma(f)} \longrightarrow M$, zwaną interpretacją symbolu f w $\mathcal{M}$,

c) każdemu symbolowi c ze zbioru symboli stałych C przypisujemy stałą struktury $c^{\mathcal{M}} \in M$, zwaną interpretacją symbolu c w $\mathcal{M}$,

d) każdemu symbolowi r ze zbioru symboli relacyjnych R przypisujemy relację $r^{\mathcal{M}} \subset M^{\sigma(r)}$, zwaną interpretacją symbolu r w $\mathcal{M}$.

2) Mówimy, że struktura $\mathcal{M}$ dopuszcza eliminację kwantyfikatorów w języku $\mathcal{L}$, gdy dla każdej $\mathcal{L}$-formuły $\phi(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $n \geqslant 1$, istnieje bezkwantyfikatorowa $\mathcal{L}$-formuła $\psi(x)$, taka, że:

$$\mathcal{M} \models \forall x \; [\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x)].$$

3) $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{M}$ jest modelowo zupełna, jeśli dla każdej $\mathcal{L}$-formuły $\phi(x)$ istnieje egzystencjalna $\mathcal{L}$-formula $\psi(x)$ taka, że:

$$\mathcal{M} \models \forall x \; [\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x)].$$

4) $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{M}$ jest silnie modelowo zupełna, jeśli dla każdej $\mathcal{L}$-formuły $\phi(x)$ istnieje bezkwantyfikatorowa $\mathcal{L}$-formuła $\psi(x, y)$ taka, że:

$$\mathcal{M} \models \forall x \; [\phi(x) \Leftrightarrow \exists y \; \psi(x,y)] \quad i \quad \mathcal{M} \models \forall x \; [\exists y \; \psi(x,y) \Rightarrow \exists! y \; \psi(x,y)].$$

5) Zbiór $A \subset M^n$ jest silnie definiowalny w $\mathcal{M}$, jeśli istnieje bezkwantyfikatorowa $\mathcal{L}$-formuła $\psi(x, y)$ taka, że:

$$A = \{a \in M^n : \; \mathcal{M} \models \exists! \, y : \; \psi(a, y)\},$$

gdzie $\exists! \, y$ oznacza, że istnieje dokładnie jeden y.

6) Niech $D \subset M^n$. Odwzorowanie $f : D \longrightarrow M^m$ nazwiemy silnie definiowalnym w $\mathcal{M}$, jeśli jego wykres $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : \; x \in D\} \subset M^{n+m}$ oraz dopełnienie dziedziny $M^n \backslash D$ są silnie definiowalne w $\mathcal{M}$.

Obserwacja 1. Jeżeli odwzorowanie f jest silnie definiowalne w $\mathcal{M}$, to również dziedzina $D \subset M^n$ oraz $M^{n+m} \backslash \Gamma(f)$ są silnie definiowalne w $\mathcal{M}$.

Istotnie, silna definiowalność dziedziny wynika z formuły:

$$x \in D \Leftrightarrow \exists\, y\ (x, y) \in \Gamma(f) \Leftrightarrow \exists!\, y\ (x, y) \in \Gamma(f).$$

Dopełnienie wykresu opisuje formuła:

$$(x, y) \notin \Gamma(f) \Leftrightarrow (x \in M^n \backslash D) \text{ lub } \exists z :\ [(x, z) \in \Gamma(f) \wedge z \neq y].$$

Korzystając z silnej definiowalności przeciwdziedziny widzimy, że również dopełnienie wykresu jest silnie definiowalne w $\mathcal{M}$.

Łatwo wykazać poniższe własności, które będą wykorzystywane w dalszym ciągu rozdziału.

Własności. *1) Funkcja $x \longrightarrow t(x) : M^n \longrightarrow M$ zadana przez $\mathcal{L}$-term $t(x)$ jest silnie definiowalna w $\mathcal{M}$.*

2) Niech $D \subset M^n$, $f_1, ..., f_m : D \longrightarrow M$ oraz $f = (f_1, ..., f_m)$, $m > 0$. Wtedy:
f jest silnie definiowalna w $\mathcal{M} \Leftrightarrow f_1, ..., f_m$ są silnie definiowalne w $\mathcal{M}$.

3) Niech $D \subset M^n$, $f : D \longrightarrow M^m$ silnie definiowalna w $\mathcal{M}$. Niech $1 \leqslant i(1), ..., i(n) \leqslant k$. Definiujemy $D^* \subset M^k$ oraz $f^* : D^* \longrightarrow M^m$ w następujący sposób:

$$(x_1, ..., x_k) \in D^* \Leftrightarrow (x_{i(1)}, ..., x_{i(n)}) \in D,$$

$$f^*(x_1, ..., x_k) = f(x_{i(1)}, ..., x_{i(n)}).$$

Wtedy f^* jest silnie definiowalna w $\mathcal{M}$.

4) Niech $D \subset M^n$, $f : D \longrightarrow M^m$, $E \subset M^k$, $g : E \longrightarrow M^n$ silnie definiowalne w $\mathcal{M}$. Niech $E^* = \{x \in E :\ g(x) \in D\}$. Definiujemy $h : E^* \longrightarrow M^m$ jako $h(x) = f(g(x))$. Wtedy h jest silnie definiowalna w $\mathcal{M}$.

5a) Niech $(f_\lambda)_\lambda$ będzie rodziną odwzorowań $f_\lambda : D_\lambda \longrightarrow M^{m(\lambda)}$, $D_\lambda \subset M^{n(\lambda)}$ silnie definiowalnych w $\mathcal{M}$. Niech $\mathcal{M}^*$ oznacza strukturę $\mathcal{M}$ wzbogaconą o wykresy $(\Gamma(f_\lambda))_\lambda$ oraz dziedziny $(D_\lambda)_\lambda$ jako nowe relacje.
Wtedy każde odwzorowanie $f : D \longrightarrow M^m$, $D \subset M^n$, które jest silnie definiowalne w $\mathcal{M}^*$, jest silnie definiowalne w $\mathcal{M}$.

5b) Niech $(f_\lambda)_\lambda$ będzie rodziną odwzorowań $f_\lambda : D_\lambda \longrightarrow M^{m(\lambda)}$, $D_\lambda \subset M^{n(\lambda)}$ silnie definiowalnych w $\mathcal{M}$. Niech $\mathcal{M}^*$ oznacza strukturę $\mathcal{M}$ wzbogaconą o nowe funkcje globalne $\left(\widetilde{f_\lambda}\right)_\lambda$ oraz nowe relacje podstawowe $(D_\lambda)_\lambda$, gdzie:

$$\widetilde{f_\lambda} = \begin{cases} f_\lambda(x) & gdy \quad x \in D_\lambda \\ 0 & gdy \quad x \in M^{n(\lambda)} \setminus D_\lambda \end{cases}.$$

Wtedy każde odwzorowanie $f : D \longrightarrow M^m$, które jest silnie definiowalne w $\mathcal{M}^*$, jest silnie definiowalne w $\mathcal{M}$.

Kluczowym narzędziem wykorzystywanym w niniejszym rozdziale będzie kryterium eliminacji kwantyfikatorów, którego dowód można znaleźć na przykład w pracy K.J. Nowaka [30] lub A. Piękosza [38].

Kryterium eliminacji kwantyfikatorów. *Niech T będzie teorią w języku $\mathcal{L}$. Teoria T dopuszcza eliminację kwantyfikatorów wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych modeli $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ teorii T, ich wspólnej podstruktury $\mathcal{A}$, formuły bezkwantyfikatorowej $\phi(x_1, ..., x_n, y)$ oraz $(a_1, ..., a_n) \in A^n$, zachodzi implikacja:*

$$\exists\, b \in M \;\; \mathcal{M} \models \phi(a_1, ..., a_n, b) \Rightarrow \exists\, c \in N \;\; \mathcal{N} \models \phi(a_1, ..., a_n, c).$$

Uwaga. W kryterium eliminacji kwantyfiaktorów można ograniczyć się do formuł prymitywnych, tzn. formuł będących koniunkcją formuł atomicznych lub ich zaprzeczeń. Istotnie, każda formuła bezkwantyfikatorowa da się zapisać jako skończona alternatywa formuł prymitywnych. Ponadto kwantyfikator egzystencjalny jest rozdzielny względem skończonej alternatywy.

W dowodzie eliminacji kwantyfikatorów będziemy potrzebowali następującego lematu.

Lemat Redukcyjny. *Niech $f(x, y) \in \mathcal{W}_{n+m}$, gdzie $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_m)$. Wtedy istnieje liczba całkowita $d > 0$ oraz szeregi $v_\alpha(x) \in \mathcal{W}_n$, $u_\alpha(x, y) \in \mathcal{W}_{n+m}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^m$, $|\alpha| < d$) takie, że $u_\alpha(0, 0) \neq 0$ oraz*

$$f(x, y) = \sum_{|\alpha|<d} v_\alpha(x) y^\alpha u_\alpha(x, y).$$

Prowadzimy dowód indukcyjny ze względu na m. Przypadek $m = 1$. Niech

$$f(x, y_1) = \sum_{j \in \mathbb{N}} v_j(x) y_1^j.$$

Kładąc $f(x, 0) = v_0(x) \in \mathcal{W}_n$ otrzymujemy $f(x, y_1) - v_0(x) \in \mathcal{W}_{n+1}$ oraz $f(x, y_1) - v_0(x) = y_1 f_1(x, y_1)$, przy czym $f_1(x, y_1) \in \mathcal{W}_{n+1}$. Analogicznie dla szeregu $f_1(x, y_1)$. $f_1(x, 0) = v_1(x) \in \mathcal{W}_n,\ f_1(x, y_1) - v_1(x) = y_1 f_2(x, y_1)$, dla $f_2(x, y_1) \in \mathcal{W}_{n+1}$. Powtarzając procedurę dla kolejnych $f_j(x, y_1)$ dostajemy szeregi $v_j(x) \in \mathcal{W}_n,\ \ j \in \mathbb{N}$.

Ponieważ $\mathcal{W}_n$ jest pierścieniem noetherowskim, ideał generowany przez $v_j(x),\ \ j \in \mathbb{N}$ posiada skończoną liczbę generatorów $v_j(x),\ \ j < d$, dla pewnego $d \in \mathbb{N}$. Dlatego dla $j \geqslant d$ możemy zapisać:

$$v_j(x) = \sum_{i<d} b_{ij}(x) v_i(x), \quad b_{ij}(x) \in \mathcal{W}_n.$$

Uwzględniając powyższe otrzymujemy:

$$f(x, y_1) = \sum_{i<d} (v_i(x) y_1^i + \sum_{j \geqslant d} b_{ij}(x) v_j(x) y_1^j) = \sum_{i<d} v_i(x) y_1^i (1 + g_i(x, y_1) y_1),$$

gdzie $g_i(x, y_1) = \sum_{j \geqslant d} b_{ij}(x) y_1^{j-i-1} \in K[[x, y_1]],\ \ i = 0, ..., d-1$.

Rozważmy teraz równanie liniowe

$$f(x, y_1) = \sum_{i<d} v_i(x) y_1^i (1 + Z_i y_1) \tag{2}$$

z niewiadomymi $Z_1, ..., Z_{d-1}$ i współczynnikami z $\mathcal{W}_{n+m}$. Równanie to posiada rozwiązanie $g_i(x, y_1) \in K[[x, y_1]],\ \ i = 0, ..., d-1$. Ponieważ uzupełnienie $\mathbb{K}[[x, y_1]]$ jest modułem wiernie płaskim nad $\mathcal{W}_{n+1}$, równanie (2) posiada pewne rozwiązanie $\widetilde{g}_i(x, y_1) \in \mathcal{W}_{n+1},\ \ i = 0, ..., d-1$.
Ponieważ $y_1 \widetilde{g}_i(x, y_1)$ należą do ideału maksymalnego pierścienia $\mathcal{W}_{n+1}$, zatem $u_i(x, y_1) := 1 + y_1 \widetilde{g}_i(x, y_1)$, co kończy dowód przypadku gdy $m = 1$.

Gdy $m > 1$, wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$y' = (y_2, ..., y_m), \quad \alpha = (\alpha_2, ..., \alpha_m) \in \mathbb{N}^{m-1}.$$

Stosując założenie indukcyjne do $f(x, y_1, y')$ otrzymujemy

$$f(x, y_1, y') = \sum_{|\alpha|<e} v_\alpha(x, y_1) y'^\alpha u_\alpha(x, y_1, y'),$$

gdzie $v_\alpha(x,y_1) \in \mathcal{W}_{n+1}$, $u_\alpha(x,y_1,y')$ jest jednością w $\mathcal{W}_{n+m}$. Stosując teraz do funkcji $v_\alpha(x,y_1)$, $\alpha \in \mathbb{N}^{m-1}$, rozumowanie analogiczne jak w pierwszym kroku indukcyjnym, otrzymujemy

$$v_\alpha(x,y_1) = \sum_{i<e} v_{i\alpha}(x) y_1^i u_{i\alpha}(x,y_1),$$

gdzie $v_{i\alpha}(x) \in \mathcal{W}_n$, $u_{i\alpha}(x,y_1)$ jest jednością w $\mathcal{W}_{n+1}$. Łącząc powyższe rezultaty, otrzymujemy tezę.

Definicja. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Funkcję $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy $\mathcal{W}$-analityczną w U, gdy w każdym punkcie $a \in U$ szereg Taylora $T_a f(x-a) \in \mathcal{W}_n$.

Dla funkcji $\mathcal{W}$-analitycznej f w otoczeniu kostki $[-1;1]^n$ definiujemy zawężoną funkcję $\mathcal{W}$-analityczną $\widetilde{f}(x)$ jako

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{gdy} \quad x \in [-1;1]^n \\ 0 & \text{gdy} \quad x \notin [-1;1]^n \end{cases}.$$

W dalszym ciągu, przez $\mathcal{L}_\mathcal{W}$ będziemy oznaczali język pierścieni uporządkowanych $(<,+,-,\cdot,0,1)$ wzbogacony o symbole funkcyjne $f^\&$, gdzie f są funkcjami $\mathcal{W}$-analitycznymi w otoczeniu kostki $[-1;1]^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definiujemy $\mathcal{L}_\mathcal{W}$-strukturę

$$\mathbb{R}_\mathcal{W} := (\mathbb{R},<,0,1,+,-,\cdot),$$

w której symbole funkcyjne $f^\&$ są interpretowane jako zawężone funkcje $\mathcal{W}$-analityczne $\widetilde{f}$; oczywiście możemy przyjąć, że każda liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$ ma swoją nazwę c_a w języku $\mathcal{L}_\mathcal{W}$.

Głównym rezultatem niniejszego rozdziału jest następujące

Twierdzenie o eliminacji kwantyfikatorów. *Struktura $\mathbb{R}_\mathcal{W}$ posiada eliminację kwantyfikatorów w języku $\mathcal{L}_\mathcal{W}^* = \mathcal{L}_\mathcal{W} \cup \{\frac{1}{x}\}$ wzbogaconym o nazwę funkcji odwrotnej:*

$$1/x := \begin{cases} 1/x & \textit{gdy} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{gdy} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Zanim przejdziemy do jego dowodu przedstawimy kilka kluczowych obserwacji.

Obserwacja 2. Każdy skończony układ równań i nierówności

$$\begin{cases} t_i(x) = 0, & i = 1, ..., r \\ \tau_j(x) > 0, & j = 1, ..., s \end{cases}$$

zadanych przez $\mathcal{L}$-termy może być, poprzez dodadnie nowych zmiennych i równań, zastąpiony w równoważny sposób przez pewien układ równań i nierówności wielomianowych lub postaci $\widetilde{f}(x, y) = 0$, $\widetilde{g}(x, y) > 0$, gdzie f, g są funkcjami $\mathcal{W}$-analitycznymi w otoczeniu kostki $[-1; 1]^n$.

Rezultat ten uzyskamy przeprowadzając indukcję ze względu na złożoność termów. Zauważmy, że jeśli złożony $\mathcal{L}$-term $t(x)$ jest postaci $\widetilde{f}(t_1(x), t_2(x))$, to równanie $t(x) = 0$ może być w równoważny sposób zastąpione układem równań:

$$\begin{cases} \widetilde{f}(y_1, y_2) = 0 \\ y_1 - t_1(x) = 0 \\ y_2 - t_2(x) = 0, \end{cases}$$

gdzie y_1, y_2 są nowymi zmiennymi. Jeśli zaś złożony $\mathcal{L}$-term jest postaci $t(x) = \frac{1}{\tau(x)}$, to równanie $t(x) = 0$ może być zastąpione równaniem $\tau(x) = 0$. Podobnie możemy postąpić z nierównościami.

Obserwacja 3. Jeśli $f(x)$ jest funkcją $\mathcal{W}$-analityczną w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}^n$, powiedzmy w otoczeniu kostki domkniętej

$$\overline{K}(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x_i - a_i| \leqslant \epsilon, \ i = 1, ..., n, \ \epsilon > 0\},$$

to restrykcja $f|_{\overline{K}(a,\epsilon)}$ może być wyrażona przez $\mathcal{L}$-term.

Istotnie, jeśli

$$L_{a,\epsilon} : \mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow a + \epsilon x \in \mathbb{R}^n,$$

to $\widetilde{g} := f \circ L_{a,\epsilon}$ jest funkcją $\mathcal{W}$-analityczną w otoczeniu kostki I^n oraz zachodzi wzór

$$f(x) = \widetilde{g}(L_{a,\epsilon}^{-1}(x)) = \widetilde{g}\left(\frac{x - a}{\epsilon}\right) \text{ dla } x \in \overline{K}(a, \epsilon).$$

Zawsze zatem możemy zastępować kiełki funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych $f(x)$ przez $\mathcal{L}$-termy postaci $(\widetilde{g} \circ L)(x) = \widetilde{g}(L(x))$, gdzie L jest izomorfizmem afinicznym postaci

$$L(x) = \frac{x - a}{\epsilon}, \ \epsilon > 0.$$

Dlatego możemy operować kiełkami funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych nie tylko w modelu standardowym $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$, ale także w modelach niestandardowych teorii $T = \mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\mathcal{W}})$ struktury $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$. W modelach niestandardowych będziemy analizowali układy równań i nierówności zadane przez termy, które – jak widzieliśmy – można sprowadzić do układu równań i nierówności, których lewe strony są wielomianami lub kiełkami funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych. Oczywiście zawsze możemy założyć, że rozwiązania, które istotnie występują jako argumenty funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych są ograniczone (względem $\mathbb{R}$). Dlatego, dokonując ewentualnej translacji, zawsze możemy doprowadzić do sytuacji, w której rozwiązania te są infinitezymalnymi. Opiszmy tę procedurę dokładniej.

Załóżmy, że funkcje $f(x),\ x = (x_1, ..., x_n)$, występujące w danym układzie są $\mathcal{W}$-analityczne w otoczeniu pewnej kostki $[-\epsilon; \epsilon]^n$, oraz że analizowane rozwiązania są infinitezymalnymi. Wtedy możemy dodać do układu nierówności postaci

$$|x_i| < \epsilon,\ i = 1, ..., n.$$

Odtąd będziemy zawsze zakładać, bez uprzedniego komentarza, że rozważane przez nas układy równań i nierówności zawierają nierówności definiujące kostki, w których określone są występujące w nich funkcje $\mathcal{W}$-analityczne.

W dalszym ciągu rozdziału będziemy wykorzystywać twierdzenia Weierstrassa: przygotowawcze i o dzieleniu, oraz lemat redukcyjny, stosując je do kiełków funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych. Dokładniej, bedziemy je stosować do funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych, które występują po lewych stronach analizowanych równań i nierówności. Dla przykładu, jeśli analizujemy rozwiązania równania bądź nierówności

$$\widetilde{f}(x, y) = 0,\ \ (\widetilde{f}(x, y) < 0),$$

gdzie $x = (x_1, ..., x_n)$ i $\widetilde{f}$ jest funkcją $\mathcal{W}$-analityczną, $y-$regularną stopnia d w pewnym punkcie $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, to

$$\widetilde{f}(x, y) = ((y - b)^d + f_1(x)(y - b)^{d-1} + ... + f_d(x))u(x, y),$$

gdzie $f_1(x), ..., f_d(x),\ u(x, y)$ są funkcjami $\mathcal{W}$-analitycznymi w otoczeniu (a, b), powiedzmy w otoczeniu kostki $\overline{K}((a, b), \epsilon)$, oraz $u(a, b) \neq 0$.
Niech

$$L(x, y) := (a + \epsilon x, b + \epsilon y).$$

Wtedy $\widetilde{g}_i := f_i(a+\epsilon x)$, $\widetilde{v} := u \circ L$ są funkcjami $\mathcal{W}$-analitycznymi w otoczeniu kostki I^{n+1} oraz

$$\widetilde{f} \circ L(x, y) = ((\epsilon y)^d + \widetilde{g}_1(x)(\epsilon y)^{d-1} + ... + \widetilde{g}_d(x))\widetilde{v}(x, y)$$

i $\quad (\widetilde{f} \circ L)(L^{-1}(x,y)) =$

$$= ((y-b)^d + \widetilde{g}_1(L^{-1}(x,y))(y-b)^{d-1} + ... + \widetilde{g}_d(L^{-1}(x,y)))\widetilde{v}(x, L^{-1}(x,y)),$$

dla $(x,y) \in \overline{K}((a,b),\epsilon)$.

Powyższa równość $\mathcal{L}$-termów zachodzi zarówno w $\mathbb{R}$, jak i w modelach niestandardowych.
Równanie $\widetilde{f}(x,y) = 0$ rozpatrywane w $\overline{K}((a,b),\epsilon)$ jest więc równoważne równaniu:

$$(y-b)^d + \widetilde{g}_1(L^{-1}(x,y))(y-b)^{d-1} + ... + \widetilde{g}_d(L^{-1}(x,y)) = 0$$

rozpatrywanemu w $\overline{K}((a,b),\epsilon)$.
Można to też wyrazić nieco inaczej: równanie $\widetilde{f}(x,y) = 0$ ma rozwiązanie

$$x = c \in \overline{K}(a,\epsilon), \;\; y = d, \;\; |y-b| \leqslant \epsilon$$

wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$(\epsilon y')^d + \widetilde{g}_1(x')(\epsilon y')^{d-1} + ... + \widetilde{g}_d(x') = 0$$

ma rozwiązanie $x' = \frac{c-a}{\epsilon}, \;\; y' = \frac{d-b}{\epsilon}$.

Powyższe rozważania możemy zreasumować następująco:

Obserwacja 4. Analizowane układy równań i nierówności, których prawe strony są zawężonymi funkcjami $\mathcal{W}$-analitycznymi, można przekształcać, stosując wyżej opisaną procedurę wykorzystującą twierdzenia Weierstrassa i lemat redukcyjny. Otrzymujemy przy tym nowy układ obejmujący zawężone funkcje $\mathcal{W}$-analityczne o tej własności, że układ wyjściowy ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy nowy układ ma rozwiązanie postaci $x' = \frac{c-a}{\epsilon}$. W ten sposób, przekształcenia równań i nierówności wykorzystujące twierdzenia Weierstrassa i lemat redukcyjny mogą zostać przeniesione także do modeli niestandardowych. Należy przy tym dołączyć nierówności postaci $|x'| < \delta$, gdzie δ jest tak małe, że twierdzenie Weierstrassa zachodzi w kostce $|x'| < \delta$. Ponieważ modele teorii T są ciałami rzeczywiście domkniętymi, możemy stosować twierdzenie Tarskiego-Seidenberga.

Uwaga. Dla prostoty wypowiedzi w dalszej części rozdziału będziemy operowali kiełkami funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych także w modelach niestandardowych. Procedura ta, choć nie jest w pełni ścisła, jest poprawna w tym sensie, że daje się w pełni sformalizować, jak opisano w powyższych obserwacjach. Formalizacja ta wiązałaby się jednak z wydłużeniem i mniejszą przejrzystością tekstu.

DOWÓD twierdzenia o eliminacji kwantyfikatorów przeprowadzimy w oparciu o przedstawione wcześniej kryterium eliminacji kwantyfiaktorów. Niech $T = \mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\mathcal{W}})$ będzie teorią struktury $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$ w języku wzbogaconym o nazwę funkcji odwrotnej $1/x$. Rozważmy dwa dowolne modele $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ teorii T i ich wspólną podstrukturę $\mathcal{A}$.
Rozważmy układ równań i nierówności postaci:

$$\begin{cases} t_i(x, y_1) = 0, & i = 1, ..., n_1 \\ s_j(x, y_1) > 0, & j = 1, ..., n_2, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie: $x = (x_1, ..., x_n)$, t_i, s_j oznaczają termy w języku $\mathcal{L}^*_{\mathcal{W}}$, będące złożeniem skończonej liczby zawężonych funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych $\widetilde{f}_s$ oraz wielomianów.

Mamy udowodnić, że jeśli układ (3) ma rozwiązanie $x = a \in A^n$ i $y_1 = b_1 \in K$, to ma też rozwiązanie postaci $x = a \in A^n$, $y_1 = c_1 \in M$.
Na mocy Obserwcji 2, dodając nowe zmienne i nowe równania, zamiast układu (3) możemy ograniczyć się do rozważania równań i nierówności złożonych z zawężonych funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych lub wielomianów. A więc układ (3) jest równoważny układowi:

$$\begin{cases} \widetilde{f}_i(x, y) = 0, & i = 1, ..., p_1 \\ \widetilde{F}_j(x, y) < 0, & j = 1, ..., q_1 \\ p_i(x, y) = 0, & i = 1, ..., p_2 \\ P_j(x, y) < 0, & j = 1, ..., q_2, \end{cases} \tag{4}$$

gdzie f_i, F_j są zawężonymi funkcjami $\mathcal{W}$-analitycznymi z języka $\mathcal{L}^*_{\mathcal{W}}$, p_i, P_j to wielomiany, zaś x, y stanowią zespół zmiennych: $x = (x_1, ..., x_n) \in A^n$, $y = (y_1, ..., y_m) \in K^m$.

W tej sytuacji wystarczy udowodnić, że jeśli układ (4) ma rozwiązanie postaci $a \in A^n$, $b = (b_1, ..., b_m) \in K^m$, to posiada również rozwiązanie postaci $a \in A^n$, $d = (d_1, ..., d_m) \in M^m$.

Teraz dowód twierdzenia będzie przebiegał indukcyjnie ze względu na liczbę zmiennych m. Gdy $m = 0$ twierdzenie jest oczywiste.

Weźmy więc $m > 0$ i załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla $m - 1$. Niech $a \in A^n$, $k \in K^m$ będą rozwiązaniami układu (4). Można oczywiście przyjąć, że te elementy spośród $a_1, ..., a_n \in A$ i $b_1, ..., b_m \in K$, które istotnie występują jako argumenty funkcji $\widetilde{f}_i$, $\widetilde{F}_j$, są na moduł mniejsze od jedności. A więc stosując liniową zmianę zmiennych (translację) można założyć, że elementy te są infinitezymalnymi.

Dalej, dzięki Obserwacji 3 i Obserwacji 4, możemy w poniższych rozważaniach operować kiełkami funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych w zerze. Do każdej z funkcji $\widetilde{f}_i(x,y)$, $\widetilde{F}_j(x,y)$ stosujemy lemat redukcyjny:

$$\widetilde{f}_i(x,y) = \sum_{|\alpha|<d_i} v_{i\alpha}(x) y^\alpha u_{i\alpha}(x,y), \quad i = 1, ..., p_1,$$

$$\widetilde{F}_j(x,y) = \sum_{|\alpha|<e_j} V_{j\alpha}(x) y^\alpha U_{j\alpha}(x,y), \quad j = 1, ..., q_1,$$

gdzie $u_{i\alpha}(0,0) \neq 0$, $U_{j\alpha}(0,0) \neq 0$. Możemy również założyć, że dla pewnych wielowskaźników α, $V_{j\alpha}(a) \neq 0$ oraz $v_{i\alpha}(a) \neq 0$.

Dla każdego i, j wybieramy odpowiednio wielowskaźniki β_i i β_j w ten sposób, aby $v_{i\beta_i}(a)$ i $V_{j\beta_j}(a)$ posiadały maksymalną wartość bezwzględną spośród $v_{i\alpha}$, $|\alpha| < d_i$, i $V_{j\alpha}$, $|\alpha| < e_j$, odpowiednio. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\zeta_{i\alpha} := \frac{v^{\mathcal{A}}_{i\alpha}(a)}{v^{\mathcal{A}}_{i\beta_i}(a)}, \quad \zeta_{i\alpha} = c_{i\alpha} + \lambda_{i\alpha},$$

$$\xi_{j\alpha} := \frac{V^{\mathcal{A}}_{j\alpha}(a)}{V^{\mathcal{A}}_{j\beta_j}(a)}, \quad \xi_{j\alpha} = C_{j\alpha} + \Lambda_{j\alpha},$$

gdzie $c_{i\alpha}$, $C_{j\alpha}$ to pewne liczby rzeczywiste, a $\lambda_{i\alpha}$, $\Lambda_{j\alpha}$ – infinitezymalne. Oczywiście liczby $\xi_{j\alpha}$, $\zeta_{i\alpha} \in A$, gdyż funkcje $v_{i\alpha}, V_{j\alpha}$ zależą tylko od x, a język rozważanych struktur posiada symbol funkcji $\frac{1}{x}$.

Wydzielając otrzymane sumy w każdej z funkcji f_i, F_j, otrzymujemy nowy układ równań i nierówności:

$$\begin{cases} \sum_\alpha (c_{i\alpha} + v_{i\alpha}) y^\alpha u_{i\alpha}(x,y) = 0, \quad i = 1, ..., p_1 \\ \sum_\alpha (C_{j\alpha} + V_{j\alpha}) y^\alpha U_{j\alpha}(x,y) < 0, \quad j = 1, ..., q_1 \\ p_i(x,y) = 0, \quad i = 1, ..., p_2 \\ P_j(x,y) < 0, \quad j = 1, ..., q_2 \end{cases}, \tag{5}$$

który ma rozwiązanie $x = a \in A^n$, $v_\alpha = \lambda_\alpha \in A^{p_1}$, $V_\alpha = \Lambda_\alpha \in A^{q_1}$, $b \in K^m$. Nowe zmienne $v_{i\alpha}$, $V_{j\alpha}$ pełnią tutaj taką samą rolę jak zmienne x.

Kładąc $v = (v_{1\alpha}, ..., v_{p_1\alpha})$, $V = (V_{1\alpha}, ..., V_{q_1\alpha})$, wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$h_i(x,v,y) = \sum_\alpha (c_{i\alpha} + v_{i\alpha}) y^\alpha u_{i\alpha}(x,y),$$

$$H_j(x,V,y) = \pm \sum_{\alpha} (C_{j\alpha} + V_{j\alpha}) y^{\alpha} U_{j\alpha}(x,y).$$

Następnym krokiem dowodu będzie zastosowanie twierdzenia Weierstrassa do funkcji h_i, $i = 1, ..., p_1$, oraz H_j, $j = 1, ..., q_1$. Ponieważ $u_{i\alpha}(0,0) \neq 0$ oraz $U_{i\alpha}(0,0) \neq 0$ dla pewnych α, zatem formy początkowe $h(0,0,y)$, $H(0,0,y)$ nie są tożsamościowo równe zero. Na mocy Lematu 1.1, po zastosowaniu liniowej zmiany zmiennych $y = L(y')$, $y_1 = y'_1 + z_1 y'_m, ..., y_{m-1} = y'_{m-1} + z_{m-1} y'_m, y_m = y'_m$, dla generycznych $z_1, ..., z_{m-1} \in \mathbb{R}$, funkcje $h_i \circ L$, $H_j \circ L$ są regularne względem y'_m. Dla prostoty oznaczeń, będziemy opuszczać znak apostrofu nad zmiennymi $y_1, ..., y_m$.
Do tak zmodyfikowanych funkcji stosujemy teraz twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa, z którego wynika, że istnieją funkcje $\mathcal{W}$-analityczne

$$q_i(x,v,y),\ r_i(x,v,y),\ Q_j(x,V,y),\ R_j(x,V,y)$$

takie, że

$$h_i(x,v,y) = q_i(x,v,y) r_i(x,v,y), \ \ i = 1, ..., p_1,$$
$$H_j(x,V,y) = Q_j(x,V,y) R_j(x,V,y), \ \ j = 1, ..., q_1,$$

przy czym $r_i(0,0,0) = 1$, $R_j(0,0,0) = 1$, $Q_j(x,V,y)$ oraz $q_i(x,v,y)$ są wielomianami zmiennej y_m:

$$q_i(x,v,y) = \sum_{s=0}^{d_i} y_m^s w_{is}(x,v,y_1,...,y_{m-1}),$$

$$Q_j(x,V,y) = \sum_{s=0}^{e_j} y_m^s W_{js}(x,V,y_1,...,y_{m-1}).$$

Wtedy układ

$$\begin{cases} q_i(x,v,y) = 0, \ \ i = 1, ..., p_1 \\ Q_j(x,V,y) < 0, \ \ j = 1, ..., q_1 \\ p_i(x,y) = 0, \ \ i = 1, ..., p_2 \\ P_j(x,y) < 0, \ \ j = 1, ..., q_2 \end{cases} \tag{6}$$

ma rozwiązanie $x = a \in A^n$, $v = \lambda_\alpha \in A^{p_1}$, $V = \Lambda_\alpha \in A^{q_1}$, $b \in K^m$, przy czym te elementy spośród a, b, v, V, które istotnie występują jako argumenty funkcji q_i, Q_j są infinitezymalnymi.

Układ (6) jest układem równań i nierówności, które są wielomianowe względem y_m o współczynnikach wielomianowych lub $\mathcal{W}$-analitycznych w zerze (mianowicie w_{is}, W_{js}) względem pozostałych zmiennych. Dlatego, na mocy twierdzenia Tarskiego-Seidenberga stosowanego do wielomianów zmiennej y_m o tych współczynnikach, układ (6) ma rozwiązanie $x = a \in A^n$,

$v = \lambda_\alpha \in A^{p_1}$, $V = \Lambda_\alpha \in A^{q_1}$, $b \in K^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy pewien układ postaci

$$\begin{cases} d_k(x, v, V, y_1, ..., y_{m-1}, (w_{is})_{is}, (W_{js})_{j,s}) = 0, \;\; k = 1, ..., p_3 \\ D_l(x, v, V, y_1, ..., y_{m-1}, (w_{is})_{is}, (W_{js})_{j,s}) < 0, \;\; l = 1, ..., q_3 \end{cases} \tag{7}$$

ma rozwiązanie $x = a \in A^n$, $v = \lambda_\alpha \in A^{p_1}$, $V = \Lambda_\alpha \in A^{q_1}$, $(b_1, ..., b_{m-1}) \in K^{m-1}$; tutaj d_k, D_l są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych zmiennych $x, v, V, y_1, ..., y_{m-1}, (w_{is})_{is}$, gdzie $s = 0, ..., d_1$, $i = 1, ..., p_1$, $(W_{js})_{j,s}$, $s = 0, ..., e_j$, $j = 1, ..., q_1$. Układ (7) jest układem równań i nierówności wielomianowych lub $\mathcal{W}$-analitycznych od zmiennych $x, v, V, y_1, ..., y_{m-1}$.

Ale dzięki założeniu indukcyjnemu układ (7) ma też rozwiązanie $x = a \in A^n$, $v = \lambda_\alpha \in A^{p_1}$, $V = \Lambda_\alpha \in A^{q_1}$, $(y_1, ..., y_{m-1}) = (d_1, ..., d_{m-1}) \in M^{m-1}$. Ponownie na mocy twierdzenia Tarskiego-Seidenberga, układ (7) ma rozwiązanie postaci $x = a \in A^n$, $v = \lambda_\alpha \in A^{p_1}$, $V = \Lambda_\alpha \in A^{q_1}$, $(y_1, ..., y_m) = (d_1, ..., d_m) \in M^m$, co kończy dowód twierdzenia.

Wniosek. *Struktura $\mathbb{R}_\mathcal{W}$ jest silnie modelowo zupełna w języku $\mathcal{L}_\mathcal{W}$.*

Istotnie, z twierdzenia wynika natychmiast, że struktura $\mathbb{R}_\mathcal{W}$ jest silnie modelowo zupełna w języku $\mathcal{L}^*_\mathcal{W}$. Dzięki Własności 5b), silna modelowa zupełność utrzyma się po usunięciu z języka symbolu funkcji odwrotnej $1/x$.

Uwaga. Powyższy wniosek stanowi uogólnienie klasycznego twierdzenia Gabrielova o dopełnieniu dla zbiorów subanalitycznych (cf. [16]).

Struktura $\mathbb{R}_\mathcal{W}$, podobnie jak klasyczna struktura $\mathbb{R}_{an}$, posiada aksjomatykę uniwersalną w języku wzbogaconym o nazwy funkcji odwrotnej $1/x$ i pierwiastków $\sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, \ldots$, przedstawioną poniżej. Rezultat ten jest uogólnieniem twierdzenia van den Driesa–Macintyre'a–Markera [14]; dla dowodu zob. także artykuł K.J. Nowaka [31]. Dowód ten przenosi się praktycznie bez zmian na przypadek zawężonych funkcji $\mathcal{W}$-analitycznych. Opiera się on na eliminacji kwantyfikatorów w języku wzbogaconym o nazwę funkcji odwrotnej $1/x$ oraz na następującym waluacyjnym kryterium rzeczywistej domkniętości ciała z waluacją (cf. [39]):

Rzeczywiste ciało z waluacją jest rzeczywiście domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy jego pierścień waluacji jest henselowski, ciało rezydualne jest rzeczywiście domknięte, a grupa waluacji jest grupą z dzieleniem.

Oto aksjomatyka uniwersalna dla struktury $\mathbb{R}_\mathcal{W}$ z artykułu [31]:

1) $\forall x, y, z \ \ x+(y+z) = (x+y)+z, \ \ x+y = y+x, \ \ 0+x = x, \ \ x+(-x) = 0;$

2) $\forall x, y, z \ \ x\cdot (y+z) = (x\cdot y) + (x\cdot z);$

3) $\forall x, y, z \ \ x\cdot (y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z, \ \ x\cdot y = y\cdot x, \ \ 1\cdot x = x, \ \ 0 \neq 1;$

4) $\forall x \ \ x \neq 0 \ \Rightarrow \ x \cdot 1/x = 1;$

5) $\forall x, y, z \ \ x \leqslant x, \ \ (x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant z) \ \Rightarrow \ x \leqslant z;$

6) $\forall x, y \ \ (x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant x) \ \Rightarrow \ x = y, \ \ x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x;$

7) $\forall x, y, z \ \ x \leqslant y \ \Rightarrow \ (x + z \leqslant y + z), \ \ (x \leqslant y \ \wedge 0 \ \leqslant z) \ \Rightarrow \ x\cdot z \leqslant y\cdot z;$

8) $\forall x \ 0 \leqslant x \ \Rightarrow \ (\sqrt[n]{x})^n = x, \ \ (n = 1, 2, ...);$

oraz następujące schematy aksjomatów:

9) $\bigvee_{i=1}^{n} |x_i| > 1 \ \Rightarrow \ 0^{\&}(x) = 1^{\&}(x) = X_k^{\&}(x) = f^{\&}(x) = 0;$

10) $\bigwedge_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant 1 \ \Rightarrow \ 0^{\&}(x) = 0 \wedge 1^{\&}(x) = 1 \wedge X_k^{\&}(x) = x_k;$

11) $(f+g)^{\&} = f^{\&} + g^{\&};$

12) $(f\cdot g)^{\&} = f^{\&}\cdot g^{\&};$

13) $\bigwedge_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant 1 \ \wedge \ \bigwedge_{i=j}^{m} |L_j(x)| \leqslant 1 \ \Rightarrow \ g^{\&}(x) = f^{\&}(L^{\&}(x));$

gdzie f, g są $\mathcal{W}$-analityczne w otoczeniu $[-1;1]^n$, zaś $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem afinicznym takim, że $g = f \circ L$ w otoczeniu kostki $[-1;1]^n$.

Niech $T = \mathrm{Th}\,(\mathbb{R}_{\mathcal{W}})$ będzie teraz teorią struktury $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$ w języku wzbogaconym o nazwy funkcji odwrotnej $1/x$ i pierwiastków $\sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, \ldots$. T jest więc teorią uniwersalną, która dopuszcza eliminację kwantyfikatorów. Teorie takie są szczególnie ważne z uwagi na następujące twierdzenie Herbranda [23]:

Twierdzenie o opisie funkcji przez termy. *Niech T będzie teorią uniwersalną w języku $\mathcal{L}$. Niech $\phi(x_1, ..., x_n, y)$ będzie bezkwantyfikatorową $\mathcal{L}$-formułą. Jeśli*

$$T \models \forall x_1 ... \forall x_n \ \exists y \ \phi(x_1, ..., x_n, y),$$

wtedy istnieje skończona liczba $\mathcal{L}$-termów $t_1(x), ..., t_k(x)$ takich, że

$$T \models \forall x_1 ... \forall x_n \ \phi(x_1, ..., x_n, t_1(x)) \ \vee ... \vee \ \phi(x_1, ..., x_n, t_k(x)).$$

Dla dowodu, dodajmy do języka $\mathcal{L}$ nowe stałe $c = (c_1, ..., c_n)$. W dowolnym modelu $\mathcal{M}$ teorii T w języku $\mathcal{L}_c := \mathcal{L} \cup \{c_1, ..., c_n\}$, zachodzi $\mathcal{M} \models \exists y \ \psi(c, y)$. Chcemy wykazać, że istnieje skończona liczba $\mathcal{L}-$termów taka, że

$$\mathcal{M} \models \psi(c, t_1(c)) \vee ... \vee \psi(c, t_k(c)),$$

dla dowolnego $\mathcal{M}$. W tym celu rozważmy podstrukturę generowaną przez stałe $c_1, ..., c_n$:

$$\langle c_1^{\mathcal{M}}, ..., c_n^{\mathcal{M}} \rangle = \{(t^{\mathcal{M}}(c_1^{\mathcal{M}}, ..., c_n^{\mathcal{M}})) : \quad t(x) \ \text{ dowolny } \mathcal{L}\text{-term}\}.$$

Ponieważ teoria T jest uniwersalna, więc podstruktura $\langle c_1^{\mathcal{M}}, ..., c_n^{\mathcal{M}} \rangle$ jest jej modelem. Zatem dla dowolnego modelu $\mathcal{M}$ teorii T w języku $\mathcal{L}_c$ istnieje $\mathcal{L}$-term $t(x)$ taki, że $\mathcal{M} \models \psi(c, t(c))$. Dzięki teorio-modelowej zwartości, istnieje skończona liczba $\mathcal{L}$-termów $t_1(x), ..., t_k(x)$ takich, że

$$\mathcal{M} \models \psi(c, t_1(c)) \vee ... \vee \psi(c, t_k(c)),$$

dla dowolnego $\mathcal{M}$, co było do okazania.

Jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy:

Wniosek. *Niech T będzie uniwersalną teorią w języku $\mathcal{L}$, która dopuszcza eliminację kwantyfikatorów. Wtedy dla dowolnej funkcji definiowalnej $f(x_1, ..., x_n)$ istnieje skończona liczba $\mathcal{L}$-termów $t_1(x), ..., t_k(x)$ takich, że w dowolnym modelu $\mathcal{M}$ teorii T*

$$\mathcal{M} \models \forall x_1 ... \forall x_n \ f(x_1, ..., x_n) = t_1(x) \ \vee \ ... \ \vee \ f(x_1, ..., x_n) = t_k(x).$$

Podsumowując, widzimy, że każda funkcja definiowalna w strukturze $\mathbb{R}_{\mathcal{W}}$ zadana jest kawałkami przez przez skończoną liczbę termów w języku $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ wzbogaconym o nazwy funkcji odwrotnej $\frac{1}{x}$ i pierwiastków $\sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, \ldots$. Ta ważna własność będzie wykorzystywana do rektylinearyzacji funkcji definiowalnych, omawianej w Rozdziale 3 tej rozprawy.

Rozdział 3. Zbieżne systemy Weierstrassa zamknięte ze względu na podstawianie pierwiastków i rektylinearyzacja funkcji definiowalnych

Głównym celem tego rozdziału będzie przedstawienie niektórych spośród twierdzeń o rektylinearyzacji odwzorowań definiowalnych przez systemy Weierstrassa, uzyskanych w artykule K.J. Nowaka [34], gdzie zostały one zaaranżowane w sytuacji rzeczywistych systemów Weierstrassa zamkniętych ze względu na przedłużanie analityczne. Ich przykładem jest system zbieżnych szeregów różniczkowo algebraicznych, który będę prezentowała w Rozdziale 5 tej rozprawy. Twierdzenia te wykorzystam w Rozdziale 5 rozprawy, w dowodzie twierdzenia Gabrielova o rzędzie i jego uogólnienia na przypadek pewnych systemów Weierstrassa. Twierdzenia o rektylinearyzacji dotyczyły transformacji (niekoniecznie ciągłych) funkcji definiowalnych poprzez skończoną liczbę rozdmuchań o gładkich centrach definiowalnych oraz lokalnych podstawień potęgowych; transformacje te dostarczają funkcji określonych na kostkach, na których albo znikają, albo są przecięciami normalnymi, albo odwrotnościami przecięć normalnych.

W artykule [34] rozważane były dwa rodzaje twierdzeń o rektylinearyzacji: słabsze, w których transformacje funkcji są dokonane za pomocą naprzemiennych rozdmuchań o gładkich centrach i lokalnych podstawień potęgowych; oraz mocniejszych, w których transformacje te są dokonane za pomocą kolejnych rozdmuchań i lokalnego podstawienia potęgowego na końcu. Wersje mocniejsze zachodzą przy dodatkowym założeniu, że dany system rzeczywisty jest zamknięty ze względu na kompleksyfikację.

W istocie jednak, wszystkie wersje słabsze zachodzą dla dowolnego zbieżnego systemu rzeczywistego, a mocniejsze dla systemu rzeczywistego, który jest śladem zbieżnego systemu zespolonego zamkniętego ze względu na podstawianie pierwiastków. Łatwo również zauważyć, że każdy zespolony system Weierstrassa, który jest zamknięty ze względu na przedłużanie analityczne, jest też zamknięty ze względu na podstawianie pierwiastków. Należy przy tym podkreślić, że w tej ogólniejszej sytuacji dowody twierdzeń o rektylinearyzacji przenoszą się bez żadnych zmian. Jest tak, ponieważ wersje słabsze bazują na dwóch pierwszych, zaś wersje mocniejsze na czterech poniższych rezultatach:

1) na opisie funkcji definiowalnych przez termy w języku wzbogaconym o potęgi wymierne, który umożliwia indukcję ze względu na złożoność termów;

2) na transformacji funkcji analitycznych do przecięć normalnych poprzez rozdmuchania wzdłuż gładkich podrozmaitości;

3) na wersji twierdzenia Abhyankara-Junga dla systemów Weierstrassa;

4) na sformułowanym poniżej lemacie.

Niech $\mathcal{W}$ będzie zbieżnym zespolonym systemem Weierstrassa, który jest zamknięty ze względu na podstawianie pierwiastków, tzn., który spełnia następujący warunek:

$$f \in \mathcal{W}_n \cap \mathbb{C}[[x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}]] \implies \exists\, g \in \mathcal{W}_n : \ f(x) = g(x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}).$$

Przykładami systemów, które są zamknięte ze względu na podstawianie pierwiastków, są systemy skonstruowane w Rozdziale 4 przy pomocy funkcji elementarnych oraz różnych klas funkcji eliptycznych.

Lemat 3.1. *Jeśli $\mathcal{W}$ jest systemem zamkniętym ze względu na podstawianie pierwiastków, to każdy szereg ułamkowy $f(x_1^{1/k}, \ldots, x_n^{1/k})$, gdzie $f \in \mathcal{W}_n$, jest elementem całkowitym nad $\mathcal{W}_n$.*

DOWÓD. Rozważmy wielomian

$$P(x,T) := \prod_{i_1,\ldots,i_n=0}^{k-1} (T - f(\epsilon^{i_1} x_1^{1/k}, \ldots, \epsilon^{i_n} x_n^{1/k})) \in \mathbb{C}[[x]][T],$$

ϵ jest prymitywnym pierwiaskiem z jedynki stopnia k. Wykażemy, że współczynniki wielomianu $P(x,T)$ są zbieżnymi zespolonymi szeregami formalnymi. Niech zatem $f \in \mathbb{C}[[x]]$.

1. Przypadek, gdy $f \in \mathbb{C}[x]$. Rozważmy skończone rozszerzenia pierścieni $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}[[x_1^{\frac{1}{k}}, ..., x_n^{\frac{1}{k}}]]$ i ich ciał ułamków $\mathbb{C}(x) \subset \mathbb{C}(x_1^{\frac{1}{k}}, ..., x_n^{\frac{1}{k}})$, oraz grupę Galois G tego rozszerzenia; oczywiście jest to skończone rozszerzenie Galois. Wielomiany $T^k - x_1, ..., T^k - x_n$ są nierozkładalnymi wielomianami generatorów $x_1^{\frac{1}{k}}, ..., x_n^{\frac{1}{k}}$. Elementami sprzężonymi do tych generatorów są odpowiednio $\epsilon^{i_1} x_1^{\frac{1}{k}}, ..., \epsilon^{i_n} x_n^{\frac{1}{k}}$ $(i_1, ..., i_n = 0, ..., k-1)$, gdzie ϵ jest pierwiastkiem prymitywnym z jedynki stopnia k. Element $\sigma \in G$ jest wyznaczony jednoznacznie przez wartości $\sigma(x_1^{\frac{1}{k}}) = \epsilon^{j_1} x_1^{\frac{1}{k}}, ..., \sigma(x_n^{\frac{1}{k}}) = \epsilon^{j_n} x_n^{\frac{1}{k}}$. Z samej definicji $P(x,T)$ widzimy, że $P^\sigma(x,T) = P(x,T)$, czyli że współczynniki tego wielomianu są niezmiennicze względem grupy

Galois G, a zatem leżą w $\mathbb{C}(x)$. Ponieważ jednak współczynniki są całkowite nad $\mathbb{C}[x]$, to leżą one w $\mathbb{C}[x]$, gdyż pierścień $\mathbb{C}[x]$ jest całkowicie domknięty. Reasumując $P(x, T) \in \mathbb{C}(x)[T]$.

2. Gdy $f \in \mathbb{C}[[x]]$, wykorzystujemy punkt 1. i aproksymację $\mathfrak{m}-$adyczną.

Jest jasne, że
$$P(x_1^k, \ldots, x_n^k, T) \in \mathcal{W}_n[T].$$
Ponieważ system $\mathcal{W}$ jest zamknięty ze względu na podstawianie pierwiastków, otrzymujemy natychmiast, że $P(x, T) \in \mathcal{W}_n[T]$. Oznacza to, że $P(x, T)$ jest wielomianem zależności całkowitej elementu $f(x_1^{1/k}, \ldots, x_n^{1/k})$ nad $\mathcal{W}_n$, co było do okazania.

Zauważmy następnie, że pierwszy z czterech wymienionych wyżej rezultatów, zachodzi dla dowolnych rzeczywistych zbieżnych systemów Weierstrassa i został przedstawiony w Rozdziale 2 rozprawy.

Drugi z nich, jak udowodnili Bierstone–Milman [9], zachodzi w jeszcze ogólniejszym przypadku systemów quasi-analitycznych, które (z definicji) są zamknięte ze względu na złożenie, na branie funkcji odwrotnej (lub, równoważnie, funkcji uwikłanej) i na wydzielanie przez współrzędną (co implikuje zamkniętość ze względu na różniczkowanie). Zbieżne systemy Weiertsrassa $\mathcal{V}$ posiadają, jak wykazałam w Rozdziale 1, wszystkie te własności. Dlatego też dysponujemy transformacją funkcji $\mathcal{V}$-analitycznych do przecięć normalnych poprzez rozdmuchania wzdłuż gładkich podrozmaitości $\mathcal{V}$-analitycznych.

Również twierdzenie Abhyankara–Junga zachodzi dla dowolnych systemów Weierstassa (zob. [32, 33, 35, 36], a także Rozdział 5 rozprawy).

Przed wypowiedzią twierdzeń o rektylinearyzacji, przypomnę podstawowe pojęcia. Ustalmy rzeczywisty zbieżny system Weierstrassa $\mathcal{V}$. Przez kwadrant w $\mathbb{R}^m$ rozumiemy podzbiór postaci
$$\{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i = 0, x_j > 0, x_k < 0 \quad \text{dla} \;\; i \in I_0, j \in I_+, k \in I_-\},$$
gdzie $\{I_0, I_+, I_-\}$ jest rozłącznym podziałem $\{1, \ldots, m\}$; jego ślad Q na kostce $[-1, 1]^m$ będziemy nazywali ograniczonym kwadrantem. Przecięciem normalnym na kwadrancie Q nazywamy funkcję postaci $x^\alpha \cdot u(x)$, gdzie $u(x)$ jest funkcją $\mathcal{V}$-analityczną w otoczeniu domknięcia $\overline{Q}$ nigdzie nie znikającą na $\overline{Q}$. Połóżmy
$$Q_+ := \{x \in [0, 1]^m : x_i = 0, x_j > 0 \quad \text{dla} \;\; i \in I_0, j \in I_+ \cup I_-\}.$$

Będziemy mówili, że funkcja f jest ułamkowym przecięciem normalnym na ograniczonym kwadrancie Q, gdy jest ona postaci

$$f(x_1, \ldots, x_m) = |x_1|^{\frac{n_1}{k}} \cdot \ldots \cdot |x_m|^{\frac{n_m}{k}} \cdot u(|x_1|^{\frac{1}{k}}, \ldots, |x_m|^{\frac{1}{k}}),$$

gdzie k jest dodatnią liczbą naturalną, $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ są takie, że $n_i = 0$ dla $i \in I_0$, u jest funkcją $\mathcal{V}$-analityczną w otoczeniu domknięcia $\overline{Q_+}$ nigdzie nie znikającą na $\overline{Q_+}$.

Sformułuję teraz dwa twierdzenia o rektylinearyzacji (cf. [34], Twierdzenia 1 i 2).

Twierdzenie 3.1 (o jednoczesnej rektylinearyzacji globalnych funkcji definiowalnych). *Niech*

$$f_1, \ldots, f_s : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

będą funkcjami definiowalnymi przez system $\mathcal{V}$ i niech K będzie podzbiorem zwartym w $\mathbb{R}^m$. Wtedy istnieje skończona rodzina modyfikacji

$$\varphi_i : [-1, 1]^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

takich, że

1) każde z odwzorowań φ_i przedłuża się do $\mathcal{V}$-analitycznego odwzorowania w otoczeniu kostki $[-1, 1]^m$, które jest złożeniem skończenie wielu lokalnych rozdmuchań wzdłuż gładkich centrów oraz lokalnych podstawień potęgowych;

2) suma obrazów $\varphi_i((-1, 1)^m)$, $i = 1, \ldots, p$, jest otoczeniem K;

3) dla każdego ograniczonego kwadrantu Q_j, $j = 1, \ldots, 3^m$, restrykcja do Q_j każdej funkcji $f_k \circ \varphi_i$, $k = 1, \ldots, s$, $i = 1, \ldots, p$, albo znika, albo jest przecięciem normalnym, albo jest odwrotnością przecięcia normalnego na Q_j.

Twierdzenie 3.2. *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie ograniczonym podzbiorem otwartym i $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją definiowalną przez system $\mathcal{V}$. Wtedy istnieje skończona rodzina modyfikacji*

$$\varphi_i : [-1, 1]^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

takich, że

1) każde z odwzorowań φ_i przedłuża się do $\mathcal{V}$-analitycznego odwzorowania w otoczeniu kostki $[-1, 1]^m$, które jest złożeniem skończenie wielu lokalnych rozdmuchań wzdłuż gładkich centrów oraz lokalnych podstawień potęgowych;

2) każdy zbiór $\varphi_i^{-1}(U)$ jest skończoną sumą ograniczonych kwadrantów w $\mathbb{R}^m$;

3) każdy zbiór $\varphi_i^{-1}(\partial U)$ jest skończoną sumą ograniczonych kwadrantów domkniętych w $\mathbb{R}^m$ wymiaru $m-1$;

4) U jest sumą obrazów $\varphi_i(\mathrm{Int}\,(Q))$, gdzie Q są kwadrantami zawartymi w $\varphi_i^{-1}(U)$, $i = 1, \ldots, p$;

5) dla każdego ograniczonego kwadrantu Q restrykcja do Q każdej funkcji $f \circ \varphi_i$ albo znika, albo jest przecięciem normalnym, albo jest odwrotnością przecięcia normalnego na Q, o ile $\varphi_i^{-1}(U) \cap Q \neq \emptyset$.

Niech $\mathcal{W}$ będzie zespolonym zbieżnym systemem Weierstrassa zamkniętym ze względu na podstawianie pierwiastków i niech $\mathcal{V}$ będzie jego śladem rzeczywistym, tzn. $\mathcal{V}_m = \mathcal{W}_m \cap \mathbb{R}[[x]]$. Mamy wtedy następujące mocniejsze wersje Twierdzeń 3.1 i 3.2 (cf. [34], Twierdzenia 1^* i 2^*).

Twierdzenie 3.3. *Niech*

$$f_1, \ldots, f_s : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

będą funkcjami definiowalnymi przez system $\mathcal{V}$ i niech K będzie podzbiorem zwartym w $\mathbb{R}^m$. Wtedy istnieje skończona rodzina modyfikacji

$$\varphi_i : [-1,1]^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

takich, że

1) każde z odwzorowań φ_i przedłuża się do $\mathcal{V}$-analitycznego odwzorowania w otoczeniu kostki $[-1,1]^m$, które jest złożeniem skończenie wielu lokalnych rozdmuchań wzdłuż gładkich centrów;

2) suma obrazów $\varphi_i((-1,1)^m)$, $i = 1, \ldots, p$, jest otoczeniem K;

3 dla każdego ograniczonego kwadrantu Q_j, $j = 1, \ldots, 3^m$, restrykcja do Q_j każdej funkcji $f_k \circ \varphi_i$, $k = 1, \ldots, s$, $i = 1, \ldots, p$, albo znika, albo jest ułamkowym przecięciem normalnym, albo jest odwrotnością ułamkowego przecięcia normalnego (w pewnym lokalnym układzie współrzędnych) na Q_j.

Twierdzenie 3.4. *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie ograniczonym podzbiorem otwartym i $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją definiowalną przez system $\mathcal{V}$. Wtedy istnieje skończona rodzina modyfikacji*

$$\varphi_i : [-1,1]^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

takich, że

1) każde z odwzorowań φ_i przedłuża się do $\mathcal{V}$-analitycznego odwzorowania w otoczeniu kostki $[-1,1]^m$, które jest złożeniem skończenie wielu lokalnych rozdmuchań wzdłuż gładkich centrów;

2) każdy zbiór $\varphi_i^{-1}(U)$ jest skończoną sumą ograniczonych kwadrantów w $\mathbb{R}^m$;

3) każdy zbiór $\varphi_i^{-1}(\partial U)$ jest skończoną sumą ograniczonych kwadrantów domkniętych w $\mathbb{R}^m$ wymiaru $m-1$;

4) U jest sumą obrazów $\varphi_i(\mathrm{Int}\,(Q))$, gdzie Q są kwadrantami zawartymi w $\varphi_i^{-1}(U)$, $i=1,\ldots,p$;

5) dla każdego ograniczonego kwadrantu Q restrykcja do Q każdej funkcji $f\circ\varphi_i$ albo znika, albo jest ułamkowym przecięciem normalnym, albo jest odwrotnością ułamkowego przecięcia normalnego na Q, o ile $\varphi_i^{-1}(U)\cap Q\neq\emptyset$.

Uwaga. Twierdzenia 3.2 i 3.4, podobnie jak Twierdzenia 3.1 i 3.3, można sformułować dla przypadku jednoczesnej rektylinearyzacji wielu funkcji $f_1,\ldots,f_s : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Rozdział 4. Systemy Weierstrassa wyznaczone przez funkcje elementarne i funkcje eliptyczne

W rozdziale tym przedstawiam zespolone i rzeczywiste zbieżne systemy Weierstrassa wyznaczone przez zawężone funkcje elementarne oraz przez różne klasy funkcji eliptycznych. Przedstawione są one, odpowiednio, w paragrafie pierwszym i trzecim. W paragrafie drugim, prezentuję podstawowe własności funkcji eliptycznych. Te systemy Weierstrassa były wykorzystywane przez van den Driesa [13] i Bianconiego [5] do wykazania, że struktury wyznaczone, odpowiednio, przez zawężone funkcje elementarne i funkcje eliptyczne, są silnie modelowo zupełne.

Omawiane tu zespolone systemy Weierstrassa $\mathcal{W}_{RE}$ i $\mathcal{W}_{\Lambda}$, gdzie Λ jest kratą okresów, stanowią przykład zespolonych systemów Weierstrassa zamkniętych ze względu na podstawianie pierwiastków. (Te ostatnie były rozważane w Rozdziale 3 tej rozprawy w związku z rektylinearyzacją funkcji definiowalnych.) Wynika to natychmiast z faktu, że podstawianie pierwiastków jest operacją definiowalną, a systemy Weierstrassa $\mathcal{W}_{RE}$ i $\mathcal{W}_{\Lambda}$ zostały wprowadzone przy użyciu pojęcia definiowalności.

§ 1. System Weierstrassa wyznaczony przez zawężone funkcje elementarne. Strukturę o-minimalną $\mathbb{R}^{RE}$ generowaną przez zawężone funkcje elementarne $\sin x$ i $\exp x$ definiujemy w następujący sposób:

$$\mathbb{R}^{RE} := (\mathbb{R}, (r)_{r\in\mathbb{R}}, <, +, \cdot\,, \ \exp x|_{[0;1]}, \sin x|_{[0;\pi]}).$$

Przypomnimy konstrukcję van den Driesa [13] systemu Weierstrassa wyznaczonego przez tę strukturę. Dla dowolnego polidysku $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ o środku w zerze, niech $\mathbb{C}^{RE}_{\Delta,n}\langle x\rangle$ oznacza rodzinę wszystkich szeregów potęgowych $h \in \mathbb{C}[[x]]$ zbieżnych w Δ do pewnej funkcji holomorficznej $\widetilde{h}$ takiej, że każda pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\widetilde{h}}{\partial x^{\alpha}} : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

jest silnie definiowalna w strukturze $\mathbb{R}^{RE}$. Wtedy

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{RE} := \left(\bigcup_{\Delta\subset\mathbb{C}^n} \mathbb{C}^{RE}_{\Delta,n}\langle x\rangle \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

jest zbieżnym systemem Weierstrassa. Jedynie warunek W3 definicji zbieżnych systemów Weierstrassa jest trudny do weryfikacji. Jest on bezpośrednią konsekwencją poniższego Twierdzenia 4.1 ([13], Propozycja 3.8).

Załóżmy, że zbieżny szereg $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, jest regularny rzędu d ze względu na zmienną y. Wtedy istnieją dowolnie małe polidyski $\Delta = \Delta_1 \times \{y : \ |y| < r\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ w $(0; 0)$ takie, że:

i) f jest zbieżny w otoczeniu domknięcia $\overline{\Delta}$,

ii) $f(0, y) \neq 0$ dla $\{y : \ 0 < |y| \leqslant r\}$,

iii) $f(x, y) \neq 0$ dla $x \in \overline{\Delta}_1$, $|y| = r$.

Niech $g \in \mathbb{C}[[x, y]]$ będzie innym szeregiem zbieżnym w otoczeniu $\overline{\Delta}$. Wtedy, na mocy globalnej wersji twierdzenia Weierstrassa o dzieleniu (zob. np. [21]), mamy

$$g = Q \cdot f + R, \quad Q \in \mathbb{C}[[x, y]], \quad R = R_{d-1} y^{d-1} + \ldots + R_0 \in \mathbb{C}[[x]][y],$$

gdzie szereg Q jest zbieżny w otoczeniu $\overline{\Delta}$ i szeregi $R_0, \dots, R_{d-1}$ są zbieżne w otoczeniu domknięcia $\overline{\Delta_1}$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$[f, g] := \left\{ \frac{\partial^{|\alpha|+j} f}{\partial x^\alpha \partial y^j}, \ \frac{\partial^{|\alpha|+j} g}{\partial x^\alpha \partial y^j} \ : \ \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \ j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Twierdzenie 4.1. *Przy powyższych założeniach, restrykcja do Δ każdej pochodnej cząstkowej*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} R_0}{\partial x^\alpha}, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|} R_{d-1}}{\partial x^\alpha}, \ \frac{\partial^{|\alpha|+j} Q}{\partial x^\alpha \partial y^j}$$

jest silnie definiowalna w Δ przez $[f, g]$, tzn. jest silnie definowalna w ciele $\mathbb{R}$ wzbogaconym o restrykcje do Δ wszystkich funkcji z $[f, g]$.

Dowód van den Driesa jest elementarny, chociaż technicznie nieco skomplikowany. Wykorzystuje on wzory Cramera i uogólnione wyznaczniki Vandermonde'a.

Wniosek 1. *System $\mathcal{W}$ jest zbieżnym systemem Weierstrassa nad $\mathbb{C}$.*

Wniosek 2. *Niech $\mathcal{V}$ będzie rzeczywistym śladem systemu $\mathcal{W}$, tzn. $\mathcal{V}_n = \mathcal{W}_n \cap \mathbb{R}[[x]]$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mathcal{V}$ jest zbieżnym systemem Weierstrassa nad $\mathbb{R}$.*

Konstrukcja systemu Weierstrassa $\mathcal{V}$ umożliwiła van den Driesowi uzyskanie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.2. *Struktura* $\mathbb{R}^{RE}$ *jest silnie modelowo zupełna.*

Dla dowodu, zauważmy, że każda zawężona funkcja $\mathcal{V}$-analityczna jest silnie definiowalna w wyjściowej strukturze $\mathbb{R}^{RE}$. Ponieważ struktura $\mathbb{R}_{\mathcal{V}}$ jest silnie modelowo zupełna, Własność 5b) z Rozdziału 2 umożliwia redukcję dowodu do wykazania, że zawężone funkcje exp i sin są silnie definiowalne w $\mathbb{R}_{\mathcal{V}}$. To jednak wynika z faktu, że kompleksyfikacje obu funkcji sin i exp oraz ich pochodnych mogą być odtworzone z samych tych funkcji rzeczywistych. Ponadto zespolone funkcje exp i sin spełniają formuły dodawania, dzięki którym ich szeregi Taylora w dowolnym punkcie płaszczyzny zespolonej mogą być odtworzone z ich szeregów Taylora w zerze; oczywiście koniecznym jest rozważanie całej pary tych funkcji. Zauważmy też na koniec, że rodziny zbiorów definiowalnych w strukturach $\mathbb{R}^{RE}$ i $\mathbb{R}_{\mathcal{V}}$ pokrywają się.

Uwaga 1. Hipoteza van den Driesa, że twierdzenie analogiczne do powyższego zachodzi dla funkcji eliptycznych, zostało potwierdzone przez Bianconiego [5]. Podobną rolę do formuł dodawania dla funkcji exp i sin odgrywają formuły dodawania dla eliptycznej funkcji Weierstrassa. Będzie to przedstawione w § 3 tego rozdziału.

§2. Podstawowe informacje o funkcjach eliptycznych. Zaczniemy od przypomnienia podstawowych pojęć związanych z funkcjami eliptycznymi. Ustalmy dwie liczby ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ takie, że $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$.

Kratą okresów nazywamy podgrupę

$$\Lambda = \Lambda_{\omega_1,\omega_2} := \{m\omega_1 + n\omega_2 : \quad m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

generowaną przez ω_1, ω_1.

Funkcję meromorficzną $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nazywamy funkcją eliptyczną względem kraty $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$, gdy jest dwuokresowa z okresami ω_1, ω_2, tzn.:

$$f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z + m\omega_1 + n\omega_2) \text{ dla } z \in \mathbb{C},\ m, n \in \mathbb{Z}.$$

Fundamentalny równoległobok jest to równoległobok o wierzchołkach:

$$0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1 + \omega_2.$$

Równoległobok okresów jest to równoległobok o wierzchołkach:

$$m\omega_1+n\omega_2,\ (m+1)\omega_1+n\omega_2,\ (m+1)\omega_1+(n+1)\omega_2,\ m\omega_1+(n+1)\omega_2, \quad m,n \in \mathbb{Z}.$$

Oczywiście funkcja eliptyczna f jest wyznaczona jednoznacznie przez jej zachowanie w dowolnym równoległoboku okresów. Jeśli analizujemy zera i bieguny funkcji eliptycznej $f \neq 0$, wygodnie jest przesunąć równoległobok okresów tak, aby na jego brzegu nie leżały ani zera, ani bieguny. Tak przesunięty równoległobok D nazywany jest komórką.

Uwaga 2. Funkcja eliptyczna, która nie jest tożsamościowo równa zeru ma w dowolnym równoległoboku okresów skończoną liczbę zer i biegunów.

Rzędem funkcji eliptycznej f nazywamy liczbę jej biegunów (licząc z krotnościami) w dowolnej komórce D. Zbiór zer Z i biegunów B funkcji eliptycznej $f \not\equiv 0$ w dowolnej komórce D jest nazywany nierozkładalnym zbiorem zer i biegunów. Oznaczmy przez $C := \partial D$ brzeg D z orientacją dodatnią.

Własności funkcji eliptycznych.

1) $\sum_{z_i \in B} Res_{z_i} f = 0$.

2) Funkcja eliptyczna f nie równa tożsamościowo zeru rzędu k ma w dowolnej komórce D dokładnie k zer (licząc z krotnościami).

3) Suma zer i biegunów (licząc z krotnościami) leżących w dowolnej komórce D funkcji eliptycznej $f \neq 0$, przystają modulo krata okresów Λ.

4) (Twierdzenie Liouville'a dla funkcji eliptycznych) Funkcja eliptyczna bez biegunów (rzędu 0) jest stała.

DOWÓD. Ad. 1) Korzystając z twierdzenia o residuach, a następnie z dwuokresowości otrzymujemy, że

$$\sum_{z_i \in B} Res_{z_i} f = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz = 0.$$

Ad. 2) Różnica zer i biegunów (licząc z krotnościami) w D wynosi:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Ad. 3) Różnica pomiędzy sumami zer i biegunów wynosi:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_A^{A+\omega_2} \frac{\omega_1 f'(z)}{f(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_A^{A+\omega_1} \frac{\omega_2 f'(z)}{f(z)}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\omega_1 \log f(z)|_A^{A+\omega_2} - \omega_2 \log f(z)|_A^{A+\omega_1}\right) \in \Lambda.$$

Ad. 4) Funkcja całkowita (analityczna na całej płaszczyźnie), dwuokresowa musi być ograniczona w każdym równoległoboku okresowości, a więc również na całej płaszczyźnie, a więc na mocy klasycznego twierdzenia Liouville'a dla funkcji analitycznych musi być stała.

Eliptyczna funkcja Weierstrassa zdefiniowana jest wzorem:

$$\mu(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right).$$

Szereg ten jest bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny w $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ (zob. np. [45]). Funkcja Weierstrassa $\mu(z)$ jest parzystą funkcją eliptyczną rzędu 2. Aby wykazać, że jest ona dwuokresowa, zróżniczkujmy powyższy szereg wyraz po wyrazie:

$$\mu'(z) = -2\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^3}.$$

Oczywiście, $\mu'(z)$ jest nieparzystą funkcją eliptyczną rzędu 3. Całkując równość $\mu'(z+\omega_1) = \mu'(z)$, otrzymujemy:

$$\mu(z+\omega_1) - \mu(z) = \int_z^{z+\omega_1} \mu'(t)dt = C.$$

Dlatego:

$$\mu(z+\omega_1) = \mu(z) + C, \quad \mu(-z+\omega_1) = \mu(-z) + C;$$

$$\mu(z-\omega_1) = \mu(z) + C, \quad \mu((z-\omega_1)+\omega_1) = \mu(z-\omega_1) + C;$$

Dodając stronami dwie ostatnie równości otrzymujemy:

$$\mu(z-\omega_1) + \mu(z) = \mu(z) + \mu(z-\omega_1) + C,$$

skąd $C = 0$, a więc $\mu(z+\omega_1) = \mu(z)$. Analogicznie, $\mu(z+\omega_2) = \mu(z)$, co kończy dowód.

Twierdzenie 4.3. *Funkcja Weierstrassa $\mu(z)$ spełnia następujące równanie różniczkowe:*

$$(\mu'(z))^2 = 4\,\mu^3(z) - g_2\,\mu(z) - g_3,$$

gdzie:

$$g_2 = 60 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6}.$$

DOWÓD.

$$\mu(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right),$$

skąd

$$\mu(z) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + \mathcal{O}(z^6),$$

dla z w pobliżu $0 \in \mathbb{C}$. Zatem:

$$\mu(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + \mathcal{O}(z^6);$$

$$\mu'(z) = -2\frac{1}{z} + \frac{1}{10} g_2 z + \frac{1}{7} g_3 z^3 + \mathcal{O}(z^5);$$

$$\mu^3(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{20} g_2 \frac{1}{z^2} + \frac{3}{28} g_3 + \mathcal{O}(z^2);$$

$$\mu'^2(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{2}{5} g_2 \frac{1}{z^2} - \frac{4}{7} g_3 + \mathcal{O}(z^2).$$

A więc

$$(\mu'(z))^2 - 4\mu^3(z) + g_2\mu(z) + g_3 = \mathcal{O}(z^2).$$

Funkcja po lewej stronie jest więc funkcją holomorficzną w $0 \in \mathbb{C}$, a zatem jest funkcją holomorficzną w $\mathbb{C}$. Na mocy twierdzenia Liouville'a jest ona funkcją stałą. Ponieważ wartość tej funkcji w punkcie $z = 0$ wynosi 0, jest ona tożsamościowo równa zero, co kończy dowód.

Twierdzenie 4.4. *Niech z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$. Jeśli $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, to*

$$\begin{vmatrix} \mu(z_1) & \mu'(z_1) & 1 \\ \mu(z_2) & \mu'(z_2) & 1 \\ \mu(z_3) & \mu'(z_3) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

DOWÓD. Oczywiście, zerowanie się powyższego wyznacznika oznacza dokładnie współliniowość trzech punktów $(\wp(z_i), \wp'(z_i))$, $i = 1, 2, 3$. Niech $P_1 = (\wp(z_1), \wp'(z_1))$, $P_2 = (\wp(z_2), \wp'(z_2))$ i $P_3 = (\wp(z_3), \wp'(z_3))$. Niech L będzie prostą afiniczną P_1P_2 o równaniu $y = ax+b$. Na mocy Twierdzenia 4.3, punkty P_1, P_2 są rozwiązaniami układu:

$$\begin{cases} y^2 = 4x^2 - g_2x - g_3 \\ y = ax + b \end{cases}, \tag{8}$$

który z kolei odpowiada zerom funkcji $f(z) = \wp'(z) - a\wp(z) - b$. Wtedy z_1, z_2 są zerami $f(z)$, która jest rzędu 3. Dzięki Własności 3), jej zerem jest też $z_3 = -(z_1+z_2)$. Oznacza to, że punkty P_1, P_2, P_3 są współliniowe, co było do okazania.

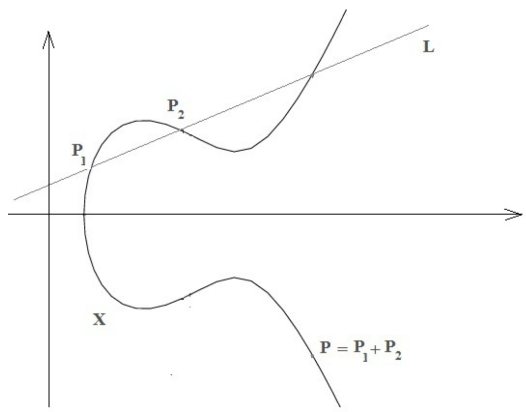
Uwaga 3. Z teorii krzywych eliptycznych wiadomo, że odwzorowanie $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, określone wzorem $\varphi(z) = (\wp(z), \wp'(z))$ we współrzędnych afinicznych (x, y) w $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, jest izomorfizmem torusa $\mathbb{C}/\Lambda$ na krzywą eliptyczną $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ zadaną na płaszczyźnie afinicznej $\mathbb{C}^2_{x,y} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ równaniem:

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Twierdzenie powyższe mówi, że φ jest homomorfizmem grup. Innymi słowy, dla dowolnych trzech punktów $P_1, P_2, P_3 \in X$:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \Leftrightarrow \text{ punkty } P_1,\ P_2,\ P_3 \text{ są współliniowe.}$$

Działanie grupowe na krzywej eliptycznej X może więc być zilustrowane rysunkiem:



Wniosek. *(Formuła dodawania dla eliptycznej funkcji Weierstrassa μ)*
a) Jeśli $z_1 \neq z_2$, to

$$\mu(z_1 + z_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mu'(z_1) - \mu'(z_2)}{\mu(z_1) - \mu(z_2)}\right)^2 - \mu(z_1) - \mu(z_2).$$

b) Jeśli $z_1 = z_2$, to

$$\mu(2z_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mu''(z_1)}{\mu'(z_1)}\right)^2 - 2\mu(z_1).$$

DOWÓD. Układ równań (8) jest równoważny równaniu

$$(ax + b)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

czyli

$$4x^3 - a^2x^2 - (2ab + g_2)x - (b^2 + g_3) = 0.$$

Wtedy rozwiązania x_1, x_2, x_3 spełniają wzory Viete'a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a^2}{4}.$$

Ale a jest współczynnikiem kierunkowym prostej P_1P_2, zatem

$$a := \begin{cases} \frac{\mu'(z_1)-\mu'(z_2)}{\mu(z_1)-\mu(z_2)}, & \text{w przypadku a)} \\ \frac{\mu''(z_1)}{\mu'(z_1)}, & \text{w przypadku b)} \end{cases}$$

co było do okazania.

Uwaga 4. Dowolna funkcja eliptyczna o dwuokresie ω_1, ω_2 da się przedstawić w postaci:

$$P(\mu(z)) + \mu'(z)\, Q(\mu(z)),$$

gdzie P, Q są funkcjami wymiernymi o współczynnikach zespolonych. W szczególności ciało funkcji eliptycznych o dwuokresie ω_1, ω_2, jest generowane przez $\mu(z)$ i $\mu'(z)$ (zob. np. [45]).

§ 3. System Weierstrassa wyznaczony przez funkcje eliptyczne. Przedstawimy teraz strukturę o-minimalną wyznaczoną przez funkcje eliptyczne, która została wprowadzona przez Bianconiego [5]. Rozważmy następujące funkcje:

$$\begin{aligned}
\mu_1(z) &= \mu(z, \omega_1, \omega_2),\\
\mu_2(z) &= \mu(z, i\omega_1, i\omega_2),\\
\mu_3(z) &= \mu(z, \overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}),\\
\mu_4(z) &= \mu(z, i\overline{\omega_1}, i\overline{\omega_2}).
\end{aligned}$$

Dla tak zdefiniowanych funkcji zachodzą następujące zależności:

$$\mu_j(iz) = -\mu_l(z), \quad \mu_j'(iz) = i\mu_l'(z),$$

dla $j \neq l,\ \ j, l \in \{1, 2\}$ lub $j, l \in \{3, 4\}$. Gdy $x \in \bigcap_{j=1}^{4} \mathrm{dom}\,(\mu_j(z)) \cap \mathbb{R}$, otrzymujemy stąd:

$$\mathrm{Re}(\mu_j(x)) = \mathrm{Re}(\mu_l(x)) = \frac{1}{2}(\mu_j(x) + \mu_l(x)),$$

$$\mathrm{Im}(\mu_j(x)) = -\mathrm{Im}(\mu_l(x)) = \frac{1}{2i}(\mu_j(x) - \mu_l(x)),$$

dla $j \neq l,\ \ j, l \in \{1, 3\}$ lub $j, l \in \{2, 4\}$. Połóżmy

$$\mathrm{RP}_j = \mathrm{Re}\,(\mu_j)|_{[a_0;b_0]}, \quad \mathrm{IP}_j = \mathrm{Im}\,(\mu_j)|_{[a_0;b_0]}, \quad j = 1, 2,$$

przy czym niech $a_0 < b_0$ będą takie, że

$$[a_0, b_0],\ \{x + iy :\ x\,, y \in [a_0, b_0]\} \subseteq dom(\mu_1) \cap dom(\mu_2).$$

Rozważmy strukturę

$$\mathbb{R}^{\Lambda} := (\mathbb{R}, (r)_{r\in\mathbb{R}}, <, +, \cdot\,,\ \mathrm{RP}_1,\ \mathrm{RP}_2,\ \mathrm{IP}_1,\ \mathrm{IP}_2).$$

Możemy teraz zdefiniować zespolony zbieżny system Weierstrassa $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\Lambda$ w sposób analogiczny do konstrukcji z § 1. Wtedy jego ślad rzeczywisty $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\Lambda$ jest rzeczywistym zbieżnym systemem Weierstrassa. Podobnie też, jak w przypadku zawężonych funkcji elementarnych, funkcje RP_1, RP_2, IP_1, IP_2 są silnie definiowalne w $\mathbb{R}_{\mathcal{V}_\Lambda}$, a w konsekwencji, rodziny zbiorów definiowalnych w strukturach $\mathbb{R}^\Lambda$ i $\mathbb{R}_{\mathcal{V}_\Lambda}$ pokrywają się. W przypadku funkcji eliptycznych, wynika to z faktu, że kompleksyfikacje tych czterech funkcji rzeczywistych i ich pochodnych (dowolnego rzędu) mogą być odtworzone z samych tych funkcji rzeczywistych. To zaś jest konsekwencją formuły dodawania dla eliptycznej funkcji Weierstrassa oraz faktu, że funkcja ta spełnia równanie różniczkowe z Twierdzenia 4.3. Możemy więc podsumować powyższe rozważania, wypowiadając następujący analog Twierdzenia 4.2:

Twierdzenie 4.5. *Struktura* $\mathbb{R}^{\Lambda}$ *jest silnie modelowo zupełna.*

Rozdział 5. Zachowanie wielomianów Weierstrassa przy rozdmuchaniu i twierdzenie o rzędzie

W rozdziale tym będziemy badali zachowanie wielomianów Weierstrassa

$$P(x,T) = T^d + a_1(x)T^{d-1} + ... + a_d(x) \in \mathbb{C}[[x]][T]$$

podczas rozdmuchania jego współczynników $a_i(x)$, będących zespolonymi szeregami formalnymi zmiennych $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Zainteresowani jesteśmy lokalną analizą rozdmuchań o gładkich centrach. Będziemy więc rozważali rozdmuchania $\sigma : (\mathbb{C}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m_x, 0)$, które zadane są w pewnych lokalnych układach współrzędnych wzorem:

$$x_i = y_k y_i \text{ jeżeli } i < k, \quad x_i = y_i \text{ jeżeli } i \geqslant k; \tag{9}$$

centrum tego rozdmuchania jest zadane równaniami $x_1 = \ldots = x_k = 0$, zaś dywizor wyjątkowy równaniem $y_k = 0$. Będziemy się również zajmować transformacją lokalną (w otoczeniu zera w pewnym lokalnym układzie współrzędnych)

$$\sigma = \sigma_s \circ \ldots \circ \sigma_1 : (\mathbb{C}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m_x, 0),$$

która jest złożeniem skończonej liczby rozdmuchań σ_i, $i = 1, \ldots, s$, o gładkich centrach.

Zauważmy teraz, że nierozkładalny wielomian $P(x,T)$, rozdmuchany do wielomianu Weierstrassa

$$P^\sigma(y,T) := P(\sigma(y),T) \in \mathbb{C}[[y]][T]$$

może rozłożyć się na iloczyn nierozkładalnych wielomianów Weierstrassa

$$P^\sigma(y,T) = Q_1(y,T) \cdot \ldots \cdot Q_k(y,T).$$

Przykład. Weźmy nierozkładalny wielomian Weierstrassa $P(x_1, x_2; T) = T^2 - x_1x_2$ i rozważmy rozdmuchanie σ zadane wzorem $x = y_1y_2$, $x_2 = y_2$. Rozdmuchany wielomian $P^\sigma(y_1, y_2; T) = T^2 - y_1y_2^2$, rozkłada się na czynniki liniowe w dowolnym punkcie $(a, 0)$, $a \neq 0$, dywizora wyjątkowego.

Udowodnię, że jeśli jeden z czynników, np. $Q_1(y,T) \in \mathbb{C}\{y\}[T]$ ma współczynniki zbieżne, to wtedy wyjściowy wielomian $P(x,T)$ ma współczynniki zbieżne, $P(x,T) \in \mathbb{C}\{x\}[T]$. Twierdzenie to jest niezwykle delikatne i wydaje się rzeczą bardzo trudną, o ile w ogóle możliwą, wyabstrahowanie z niego rezultatu o czysto algebraicznym charakterze.

Proponowany przeze mnie dowód polega na zredukowaniu twierdzenia do przypadku dwóch zmiennych. Jest to możliwe dzięki zastosowaniu pewnego twierdzenia Bertiniego i twierdzenia redukcyjnego dla zbieżnych szeregów potęgowych, które sformułuję poniżej. Redukcja do dwóch zmiennych jest faktem kluczowym, gdyż w przypadku wielomianu Weierstrassa $P(x,T)$ o współczynnikach formalnych $a_i(x)$ dwóch zmiennych, współczynniki te można zmodyfikować poprzez skończony ciąg σ rozdmuchań w punktach w ten sposób, że wyróżnik wielomianu $P^\sigma(y,T)$ jest dywizorem przecięć normalnych. Wtedy zaś — jak udowodnili Gabrielov [18] i Tougeron [44] — lokalny pierwiastek zbieżny przedłuża się analitycznie wzdłuż całego dywizora wyjątkowego. Dzięki temu współczynniki $a_i^\sigma(y) = (a_i \circ \sigma)(y)$ są funkcjami analitycznymi w otoczeniu całego dywizora wyjątkowego, a zatem wyjściowe współczynniki $a_i(x)$ są funkcjami analitycznymi w otoczeniu zera.

Podsumowując, omawiane twierdzenie bazuje w istotny sposób na technice przedłużania analitycznego. Jak dotąd, nie powiodły się podejmowane (np. przez Spivakovskiego [43], a później Ronda) próby uzyskania tego typu rezultatów na drodze czysto algebraicznej. Dodajmy, że w sposób naturalny uogólnia się ono na przypadek zespolonych systemów Weierstrassa zamkniętych ze względu na przedłużanie analityczne.

Ponadto, twierdzenie to stanowi motywację do wprowadzenia pojęcia analitycznego modyfikowanego pierwiastka Puiseux (w skrócie, analitycznego MPP). Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 5.3. Mówi ono, że jeśli nierozkładalny wielomian Weierstrassa o współczynnikach formalnych ma analityczny MPP, to ma on współczynniki zbieżne. Jako zastosowanie, wykorzystamy go — wraz z techniką rektylinearyzacji funkcji, prezentowaną w Rozdziale 3 niniejszej rozprawy — do dowodu twierdzenia Gabielowa o rzędzie. Dowód ten jest technicznie prostszy i znacznie krótszy od oryginalnych dowodów zarówno Gabrielova [18] jak i Tougerona [44]. Ponadto, Twierdzenie 5.3 umożliwia uzyskanie wersji twierdzenia o rzędzie dla systemów Weierstrassa zamkniętych ze względu na przedłużanie analityczne. Jednak należy tutaj podkreślić, że w moim podejściu, jak już zresztą wspominałam, wykorzystuję (bez podawania dowodu) następujący rezultat Gabrielowa i Tougerona dotyczący wielomianów Weierstrassa o współczynnikach będących szeregami dwóch zmiennych:

Twierdzenie 5.1. *Rozważmy rozdmuchanie σ płaszczyzny $\mathbb{C}^2_x$ w zerze,*

$$\sigma : \mathbb{C}^2_y \longrightarrow \mathbb{C}^2_x, \quad \sigma(y_1, y_2) = (y_1 y_2, y_2),$$

i weźmy dowolny punkt $a = (a_1, 0)$ na jego dywizorze wyjątkowym $y_2 = 0$. Będziemy analizować rozdmuchanie σ lokalnie wokół punktu a:

$$\sigma : (\mathbb{C}^2_y, a) \longrightarrow (\mathbb{C}^2_x, 0).$$

Pierścień kiełków funkcji analitycznych w a i jego uzupełnienie możemy zapisać w postaci

$$\mathbb{C}\{y_1 - a_1, y_2\} \quad i \quad \mathbb{C}[[y_1 - a_1, y_2]].$$

Niech

$$P(x, T) = T^d + a_1(x)T^{d-1} + ... + a_d(x) \in \mathbb{C}[[x]][T]$$

będzie nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa, oraz

$$P^\sigma(y, T) = P(\sigma(y), T) \in \mathbb{C}[[y_1 - a_1, y_2]][T]$$

jego rozdmuchaniem. Jeśli $P^\sigma(y, T)$ ma pierwiastek, który jest zbieżnym szeregiem Puiseux $\varphi(y_1 - a_1, y_2^{1/p})$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}\{y_1 - a_1, y_2\}$, to współczynniki wielomianu $P(x, T)$ są zbieżne, czyli $P(x, T) \in \mathbb{C}\{x\}[T]$.

Przypadek $p = 1$ pokrywa się z Twierdzeniem 4.4 Gabrielova (cf. [18]). Przypadek ogólny wynika z Twierdzenia I Tougerona (cf. [44]), który konstruuje m.in. pewne przestrzenie $\mathbb{P}_\delta[[x]]$ i $\mathbb{P}_\delta\{x\}$, służące do opisu pierwiastków wielomianów Weierstrassa o współczynnikach będących szeregami formalnymi i zbieżnymi (*op.cit.*, Propozycja 2.1). Twierdzenie I mówi, że jeśli wielomian Weierstrassa o współczynnikach formalnych $a_i(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ ma pierwiastek, który można opisać w terminach pierścienia $\mathbb{P}_\delta\{x\}$, to jego współczynniki są zbieżne, $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$. Odgrywa ono fundamentalną rolę w jego dowodzie twierdzenia o rzędzie, choć droga prowadząca do tego celu jest jeszcze stosunkowo długa i technicznie skomplikowana, angażując przy tym różnorodne techniki algebro-analityczne.

W dowodzie wniosku z tego twierdzenia będę wykorzystywała następujące twierdzenie Abhyankara–Junga wraz z pewnym jego wzmocnieniem (cf. [33]), które przypomnę poniżej.

Wielomian

$$f(z, T) = T^d + a_1(z)T^{d-1} + ... + a_n(z) \in \mathbb{C}[[z]][T], \; z = (z_1, ..., z_m)$$

nazywamy quasi-zwyczajnym gdy jego wyróżnik $D(z)$ jest przecięciem normalnym, tzn. jest postaci

$$D(z) = z^{\gamma} \cdot u(z), \ \gamma \in \mathbb{N}^m, \ u(z) \in \mathbb{C}[[z]], \ u(0) \neq 0.$$

Dla dowolnej liczby całkowitej $p > 0$, oznaczmy

$$\mathbb{C}\{z^{1/p}\} = \mathbb{C}\{z_1^{1/p}, ..., z_m^{1/p}\} := \{\alpha(z_1^{1/p}, ..., z_m^{1/p}) : \ \alpha(z) \in \mathbb{C}\{z\}\}.$$

Twierdzenie Abhyankara–Junga. *Dowolny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa*

$$f(z,T) = T^d + a_1(z)T^{d-1} + ... + a_n(z) \in \mathbb{C}\{z\}[T]$$

ma wszystkie pierwiastki w $\mathbb{C}\{z^{1/p}\}$*, dla pewnego* $p \in \mathbb{N}$; *zawsze można przyjąć* $p = d!$.

Uwaga. Jeżeli wyróżnik $D(z)$ jest przecięciem normalnym postaci

$$D(z) = z_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot z_r^{\gamma_r} \cdot u(z), \ u(0) \neq 0, \ 0 \leqslant r \leqslant m,$$

to wszystkie pierwiastki wielomianu $f(z,T)$ należą do pierścienia $\mathbb{C}\{z_1^{1/p}, ..., z_r^{1/p}, z_{r+1}, ..., z_m\}$.

Wniosek 5.1. *Niech* $P^{\sigma} = Q_1 \cdot ... \cdot Q_s$ *będzie rozkładem wielomianu* P^{σ} *na nierozkładalne wielomiany Weierstrassa. Jeżeli* $Q_1 \in \mathbb{C}\{y\}[T]$, *to* $P \in \mathbb{C}\{x\}[T]$.

DOWÓD. Wyróżnik $\Delta(y) \in \mathbb{C}\{y\}$ wielomianu Q_1 jest szeregiem zbieżnym w pewnym otoczeniu zera U. Jest on postaci $\Delta(y) = y_2^k \cdot \alpha(y)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $\alpha(y) \in \mathbb{C}\{y\}$ i $y_2 \nmid \alpha(y)$. W punktach $a = (a_1, 0) \neq 0$ leżących na dywizorze wyjątkowym $E = \{y_2 = 0\}$ dostatecznie blisko zera, funkcja $\alpha(y)$ jest jednością, ponieważ zbiór analityczny

$$\{\alpha(y) = 0\} \cap E$$

jest izolowany w $0 \in \mathbb{C}_y^2$. Dlatego, na mocy twierdzenia Abhyankara–Junga, wielomian Q_1 ma pierwiastek będący zbieżnym szeregiem Puiseux, postaci $\phi(y_1, y_2^{\frac{1}{p}})$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, a ϕ jest funkcją analityczną w $a = (a_1, 0)$ oraz $\phi(a_1, 0) = 0$. Teza wynika więc natychmiast z Twierdzenia 5.1.

Przed uogólnieniem powyższego rezultatu na przypadek m zmiennych, przypomnę wymienione wcześniej dwa twierdzenia, które to umożliwiają.

Twierdzenie Bertiniego. *Dla $m > 2$, niech*

$$P(x,T) = T^d + a_1(x)T^{d-1} + ... + a_d(x) \in \mathbb{C}[[x]][T], \quad x = (x_1, \dots, x_m),$$

będzie nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa o współczynnikach będących formalnymi szeregami potęgowymi. Wtedy dla generycznej płaszczyzny H, restrykcja wielomianu P do H:

$$P|H = T^d + a_1|H \cdot T^{d-1} + ... + a_d|H$$

jest nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa. Zwrot "generyczna płaszczyzna" oznacza tutaj, że istnieje nigdziegęsty podzbiór algebraiczny Z grassmannianu $\mathbb{G}_{m,2}(\mathbb{C})$ zespolonych płaszczyzn w $\mathbb{C}^m$ taki, że twierdzenie zachodzi dla każdej płaszczyzny $H \in \mathbb{G}_{m,2}(\mathbb{C}) \setminus Z$.

Uwaga. Twierdzenie powyższe może być wyprowadzone z pewnej wersji twierdzenia Bertiniego dla zupełnych lokalnych pierścieni całkowitych, którą uzyskał Chow [10]. Można w tym celu wykorzystać twierdzenie Grothendiecka o funkcjach formalnych, przedstawione np. w książce [22], Rozdział III, § 11. Dla zbieżnych szeregów potęgowych, czyli w sytuacji lokalnej geometrii analitycznej, powyższy wariant twierdzenia Bertiniego jest konsekwencją pewnej wersji twierdzenia Lefschetza o grupie fundamentalnej, podanej przez Abhyankara [1], (39.7).

Twierdzenie redukcyjne. *Rozważmy szereg formalny $a(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $x = (x_1, \dots, x_m)$. Jeśli restrykcja $a|L$ szeregu $a(x)$ jest szeregiem zbieżnym dla każdej prostej z pewnego niepustego podzbioru otwartego U przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$, to szereg ten jest zbieżny, $a(x) \in \mathbb{C}\{x\}$.*

Uwaga. Twierdzenie redukcyjne pozostanie prawdziwe, jeżeli założymy, że U jest zbiorem drugiej kategorii Baire'a w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$. Dla dowodu zobacz np. [2] lub [26], Twierdzenie 11.3.

Sformułuję teraz zapowiedziane uogólnienie wniosku 5.1.

Twierdzenie 5.2. *Rozważmy rozdmuchanie $\sigma : (\mathbb{C}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m_x, 0)$ zadane wzorem (9). Niech $P(x,T) \in \mathbb{C}[[x]][T]$ będzie nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa,*

$$P^\sigma(y,T) = P(\sigma(y),T) \in \mathbb{C}[[y]][T]$$

jego rozdmuchaniem oraz $P^\sigma = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$ rozkładem na nierozkładalne wielomiany Weierstrassa. Jeżeli $Q_1 \in \mathbb{C}\{y\}[T]$, to wówczas $P \in \mathbb{C}\{x\}[T]$.

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że dla generycznej płaszczyzny H (tzn. dla płaszczyzn z pewnego otwartego i gęstego podzbioru U grassmannianu) spełnione są następujące dwa warunki: restrykcja P do H jest wielomianem nierozkładalnym (twierdzenie Bertiniego) i przecięcie H z centrum rozdmuchania C jest trywialne, $H \cap C = \{0\}$. Wtedy transformata właściwa $\widetilde{H}$ płaszczyzny H pokrywa się z rozdmuchaniem H w zerze. Wtedy restykcja Q_1 do $\widetilde{H}$ jest wielomianem o współczynnikach zbieżnych, a więc — na mocy wniosku 5.1 — restrykcja P do H jest wielomianem o współczynnikach zbieżnych. Oczywiście zbiór prostych (przechodzących przez zero) zawartych w płaszczyznach z U stanowi otwarty i gęsty podzbiór przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$. Z twierdzenia redukcyjnego wynika więc, że także wielomian P ma współczynniki zbieżne, co kończy dowód twierdzenia.

Otrzymujemy stąd natychmiast dwa wnioski; drugi z nich, wykorzystując indukcję ze względu na liczbę rozdmuchań.

Wniosek 5.2. *Niech $\sigma : (\mathbb{C}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m_x, 0)$ będzie rozdmuchaniem wzdłuż gładkiego centrum C (w pewnym lokalnym układzie współrzędnych w 0), $P \in \mathbb{C}[[x]][T]$ nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa oraz $P^\sigma = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$ rozkładem wielomianu na nierozkładalne wielomiany Weierstrassa. Jeżeli $Q_1 \in \mathbb{C}\{y\}[T]$, to wówczas $P \in \mathbb{C}\{x\}[T]$.*

Wniosek 5.3. *Rozważmy lokalną transformację σ, która jest skończonym złożeniem rozdmuchań o gładkich centrach:*

$$\sigma = \sigma_s \circ \ldots \circ \sigma_1 : (\mathbb{C}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m_x, 0).$$

Niech $P(x, T) \in \mathbb{C}[[x]][T]$ będzie nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa i $P^\sigma = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s$ rozkładem wielomianu na nierozkładalne wielomiany Weierstrassa. Wtedy, jeżeli $Q_1 \in \mathbb{C}\{y\}[T]$, to $P \in \mathbb{C}\{x\}[T]$.

Definicja. Będziemy mówili, że wielomian Weierstrassa

$$P(x; T) \in \mathbb{C}[[x]][T]$$

ma analityczny modyfikowany pierwiastek Puiseux (w skrócie, analityczny MPP), gdy istnieje skończony ciąg rozdmuchań

$$\sigma = \sigma_s \circ \ldots \circ \sigma_1 : (\mathbb{C}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m_x, 0)$$

o gładkich centrach taki, że wielomian $P^\sigma(y;T)$ ma pierwiastek, który jest (w pewnym lokalnym układzie współrzędnych w 0) zbieżnym szeregiem Puiseux, tzn. jest postaci

$$\varphi(y^{1/p}), \quad y^{1/p} = (y_1^{1/p}, \dots, y_m^{1/p}),$$

gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$ i $\varphi(y) \in \mathbb{C}\{y\}$.

Poniższe twierdzenie jest głównym rezultatem tego rozdziału. Jako zastosowanie, wykorzystamy go — wraz z twierdzeniem o transformacji do ułamkowych przecięć normalnych, przedstawionym w Rozdziale 3 — do dowodu twierdzenia Gabrielova o rzędzie i jego wariantu dla systemów Weierstrassa zamkniętych ze względu na przedłużanie analityczne.

Twierdzenie 5.3. *Jeżeli nierozkładalny wielomian Weierstrassa*

$$P(x,T) = T^d + a_1(x)T^{d-1} + ... + a_d(x) \in \mathbb{C}[[x]][T]$$

ma analityczny MPP, to $P(x,T) \in \mathbb{C}\{x\}[T]$, *czyli* $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\},\ i = 1, ...d.$

DOWÓD. Niech $\varphi(y^{\frac{1}{p}}),\ p > 0,\ p \in \mathbb{N}$ będzie analitycznym MPP wielomianu $P(x,T) \in \mathbb{C}[[x]][T]$, który, na mocy Lematu 3.1 z Rozdziału 3 rozprawy, jest elementem całkowitym nad $\mathbb{C}\{y\}$. Niech Q będzie jego wielomianem minimalnym. Ponieważ Q dzieli wielomian P^σ, z Wniosku 5.3 otrzymujemy natychmiast, że $P(x,T) \in \mathbb{C}\{x\}[T]$, co było do okazania.

Z powyższego twierdzenia wynikają natychmiast dwa wnioski dotyczące zespolonych i rzeczywistych systemów Weierstrassa, które są zamknięte ze względu na przedłużanie analityczne. Wnioski te pozwalają uogólnić twierdzenie o rzędzie na przypadek systemów Weierstrassa zamkniętych ze względu na przedłużanie analityczne. Ustalmy pewien zespolony system Weierstrassa $\mathcal{W}$ takiego typu. Będziemy rozważali rozdmuchania, których centra są gładkimi podrozmaitościami $\mathcal{W}$-analitycznymi, oraz mówili o $\mathcal{W}$-analitycznym modyfikowanym pierwiastku Puiseux, dostosowując w oczywisty sposób jego definicję do kategorii $\mathcal{W}$-analitycznej. W przypadku systemu rzeczywistego $\mathcal{V}$, który jest śladem systemu $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{V}_m = \mathbb{R}\langle x\rangle := \mathcal{W}_m \cap \mathbb{R}[[x]], \quad x = (x_1, \dots, x_m),$$

rozważamy rozdmuchania, których centra są gładkimi rzeczywistymi podrozmaitościami analitycznymi względem tego śladu. Natomiast modyfikowane pierwiastki Puiseux wielomianu Weierstrassa $P(x,T) \in \mathbb{R}[[x]][T]$ mogą przyjmować wartości zespolone, byle tylko ich część rzeczywista i urojona była postaci

$$\varphi(y^{1/p}), \quad y^{1/p} = (y_1^{1/p}, \dots, y_m^{1/p}),$$

gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$ i $\varphi(y) \in \mathbb{R}\langle y \rangle$.

Wniosek 5.4. *Jeżeli nierozkładalny wielomian Weierstrassa*

$$P(x,T) = T^d + a_1(x)T^{d-1} + ... + a_d(x) \in \mathbb{C}[[x]][T]$$

ma $\mathcal{W}$-analityczny MPP, to współczynniki $a_i(x)$, $i = 1, \dots, d$, wielomianu $P(x,T)$ są $\mathcal{W}$-analityczne.

Wniosek 5.5. *Jeżeli nierozkładalny wielomian Weierstrassa*

$$P(x,T) = T^d + a_1(x)T^{d-1} + ... + a_d(x) \in \mathbb{R}[[x]][T]$$

ma $\mathcal{V}$-analityczny MPP (dopuszczamy wartości zespolone tego pierwiastka), to $P(x,T) \in \mathbb{R}\{x\}[T]$.

Przejdę teraz do twierdzenia Gabrielova o rzędzie i jego uogólnienia na systemy Weierstrassa. Rozważmy odwzorowanie analityczne w zerze:

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : (\mathbb{R}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n_x, 0),$$

i oznaczmy przez

$$\Phi := \varphi^* : \mathbb{R}\{x\} \longrightarrow \mathbb{R}\{y\} \quad \text{oraz} \quad \widehat{\Phi} := \widehat{\varphi^*} : \mathbb{R}[[x]] \longrightarrow \mathbb{R}[[y]],$$

indukowane homomorfizmy $\mathbb{R}$-algebr. Wtedy $\ker\Phi$ i $\ker\widehat{\Phi}$ są ideałami relacji, odpowiednio, zbieżnych i formalnych, pomiędzy składowymi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Bardzo ważnym problemem jest pytanie, czy relacje zbieżne generują relacje formalne, tzn. $\ker\widehat{\Phi} = \ker\Phi \cdot \mathbb{R}[[x]]$. Jego szczególnym przypadkiem jest pytanie postawione już w latach 60-tych przez Grothendiecka [20] i Artina [3], czy uzupełnienie $\widehat{\Phi}$ iniektywnego homomorfizmu algebr lokalnych jest także homomorfizmem iniektywnym.

W ogólnym przypadku, odpowiedź na te pytania jest negatywna (cf. [17] i [21], Chap. 2, § 5). Gabrielov [18] podał jednak pewien warunek wystarczający w terminach rzędu odwzorowania φ, sformułowany poniżej. Oznaczmy przez r_1 generyczny rząd odwzorowania φ w pobliżu zera i połóżmy

$$r_2 := \dim \mathbb{R}[[x]]/\ker\widehat{\Phi} \quad \text{i} \quad r_3 := \dim \mathbb{R}\{x\}/\ker\Phi.$$

Nierówności $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$ zachodzą zawsze. Druga z nich jest oczywista. Dowód pierwszej z nich znajduje się na przykład w pracy Bierstona-Milmana [8] i opiera się na fakcie, że w dostatecznie małym otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^m_y$, wymiar

$$r_2(b) := \dim \mathbb{C}[[X - \varphi(b)]]/ker\widehat{\varphi_b^*}$$

jest większy lub równy od wartości generycznej. Nierówność $r_1 \leqslant r_2$ można także uzyskać metodami czysto algebraicznymi, wykorzystując formułę Spivakowsky'ego, która wyraża rząd generyczny r_1 w termianch waluacji (cf. [43],[40]), oraz nierówności Abhyankara (zob. np. [46], Appendiks 2).

Twierdzenie o rzędzie. *Przy powyższych oznaczeniach, jeśli* $r_1 = r_2$, *to* $r_2 = r_3$ *oraz* $\ker \widehat{\Phi} = \ker \Phi \cdot \mathbb{R}[[x]]$.

Oryginalny dowód Gabrielova [18] jest bardzo trudny i technicznie skomplikowany, a praca Tougerona [44] uczyniła podejście Gabrielova nieco bardziej przystępnym. Twierdzeniem o rzędzie interesowało się bardzo wielu matematyków, między innymi [15, 27, 4, 24, 25, 6, 8, 43, 37, 40]. Warunek Gabrielova równości rzędów jest — jak wykazano w [4] — równoważny temu, że homomorfizm Φ jest domknięty w topologii Krulla, a więc jest on równoważny równości

$$\widehat{\Phi}(\mathbb{R}[[x]]) \cap \mathbb{R}\{y\} = \Phi(\mathbb{R}\{x\}).$$

DOWÓD. (wykorzystujący rektylinearyzację funkcji i analityczne MPP). Ponieważ zbieżne szeregi potęgowe tworzą doskonały pierścień henselowski, więc $\ker \Phi \cdot \mathbb{R}[[x]]$ jest ideałem pierwszym. Zatem mamy równoważność

$$r_2 = r_3 \quad \Leftrightarrow \quad \ker \widehat{\Phi} = \ker \Phi \cdot \mathbb{R}[[x]].$$

Wystarczy więc udowodnić, że jeśli $r_1 = r_2 =: r$, to $r_3 = r$. Dzięki twierdzeniu normalizacyjnemu dla pierścieni formalnych szeregów potęgowych (zob. np. [29], Twierdzenie (45.5)), stosując generyczną liniową zmianę zmiennych możemy założyć, że odwzorowanie $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ ma generyczny rząd r, oraz że ideał $\ker \widehat{\Phi}$ zawiera $n-r$ nierozkładalnych wielomianów Weierstrassa postaci:

$$P_k(x_1, \ldots, x_r, x_k) \in \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_r]][x_k], \quad k = r+1, \ldots, n.$$

Wtedy $P_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_k) = 0$ dla $k = r+1, \ldots, n$. Jest więc oczywiste, że dla zakończenia dowodu wystarczy wykazać zbieżność współczynników wielomianów P_k:

$$P_k(x_1, \ldots, x_r, x_k) \in \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_r\}[x_k], \quad k = r+1, \ldots, n.$$

W tym celu rozważmy

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^r_{(x_1,\ldots,x_r)} \times \mathbb{R}^m_y$$

wykres odwzorowania $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Rozważmy pewien rozkład komórkowy przestrzeni $\mathbb{R}^{m+r}$ zgodny z Γ. Ponieważ odwzorowanie to jest generyczną submersją w otoczeniu zera, więc istnieje komórka $D \subset \Gamma$ taka, że punkt $0 \in \mathbb{R}^{m+r}$ należy do jej domknięcia, i której rzut C na przestrzeń $\mathbb{R}^r_{(x_1,\ldots,x_r)}$ jest komórką otwartą wymiaru r. Zmniejszając nieco komórki C i D można przyjąć, że

$$\overline{D} \cap ((\varphi_1, \ldots, \varphi_r)^{-1}(0) \times \{0\}) = \{0\} \in \mathbb{R}^{m+r},$$

gdzie $\overline{D}$ oznacza domknięcie euklidesowe. Wtedy, dzięki wyborowi definiowalnemu, istnieje sekcja definiowalna

$$\psi : C \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \circ \psi = \mathrm{Id},$$

odwzorowania $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, która przedłuża się w sposób ciągły przez $0 \in \mathbb{R}^r$, przyjmując tam wartość $0 \in \mathbb{R}^m$. Wykorzystamy teraz technikę rektylinearyzacji funkcji definiowalnych, przedstawioną w Rozdziale 3 tej rozprawy. Z twierdzenia o transformacji do ułamkowych przecięć normalnych (Twierdzenie 3.3 lub 3.4 wraz z uwagą po nim następującą), wynika bowiem bezpośrednio, że istnieje skończony ciąg rozdmuchań σ o gładkich centrach taki, że złożenie $\psi \circ \sigma$ jest postaci $f(w^{1/p})$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, $w^{1/p} = (w_1^{1/p}, \ldots, w_r^{1/p})$, oraz

$$f : (\mathbb{R}^r_w, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m_y, 0)$$

jest odwzorowaniem analitycznym w otoczeniu zera, $f(0) = 0$. Wtedy

$$(\varphi_k \circ \psi \circ \sigma)(w) = (\varphi_k \circ f)(w^{1/p}), \quad k = r+1, \ldots, n,$$

są pierwiastkami wielomianów

$$P_k^\sigma(w, x_k) = P_k(\sigma(w), x_k), \quad k = r+1, \ldots, n.$$

Oznacza to, że każdy wielomian P_k, $k = r+1, \ldots, n$, ma analityczny MPP. Dlatego, na mocy Twierdzenia 5.3, wielomiany te mają współczynniki analityczne, co kończy dowód twierdzenia o rzędzie.

Prezentowana wyżej metoda dowodu przenosi się, dzięki Wnioskowi 5.5, na przypadek rzeczywistych systemów Weierstrassa $\mathcal{V}$, które są śladem zespolonych systemów Weierstrassa zamkniętych ze względu na przedłużnie analityczne. Otrzymujemy więc następujące uogólnienie twierdzenia o rzędzie.

Twierdzenie 5.4. *Załóżmy, że*

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : (\mathbb{R}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n_x, 0),$$

jest odwzorowaniem $\mathcal{V}$-analitycznym. Niech $\Phi := \varphi^* : \mathbb{R}\langle x\rangle \longrightarrow \mathbb{R}\langle y\rangle$ będzie indukowanym homomorfizmem i niech $r_3 := \dim \mathbb{R}\langle x\rangle / \ker \Phi$. Wtedy jeśli $r_1 = r_2$, to $r_2 = r_3$ oraz $\ker \widehat{\Phi} = \ker \Phi \cdot \mathbb{R}[[x]]$.

Opierając się na wersji rzeczywistej, wyprowadzę teraz twierdzenie o rzędzie dla zespolonych szeregów potęgowych.

Wniosek 5.6. *Niech*

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : (\mathbb{C}^m_y, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n_x, 0),$$

będzie zespolonym odwzorowaniem analitycznym. Przyjmijmy oznaczenia z twierdzenia o rzędzie. Wtedy jeśli $r_1 = r_2$, to $r_2 = r_3$ oraz $\ker \widehat{\Phi} = \ker \Phi \cdot \mathbb{R}[[x]]$.

Dla dowodu, potraktujmy φ jako rzeczywiste odwzorowanie analityczne:

$$\varphi^{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^{2m}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0).$$

Oznaczmy przez $\Phi^{\mathbb{R}}$ i $\widehat{\Phi^{\mathbb{R}}}$ indukowane homomorfizmy pierścieni rzeczywistych szeregów, odpowiednio, zbieżnych i formalnych. Oczywiście $\ker \widehat{\Phi^{\mathbb{R}}}$ zawiera część rzeczywistą i urojoną zespolonych szeregów formalnych $\zeta(u + iv) \in \ker \widehat{\Phi}$. Dlatego

$$\dim \mathbb{R}[[u, v]] / \ker \widehat{\Phi^{\mathbb{R}}} \leqslant 2 \cdot \dim \mathbb{C}[[x]] / \ker \widehat{\Phi}.$$

Ponieważ generyczny rząd odwzorowania $\varphi^{\mathbb{R}} = 2r_1$, mamy nierówności

$$2r_1 \leqslant \dim \mathbb{R}[[u, v]] / \ker \widehat{\Phi^{\mathbb{R}}} \leqslant 2r_2 = 2r_1,$$

a więc odwzorowanie $\varphi^{\mathbb{R}}$ spełnia założenia twierdzenia o rzędzie dla rzeczywistych szeregów potęgowych. Dlatego

$$\dim \mathbb{R}\{u, v\} / \ker \Phi^{\mathbb{R}} = 2r_1 = 2r_2.$$

Jednak $\dim \mathbb{R}\{u,v\}/\ker\Phi^{\mathbb{R}} = 2r_3$, gdyż na mocy twierdzenia Milmana [28], $\ker\Phi^{\mathbb{R}}$ pokrywa się z ideałem generowanym w $\mathbb{R}\{u,v\}$ przez części rzeczywiste i urojone zespolonych szeregów z $\ker\Phi$. Stąd $r_1 = r_2 = r_3$, co było do okazania.

Na koniec przypomnę pojęcie zespolonych systemów Weierstrassa, które są zamknięte ze względu na branie części rzeczywistej i urojonej, rozważane przez K.J. Nowaka [34]. Są to systemy spełniające następujący warunek: jeśli

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha \in \mathcal{W}_n \quad \text{i} \quad c_\alpha = a_\alpha + i\cdot b_\alpha \in \mathbb{C},\ a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R},$$

to $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha$, $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha x^\alpha \in \mathcal{W}_n$. Ich przykładem jest tu znowu system zbieżnych szeregów różniczkowo algebraicznych, który omówię na końcu tego rozdziału. Posiadają one własność opisaną poniżej.

Lemat 1. *Niech $h \in \mathbb{C}[[x]]$, $x = u + iv$, $h(u+iv) = f(u,v) + i\cdot g(u,v)$ z $f, g \in \mathbb{R}[[u,v]]$. Wtedy*

$$h \in \mathcal{W}_n \quad \Leftrightarrow \quad f, g \in \mathcal{W}_{2n}.$$

Implikacja $\Leftarrow$ jest łatwa, gdyż $h(u) = f(u) + ig(u)$. Implikacja odwrotna wynika z faktu, że każdy system Weierstrassa jest zamknięty ze względu na złożenie, a zatem, $h(u+iv) \in \mathcal{W}_{2n}$.

Wydaje się, że możliwe jest uogólnienie twierdzenia o rzędzie na przypadek tych zespolonych systemów Weierstrassa, które są zamknięte ze względu na przedłużanie analityczne oraz branie części rzeczywistej i urojonej. Wymagałoby to, jak sądzę, uogólnienia twierdzenia Milmana, które używałam w dowodzie Wniosku 5.6, na zespolone systemy zamknięte ze względu na branie części rzeczywistej i urojonej. Przykładem takich systemów Weierstrassa jest system zbieżnych szeregów różniczkowo algebraicznych, który pokrótce teraz omówię. Zacznę od przypomnienia definicji.

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem charakterystyki zero. Dla szeregu $f \in \mathbb{K}[[x]]$, $x = (x_1, ..., x_m)$ i $\alpha \in \mathbb{N}^m$, połóżmy

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \quad \text{i} \quad D^* f = (D^\alpha f)_{\alpha\in\mathbb{N}^m}.$$

Przez $\mathbb{K}(D^*f) \subset \mathbb{K}((x))$, gdzie $\mathbb{K}((x))$ jest ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{K}[[x]]$, oznaczamy ciało generowane nad $\mathbb{K}$ przez pochodne cząstkowe $\{D^\alpha f :\ \alpha \in \mathbb{N}^m\}$.

Szereg potęgowy $f(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ nazywamy różniczkowo algebraicznym nad $\mathbb{K}$ jeżeli $\mathbb{K}(D^*f)$ ma skończony stopień przestępny nad $\mathbb{K}$. Przez $\mathbb{K}[[x]]^{da}$ będziemy oznaczali podpierścień w $\mathbb{K}[[x]]$ tych szeregów potęgowych, które są różniczkowo algebraiczne nad $\mathbb{K}$; oczywiście, $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[[x]]^{da} \subset \mathbb{K}[[x]]$. Jak udowodnił van den Dries [13], Twierdzenie 5.2, szeregi różniczkowo algebraiczne tworzą system Weierstrassa:

Twierdzenie 5.5. *Rodzina*

$$\mathbb{K}[[x]]^{da}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m), \quad m \in \mathbb{N},$$

jest systemem Weierstrassa nad $\mathbb{K}$.

Podamy teraz użyteczną charakteryzację różniczkowej algebraiczności.

Lemat 2. *Formalny szereg potęgowy $f \in \mathbb{K}[[x]]$ jest różniczkowo algebraiczny, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków równoważnych:*

1) stopień przestępny $tr.deg_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}(D^*f) < \infty$;

2) ciało $\mathbb{Q}(D^*f)$ jest skończenie generowane nad $\mathbb{Q}$;

3) stopień przestępny $tr.deg_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(D^*f) < \infty$.

DOWÓD. Implikacje 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) są oczywiste. Dla dowodu implikacji 1) $\Rightarrow$ 2), weźmy skończony podzbiór $A \subset \mathbb{N}^m$ taki, że zbiór $\{D^\alpha f :\ \alpha \in A\}$ stanowi bazę przestępną ciała $\mathbb{K}(D^*f)$ nad $\mathbb{K}$, oraz $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\forall\, \alpha \in A\ \ |\alpha| < N$.
Wtedy $\forall\, \beta \in \mathbb{N}^m,\ |\beta| = N$ istnieją wielomiany

$$P \in \mathbb{K}[T_\alpha :\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ |\alpha| < N \text{ lub } \alpha = \beta]$$

takie, że $P(D^*f) = 0$. Spośród nich wybieramy wielomian P_β, który ma minimalny stopień względem zmiennej T_β.
Wtedy

$$\frac{\partial P_\beta}{\partial T_\beta}(D^*f) \neq 0.$$

Niech $e_1 = (1, ..., 0), ..., e_m = (0, ..., 1)$. Ponieważ $\frac{\partial}{\partial x_i}(P_\beta(D^*f)) = 0$, dla $i = 1, ..., m$, otrzymujemy:

$$\frac{\partial P_\beta}{\partial T_\beta}(D^*f) D^{\beta+e_i} f + \sum_{|\alpha|<N} \frac{\partial P_\beta}{\partial T_\alpha}(D^*f) D^{\alpha+e_i} f = 0,$$

a stąd

$$D^{\beta+e_i}f = -\frac{\sum_{|\alpha|<N} \frac{\partial P_\beta}{\partial T_\alpha}(D^* f) D^{\alpha+e_i} f}{\frac{\partial P_\beta}{\partial T_\beta}(D^* f)}.$$

Niech teraz $L \subset \mathbb{K}$ będzie ciałem generowanym nad $\mathbb{Q}$ przez współczynniki wielomianów P_β, $|\beta| = N$. Z powyższej równości wynika, że

$$L(D^\alpha f :\ |\alpha| \leqslant N+1) \subset L(D^\alpha f :\ |\alpha| \leqslant N),$$

a stąd, przez indukcję ze względu na k, że

$$L(D^\alpha f :\ |\alpha| \leqslant N+k) \subset L(D^\alpha f :\ |\alpha| \leqslant N).$$

Zatem

$$L(D^* f) \subset L(D^\alpha f :\ |\alpha| \leqslant N).$$

Oznacza to, że ciało $L(D^* f)$ jest skończenie generowanym rozszerzeniem ciała L, a więc także skończenie generowanym rozszerzeniem ciała $\mathbb{Q}$. Dlatego tym bardziej ciało $\mathbb{Q}(D^* f)$ jest skończenie generowane nad $\mathbb{Q}$, co było do okazania.

Niech teraz $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oraz niech $U \subset \mathbb{K}^m$ będzie niepustym podzbiorem otwartym i spójnym. Mówimy, że funkcja analityczna $f : U \longrightarrow \mathbb{K}$ jest różniczkowo algebraiczna, gdy ciało generowana nad $\mathbb{K}$ przez jej pochodne cząstkowe ma skończony stopień przestępny nad $\mathbb{K}$. Oczywiście, jeśli szereg potęgowy $f \in \mathbb{K}[[x]]$ jest zbieżny na niepustym podzbiorze otwartym i spójnym $U \subset \mathbb{K}^m$ do funkcji analitycznej $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{K}$, to $\widetilde{f}$ jest różniczkowo algebraiczna wtedy i tylko wtedy, gdy szereg potęgowy f jest różniczkowo algebraiczny. Dlatego rodzina

$$\mathbb{K}\{x\}^{da} := \mathbb{K}[[x]]^{da} \cap \mathbb{K}\{x\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m), \quad m \in \mathbb{N},$$

jest zbieżnym systemem Weierstrassa nad $\mathbb{K}$, który jest zamknięty ze względu na przedłużanie analityczne.

Zauważmy na koniec, że zespolony system Weierstrassa szeregów różniczkowo algebraicznych jest także systemem zamkniętym ze względu na branie części rzeczywistej i urojonej. Wynika to np. z warunku 3) lub 4) powyższej charakteryzacji różniczkowej algebraiczności. Istotnie, niech

$$h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}\{x\}^{da} \quad \text{oraz} \quad c_\alpha = a_\alpha + i \cdot b_\alpha \in \mathbb{C},\ a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R};$$

położmy
$$\overline{h} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \overline{c}_\alpha x^\alpha, \quad f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha \ \text{ i } \ g = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha x^\alpha.$$
Wtedy $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(D^* h) < \infty$, a stąd $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(D^* \overline{h}) < \infty$. Dlatego
$$\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(D^* f, D^* g) = \operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(D^* h, D^* \overline{h}) < \infty,$$
a więc $f, g \in \mathbb{C}\{x\}^{da}$, co było do okazania.

Literatura

[1] S.S. Abhyankar, *Local Analytic Geometry*, World Scientific Pub. Co., Singapore, London, 2001.

[2] —, T. Moh, *Reduction theorem for divergent power series*, J. Reine Angew. Math. **241** (1970), 27–33.

[3] M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Invent. Math. **5** (1968), 277–291.

[4] J. Becker, W.R. Zame, *Applications of functional analysis to the solutions of power series equations*, Math. Ann. **243** (1979), 37–54.

[5] R. Bianconi, *Model completeness results for elliptic and abelian functions*, Ann. Pure Appl. Logic **54** (1991), 121–136.

[6] E. Bierstone, P.D. Milman, *Relations among analytic functions*, I and II, Ann. Inst. Fourier(Grenoble) **37** (1) i (2) (1987), 187–239 i 49–77.

[7] —, —, *Semianalytic and subanalytic sets*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **67** (1988), 5–42.

[8] —, —, *Subanalytic Geometry, Model Theory, Algebra and Geometry*, MSR, Publ., Vol. 39, (2000).

[9] —, —, *Resolution of singularities in Denjoy–Caleman classes*, Selecta Math., New Ser. **10** (2004), 1–28.

[10] W.-L. Chow, *On the theorem of Bertini for local domains*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **44** (6) (1958), 580–584).

[11] J. Denef, L. Lipshitz, *Ultraproducts and approximation in local rings. II*, Math. Ann. **253** (1980), 1–28.

[12] —, L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, Ann. Math. **128** (1988), 79–138.

[13] L. van den Dries, *On the elementary theory of restricted elementary functions*, J. Symbolic Logic, **53** (1988), 796–808.

[14] —, A. Macintyre, D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation*, Ann. Math. **140** (1994), 183–205.

[15] P.M. Eakin, G.A. Harris, *When $\Phi(f)$ convergent implies f convergent*, Math. Ann. **229** (1977), 201–210.

[16] A.M. Gabrielov, *Projections of semi–analytic sets*, Funct. Anal. Appl. **2** (1968), 282–291.

[17] —, *Formal relations between analytic functions*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 318–319; Funkc. Anal. Prilož. **5** (1971), 64–65.

[18] —, *Formal relations between analytic functions*, Math. USSR Izvestija **7** (1973), 1056–1088; Izvestija Akad. Nauk SSSR **37** (1973), 1056–1090.

[19] H. Grauert, R. Remmert, *Analyttische Stellenalgebren*, Grundl. 176, Springer-Verlag, 1971.

[20] A. Grothendieck, *Techniques de construction en géométrie analytique*, Séminaire Henri Cartan **13**, No. 1 (1960-61).

[21] R. Gunning, H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall Inc., 1965.

[22] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

[23] J. Herbrand, *Recherches sur la théorie da la démonstration*, Trav. Soc. Sci. Lett. Varsovie Cl. III, **33** (1930), 1-128.

[24] S.Izumi, *Gabrielov's rank condition is equivalent to an inequality of reduced orders*, Math. Ann. **276** (1986), 81–89.

[25] —, *The rank condition and convergence of formal functions*, Duke Math. J. **59** (1989), 241–264.

[26] S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Analiza formalna i funkcje analityczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2005.

[27] P.D. Milman, *Analytic and polynomial homomorphisms of analytic rings*, Math. Ann. **232** (1978), 247–253.

[28] —, *Complex analytic and formal solutions of real analytic equations*, Math. Ann. **233** (1978), 1–7.

[29] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience Publ., New York, London, 1962.

[30] K.J. Nowak, *A model-theoretic criterion for quantifier elimination and its application to geometry*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **46** (1998), 377–381.

[31] —, *A model-theoretic version of the complement theorem*, I, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **47** (1999), 345–354; II, *Applications*, **47** (1999), 355–361.

[32] —, *On the Abhyankar–Jung theorem for henselian $k[x]$-algebras of formal power series*, IMUJ Preprint **2**, 2009.

[33] —, *The Abhyankar–Jung theorem for excellent henselian subrings of formal power series*, Ann. Polon. Math. **98** (2010), 221–229.

[34] —, *Rectilinearization of functions definable by a Weierstrass system and its applications*, Ann. Polon. Math. **99** (2010), 129–141.

[35] —, *Supplement to the paper "Quasianalytic perturbation of multiparameter hyperbolic polynomials and symmetric matrices"*, Ann. Polon. Math. **103** (1) (2012), 101-107.

[36] A. Parusiński, G. Rond, *The Abhyankar–Jung theorem*, J. Algebra **365** (2012), 29–41.

[37] W. Pawłucki, *On Gabrielov's regularity condition for analytic mappings*, Duke Math. J. **65** (1992), 299–311.

[38] A. Piękosz, *Wstęp do teorii modeli*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, 2008.

[39] A. Prestel, *Lectures on Formally Real Fields*, Lesture Notes in Math. **1093**, Springer-Verlag, 1984.

[40] G. Rond, *Homomorphisms of local algebras in positive characteristic*, J. Algebra **322** (2009), 4382–4407.

[41] C. Rotthaus, *On the approximation property of excellent rings*, Invent. Math. **88** (1987), 39–63.

[42] —, *Rings with approximation property*, Math. Ann. **287** (1990), 455–466.

[43] M. Spivakovsky, *On convergence of formal functions: a simple algebraic proof of Gabrielov's theorem*, Publ. Dip. Mat., Univ. di Pisa (volume dedicated to Aldo Andreotti), Seminario di Geometria Reale, Vol. 1.41 (560) (1990), 69–77.

[44] J.-Cl. Tougeron, *Sur les racines d'un polynôme à coefficients séries formelles*, Real Analytic and Algebraic Geometry (Trento 1988), Lecture Notes in Math. **1420**, Springer-Verlag, 1990.

[45] P. Du Val, *Elliptic Functions and Elliptic Curves*, Cambridge University Press, 1973.

[46] O. Zariski, P.Samuel *Commutative Algebra*, Vol. II, van Nostrand Co., New York, 1960.