dr hab. Dariusz Idczak
Uniwersytet Łódzki

18 grudnia 2019 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Yunru Bai „Well-Posedness of Variational-Hemivariational Inequalities with Applications"

Przedstawioną rozprawę doktorską stanowi część monotematycznego cyklu trzech prac:

[I] Y.R. Bai, S. Migórski, S.D. Zeng, *Well-posedness of a class of generalized mixed hemivariational-variational inequalities*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 48 (2019), 424-444

[II] S. Migórski, Y.R. Bai, S.D. Zeng, *A class of generalized mixed variational-hemivariational inequalities II: Applications*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 50 (2019), 633-650

[III] S. Migórski, Y.R. Bai, *Well-posedness of history-dependent evolution inclusions with applications*, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik 70 (2019), 22p,

opisana w załączonych oświadczeniach współautorów, określających indywidualny wkład każdego z nich w powstanie prac [I], [II], [III]. Z oświadczeń wynika, że udział Kandydatki w tych pracach wynosi co najmniej 50%. Czasopisma, w których opublikowane zostały powyższe prace wymienione są liście czasopism punktowanych MNiSW, z punktacją 100 (prace [I] i [II]) i 70 (praca [III]).

Cykl prac uzupełniony jest krótkim wprowadzeniem oraz syntetycznym przedstawieniem głównych wyników, uzyskanych w powyższych pracach. Ponadto, załączony został wykaz cytowanej literatury oraz wykaz publikacji Kandydatki zawierający 13 pozycji.

Rozprawa poświęcona jest nierównościom wariacyjno-hemiwariacyjnym i ich zastosowaniom, w zakresie dobrego stawiania problemów, t.zn. istnienia i jednoznaczności rozwiązań oraz ich ciągłej zależności od parametrów. W pierwszych dwóch pracach badane są nierówności z mnożnikami Lagrange'a, natomiast trzecia praca poświęcona jest zagadnieniom z pamięcią.

Tematyka rozprawy jest aktualna. Badanie nierówności wariacyjnych zapoczątkowane zostało w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku, natomiast nierówności hemiwariacyjnych - w latach osiemdziesiątych. Obecnie, badane są także nierówności wariacyjno-hemiwariacyjne. Nierówności takie pojawiają się przy słabym formułowaniu problemów opisanych w postaci inkluzji różniczkowych, zawierających zarówno subróżniczki funkcji wypukłych, jak i uogólnione gradienty funkcji lokalnie lipschitzowskich. Znajdują one zastosowanie do opisu wielu procesów fizycznych, głównie w zagadnieniach kontaktowych mechaniki.

W pracy [I] badany jest układ dwóch nierówności, z których jedna jest wariacyjno-hemiwariacyjna, z mnożnikami Lagrange'a i z ograniczeniami w postaci przynależnści rozwiązań (u, λ) do ustalonego zbioru $K \times \Lambda$ (Problem 1). W pierwszej, teoretycznej części pracy pokazane jest (Twierdzenie 8), że Problem 1 równoważny jest m.in. z problemem (6) opisanym przez jedną nierówność wariacyjno-hemiwariacyjną. Następnie dowodzi się istnienia rozwiązania Problemu 1 w oparciu o tę równoważność. Rozważane są tutaj trzy przypadki ograniczeń, a mianowicie, gdy zbiory K, Λ są ograniczone (Twierdzenie 9), zbiór K jest nieograniczony, a zbiór Λ jest ograniczony (Twierdzenie 10) i zbiory K, Λ są nieograniczone (Twierdzenie 11). Dowód Twierdzenia 9 oparty jest na twierdzeniu o punkcie stałym odwzorowania wieloznacznego (Twierdzenie 6), z wykorzystaniem elementów analizy niegładkiej, natomiast dowody Twierdzeń 10 i 11 oparte są Twierdzeniu 9. Dowodzi się także jednoznaczności rozwiązania (u, λ) względem u w każdym z rozpatrywanych przypadków, przy założeniu silnej monotoniczności operatora A występującego w układzie (Twierdzenie 12). Rozważania tej części pracy kończy Twierdzenie 13 o stabilności rozwiązania względem jego pierwszej składowej. Druga część pracy [I] ma charakter aplikacyjny. Badany jest tutaj statyczny model kontaktu w teorii sprężystości, zapisany w postaci układu równości i inkluzji różniczkowej, zawierającej subróżniczkę funkcji wypukłej, z warunkami brzegowymi zawierającymi uogólniony gradient (Problem 14). Problem ten formułuje się w postaci słabej, będącej układem wariacyjno-hemiwariacyjnych nierówności z mnożnikami Lagrange'a (Problem 15). Istnienie rozwiązania Problemu 15 uzyskuje się poprzez wykazanie istnienia rozwiązania problemu (55)-(56), do którego zastosowano Twierdzenie 11. Ponieważ rozwiązanie Problemu (55)-(56) jest także rozwiązaniem Problemu 15, więc to dowodzi istnienia rozwiązania Problemu 15, czyli słabego rozwiązania wyjściowego Problemu 14. Jednoznaczność rozwiązania Problemu 15 uzyskuje się analogicznie, jak w dowodzie Twierdzenia 12.

Praca [II] ma charakter aplikacyjny. W pracy tej badane są dwa problemy natury fizycznej, a mianowicie uogólniony model kontaktowy z tarciem dla ciała sprężystego, opisany przy pomocy równania eliptycznego z mieszanymi warunkami brzegowymi, zawierającymi uogólniony gradient funkcji lipschitzowskiej (Problem 7) i model kontaktowy bez tarcia w postaci inkluzji różniczkowej opisanej przy pomocy gradientu funkcji lipschitzowskiej (Problem 16). Korzystając z Wniosków 4 i 5 wynikających bezpośrednio z Twierdzeń 2 i 3 pochodzących z pracy [5] (wg numeracji przyjętej w [II]) uzyskano istnienie słabych rozwiązań w/w problemów (Twierdzenia 14 i 18), przy czym przez słabe rozwiązanie Problemu 7 rozumie się funkcję u taką, że wraz z pewnym λ tworzy parę (u, λ) stanowiącą rozwiązanie Problemu 13, natomiast przez słabe rozwiązanie Problemu 16 rozumie się funkcję u, która wraz z pewnym λ tworzy parę (u, λ) będącą rozwiązaniem Problemu 17. W przypadku Problemu 16 uzyskano także jednoznaczność rozwiązania.

Jako, że w pracy [II] korzysta się z wyników nieopublikowanej pracy [5] (wg numeracji przyjętej w [II]), umieszczonej na platformie *arXiv*, omówię krótko twierdzenia z pracy [5], wykorzystywane w pracy [II]. Otóż, w bezpośredni sposób w pracy [II] wykorzystywane są Twierdzenia 10 i 15 z pracy [5] i w pośredni sposób (bo w dowodzie Twierdzenia 10) - Twierdzenie 9 z pracy [5]. Co się tyczy Twierdzenia 9, to można je wywnioskować z Twierdzenia 8 z pracy [I] o równoważności problemów. Mimo, że na początku pracy [I] zakłada się zwartość operatora γ (zwartość γ nie jest zakładana w [II]), to w dowodzie Twierdzenia 8 tej zwartości nie wykorzystuje się i w konsekwencji Twierdzenie 9 z pracy [5] można wywnioskować z Twierdzenia 8 z pracy [I] (należy dodać, że w pracy [5] podany jest bezpośredni dowód Twierdzenia 9, oparty na innym twierdzeniu o punkcie stałym, aniżeli dowód Twierdzenia 8 w pracy [I]). Dowody Twierdzeń 10 i 15 podane w pracy [5] są poprawne.

Celem pracy [III] jest wykazanie istnienia i jednoznaczności rozwiązania oraz ciągłej zależności rozwiązań od parametrów funkcyjnych dla inkluzji ewolucyjnej z pamięcią (problem (1.1)-(1.2) i identyczny z nim Problem 4), a także przedstawienie zastosowań uzyskanych wyników do problemu kontaktowego z tarciem i pamięcią w teorii lepko-sprężystości (Problem 8) oraz do ewolucyjnego zagadnienia półprzepuszczalności z warunkami brzegowymi, opisanymi przy pomocy subróżniczki funkcji wypukłej i uogólnionego gradientu funkcji lipschitzowskiej (Problem 14).

W pierwszej, teoretycznej części pracy najpierw formułuje się Problem 2, który jest ogólniejszy od Problemu 4 i dla Problemu 2 dowodzi się istnienia i jednoznaczności rozwiązania (Twierdzenie 3). Stąd wyprowadza się istnienie i jednoznaczność rozwiązania Problemu 4 (Twierdzenie 5). Następnie, dowodzi się oszacowania a priori rozwiązań Problemu 4 (Stwierdzenie 6) i w oparciu o ten fakt dowodzi się ciągłej zależności rozwiązań od parametrów funkcyjnych dla Problemu 4, w słabych topologiach (Twierdzenie 7).

Druga część pracy ma charakter aplikacyjny. Pierwsze z zastosowań dotyczy w/w Problemu 8. Problem ten formułuje się w postaci słabej, a mianowicie w postaci wariacyjno-hemiwariacyjnej nierówności drugiego rzędu (Problem 9), którą po stosownym podstawieniu zastępuje się równoważną nierównością wariacyjno-hemiwariacyjną pierwszego rzędu (Problem 10). Następnie, formułuje się inkluzję różniczkową z pamięcią (Problem 11), rozważaną w pierwszej części pracy. Przy pomocy Twierdzenia 7 wyprowadza się istnienie, jednoznaczność i ciągłą zależność dla Problemu 11 (Twierdzenie 12). Stąd, powołując się na równoważność Problemów 10 i 11, otrzymuje się twierdzenie o istnieniu, jednoznaczności i ciągłej zależności dla Problemu 9 (Wniosek 13). Drugie zastosowanie dotyczy w/w Problemu 14. Metoda postępowania jest tutaj analogiczna jak w przypadku pierwszego przykładu. A mianowicie, Problem 14 zapisuje się w postaci słabej, t.zn. w postaci nierówności różniczkowo-hemiwariacyjnej pierwszego rzędu (Problem 15), a następnie, powołując się na równoważność Problemu 15 i pomocniczego Problemu 17, przy pomocy Twierdzenia 7 zastosowanego do problemu pomocniczego, uzyskuje się istnienie, jednoznaczność i ciągłą zależność dla Problemu 15.

Wyniki pracy [I] uogólniają, na przypadek układu nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnej z nierównością wariacyjną, rezultaty uzyskane przez Matei w pracy [3] (wg numeracji przyjętej w [I]) dla układu nierówności hemivariacyjnej z nierównością wariacyjną. W pracy [3] uzyskano trzy twierdzenia o istnieniu rozwiązań, przy czym nie badano jednoznaczności rozwiązań oraz ich ciągłej zależności od parametrów. Dwa szczególne przypadki Problemu 1 z pracy [I] badane były także w pracy [9] (wg numeracji przyjętej w [I]). Dokładniej, w pracy [9] badane było istnienie i jednoznaczność rozwiązania dla układów bez funkcjonałów spełniających warunek Lipschitza. Jeśli chodzi o pracę [II], to szczególnym przypadkiem Problemu 7, a mianowicie, gdy występujący w nim operator różniczkowy jest p-laplasjanem, jest Problem 8. Szczególne przypadki tego ostatniego były badane przez Cojocaru i Matei w pracy [6] oraz Matei w pracy [7] (wg numeracji przyjętej w [II]). W pracy [6] badane jest istnienie rozwiązania, jego jednoznaczność i ciągła zależność rozwiązań od parametrów, dla układu bez warunku brzegowego w postaci inkluzji z uogólnionym gradientem. W pracy [7] badany jest Problem 8 z pracy [II] w przypadku szczególnym, a mianowicie przy założeniu, że $n = 2$, a $j(x, s) = |\sin s|$. W pracy [7] badany jest także Problem 16 z pracy [II] w przypadku, gdy $n = 2$, $d = 3$. Mówiąc dokładniej, rozważa się szczególny przypadek układu (30)-(31), bez składnika w postaci uogólnionego gradientu i z nieco innymi warunkami brzegowymi, aniżeli w pracy [II]. Dodajmy, że w pracy [7] podejmowana jest jedynie kwestia istnienia rozwiązania, a w pracy [II], zastosowanie do Problemu 16 rezultatu z pracy [5] (wg numeracji przyjętej w [II]) pozwoliło uzyskać obok istnienia także jednoznaczność rozwiązania badanego problemu (względem pierwszej składowej). Problem 2 badany w pracy [III] jest ogólniejszy, aniżeli problem badany w pracy [21] (wg numeracji przyjętej w pracy [III]), gdzie nie rozważano składnika w postaci subróżniczki funkcji wypukłej. Ponadto, istnienie jednoznacznego rozwiązania Problemu 2 uzyskane zostało w pracy [III] przy słabszym, aniżeli w pracy [8], warunku (H_3), natomiast ciągła zależność rozwiązań od parametrów funkcyjnych uzyskana została w słabych topologiach, w odróżnieniu od pracy [32], gdzie uzyskano ciągłą zależność względem norm i dla inkluzji, w której uogólniony gradient nie zależy od historii.

Usterki drukarskie i redakcyjne w pracach [I], [II], [III] są nieliczne i łatwe do usunięcia. W pracy [II], w oszacowaniach na str. 642 powinno być $\frac{\partial u(x)}{\partial n_a}$ zamiast $\|\nabla u(x)\|^{p-2} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}$. W pracy [III] nieprecyzyjnie sformułowane jest założenie (H_4)(iii) - wydaje się, że tak sformułowana własność byłaby pomocna w przypadku badania ciągłej zależności rozwiązań także od operatorów R, R_1, S. W Stwierdzeniu 6 ważne jest, że stała C nie zależy od w_0 i f. Ponadto, w dowodzie tego stwierdzenia, po obu stronach nierówności, do której stosowany jest lemat Gronwalla, pominięty został składnik $\frac{1}{2}\|w(t)\|_H^2$. Te usterki także można bez trudu usunąć. W mojej opinii, w pracy [III] dobrze byłoby podać uzasadnienie jednoznaczności rozwiązań Problemów 10 i 15.

W podsumowaniu należy stwierdzić, że przedstawiona rozprawa doktorska zawiera oryginalne wyniki w zakresie nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnych i ich zastosowań. W pracach stosowany jest zaawansowany aparat matematyczny (ana-liza funkcjonalna, analiza niegładka, przestrzenie Sobolewa), co dobrze świadczy o ogólnej wiedzy teoretycznej Kandydatki w zakresie dyscypliny matematyka. Rozumowania przedstawione w pracach, niejednokrotnie złożone i zaawansowane technicznie, świadczą o przygotowaniu Kandydatki do samodzielnej pracy naukowej. Konkludując, uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia ustawowe wymagania i wnoszę o dopuszczenie mgr Yunru Bai do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

D. Idczak