dr hab. Aleksander Ćwiszewski, prof. UMK
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 09.02.2020 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Yunru Bai

pt. „Well-Posedness of Variational-Hemivariational Inequalities with Applications"

Przedstawiona rozprawa doktorska została przygotowana na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Promotorem rozprawy jest prof. dr hab. Stanisław Migórski. Rozprawa jest napisana w języku angielskim i na rozprawę składają się trzy opublikowane artykuły naukowe:

(I) Y.R. Bai, S. Migórski, S.D. Zeng, *Well-posedness of a class of generalized mixed hemivariational-variational inequalities*, Nonlinear An. RWA 48 (2019), 424–444;

(II) S. Migórski, Y.R. Bai, S.D. Zeng, *A class of generalized mixed variational-hemivariational inequalities II: applications*, Nonlinear An. RWA 50 (2019), 633–650;

(III) S. Migórski, Y.R. Bai, *Well-posedness of history-dependent evolution inclusions with applications*, Z. Angew. Math. Phys. 70, 114 (22 pp.) (2019).

Główne wyniki zostały streszczone w opracowaniu (26 stron), które zostało przygotowane w języku angielskim. Załączono oświadczenia współautorów powyższych publikacji, z których wynika, że udział Pani Y. Bai w każdej z publikacji wynosi ok. 50 procent.

Wyniki rozprawy

Pierwsze dwie prace poświęcone są zagadnieniom, które można zapisać w postaci abstrakcyjnej jako

$$(S)\quad \begin{cases} \langle Au, v-u\rangle + b(v,\lambda) - b(u,\lambda) + \varphi(v) - \varphi(u) + J^0(\gamma u, \gamma v - \gamma u) \geq \langle f, v-u\rangle \\ \qquad\qquad \text{dla } v \in K, \\ b(u, \rho - \lambda) \leq 0 \text{ dla } \rho \in \Lambda. \end{cases}$$

Tutaj K i Λ są niepustymi podzbiorem refleksywnych przestrzeni, odpowiednio, V i E. Mówiąc ogólnie (i nieco upraszczając): $\gamma : V \to X$, gdzie X jest jeszcze jedną refleksywną przestrzenią Banacha, jest zwartym operatorem liniowym, $J : X \to\!\!\to R$ jest odwzorowaniem spełniającym warunek Lipschitza, operator $A : V \to V^*$ jest operatorem koercytywnym i górnie hemiciągłym takim, że $A + \gamma^* \circ J \circ \gamma$ jest operatorem monotonicznym,

$b : V \times E \to \mathbb{R}$ jest liniowe względem drugiej zmiennej oraz wypukłe i dolnie półciągłe względem pierwszej zmiennej oraz funkcjonał $\varphi : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest wypukły i dolnie półciągły. W pracy (I) autorzy wykazują, że powyższe zagadnienie posiada rozwiązanie. Powtarzają tu dowód Theorem 2 z pracy A. Matei, *A mixed hemivariational-variational problem and applications*, Comp. Math. Appl. 77 (2019), 2989-3000, z ogólnym funkcjonałem J spełniającym warunek Lipschitza i dodatkowym składnikiem φ (nie wpływa to zasadniczo na przebieg dowodu). Podobnie jak w pracy Matei, rozpatrzono tu przypadki, gdy K i/lub Λ są nieograniczone. Otrzymany abstrakcyjny model zastosowano do statycznego modelu deformacji sprężystego ciała w zetknięciu ze sztywną przeszkodą oraz podstawą, który zapisuje się jako

$$(S_1) \quad \begin{cases} \sigma(x) \in \mathcal{E}(x, \varepsilon(u(x))) + \partial_u \phi(x, \varepsilon(u(x))), & x \in \Omega, \\ \operatorname{Div} \sigma(x) + f_0(x) = 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym z gładkim brzegiem $\partial\Omega$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ jest przemieszczeniem, a $\sigma : \overline{\Omega} \to \mathbb{S}^N$ jest tensorem naprężeń, gdzie $\mathbb{S}^N$ jest przestrzenią symetrycznych tensorów rzędu drugiego, $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ i $\varepsilon_{ij}(u) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$. Odwzorowanie $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^N \to \mathbb{S}^N$ interpretuje się jako uogólniony operator sprężystości, a wypukły względem drugiej zmiennej funkcjonał ϕ jest potencjałem ($\partial_u \phi$ oznacza subróżniczkę w sensie analizy wypukłej). Na czterech rozłącznych częściach brzegu zadano warunek Dirichleta dla u oraz nieliniowe warunki na brzegu dla σ wyrażone przy użyciu pochodnej Clarke'a względem drugiej zmiennej dla funkcjonału j. Zagadnienie (S_1) sprowadzono do postaci (S) po doborze odpowiednich przestrzeni V, E i X oraz zdefiniowaniu operatora A wyznaczonego przez $\mathcal{E}$, funkcjonału b wyznaczonego przez część warunków brzegowych, funkcjonału φ wyznaczonego przez ϕ, γ będącego operatorem śladu oraz J wyznaczonego przez drugą część warunków brzegowych z j. Poczyniono założenia, które zapewniają, że zagadnienie (S_1) spełnia założenie abstrakcyjnego twierdzenia o istnieniu dla (Z).

W pracy (II), autorzy wykorzystują abstrakcyjny wynik z pracy (I), do wykazania istnienia słabych rozwiązań dla dwóch typów zagadnień motywowanych modelami mechaniki ciał sprężystych (o nieliniowej charakterystyce). Pierwsze z rozpatrywanych zagadnień jest postaci

$$(S_2) \quad -\operatorname{div}(a(\nabla u(x))) = f_0(x), \; x \in \Omega,$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest otwartym zbiorem z brzegiem klasy C^2. Pole wektorowe $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, wyznaczające nieliniowy operator różniczkowy, należy do klasy pól, definiujących m.in. p-laplasjan, (p,q)-laplasjan czy operator krzywizny. Rozpatruje się tu mieszane warunki brzegowe, tj. na czterech rozłącznych częściach brzegu $\partial\Omega$ zadaje się: warunki typu Dirichleta $u(x) = 0$, warunki typu Neumanna

$$a(\nabla u(x)) \cdot \nu(x) = f_2(x),$$

nieliniowe warunki typu Robina

$$a(\nabla u(x)) \cdot \nu(x) \in \partial_u j(x, u(x)),$$

gdzie j jest funkcjonałem spełniającym warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej, a $\partial_u j(x, u(x))$ jest gradientem Clarke'a względem tej zmiennej, oraz

$$a(\nabla u(x)) \cdot \nu(x) \in -g(x) \cdot \operatorname{sign}(u(x)) + (1 - |\operatorname{sign}(u(x))|) \cdot [-g(x), g(x)].$$

Zagadnienie to sprowadza się do postaci (S) przez odpowiednie zdefiniowanie przestrzeni V, E i Y oraz operatora różniczkowego A (zadanego przez pole a), odwzorowania γ (operator śladu), funkcjonału b (jako całkowego funkcjonału z funkcją g na odpowiedniej części brzegu) oraz funkcjonału J (jako całki odwzorowania j na odpowiedniej części brzegu). Istnienie słabych rozwiązań dla (S_1) uzyskuje się stosując twierdzenie o istnieniu dla zagadnienia (S) z pracy (I).

Drugim zastosowaniem w pracy (II) jest zagadnienie analogiczne do (S_1)

$$(S_3) \quad \begin{cases} \sigma(x) \in \mathcal{E}(x, \varepsilon(u(x))) + \partial_u G(x, \varepsilon(u(x))), & x \in \Omega, \\ \operatorname{Div} \sigma(x) + f_0(x) = 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

z podobnymi warunkami brzegowymi (tym razem bez nieliniowości j). Pojawia się tu gradient Clarke'a niewypukłego funkcjonału G (zastępującego funkcjonał ϕ). Tym razem funkcjonał J będzie zdefiniowany za pomocą G jako $J(u) := \int_\Omega G(x, \varepsilon(u(x)))\, dx$. Czyniąc odpowiednie założenia na $\mathcal{E}$ i G zagadnienie (S_3) sprowadza się do postaci (S) i korzysta się z abstrakcyjnego twierdzenia o istnieniu z pracy (I).

Praca (III) poświęcona jest zagadnieniom ewolucyjnym z monotoniczną prawą stroną zależną od historii stanu układu i zaburzoną zależnym od czas składnikiem. Dokładniej mówiąc rozważa się zagadnienie różniczkowe

$$(E) \quad \begin{aligned} &\dot{w}(t) + A(t, w(t)) + (R_1 w)(t) + M^* \partial J(t, (Sw)(t), Mw(t)) \\ &\quad + N^* \partial \varphi(t, (Rw)(t), Nw(t)) \ni f(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T) \end{aligned}$$

z warunkiem początkowym $w(0) = w_0$. Tutaj $A : (0,T) \times V \to V^*$, gdzie V jest refleksywną ośrodkową przestrzenią Banacha, $f : (0,T) \to V^*$, $R_1 : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V^*)$, $J : (0,T) \times Z \times X \to \mathbb{R}$, $\varphi : (0,T) \times Y \times U \to \mathbb{R}$ jest wypukły względem trzeciej zmiennej, $M \in \mathcal{L}(V,X)$, $N \in \mathcal{L}(V,U)$, $R : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;Y)$, $R_1 : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V^*)$, $S : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;Z)$, gdzie X, Y, Z i U są przestrzeniami Banacha. Przy odpowiednich założeniach problem istnienia, podobnie jak w pracy W. Han, S. Migórski, M. Sofonea, *Analysis of a general dynamic history-dependent variational-hemivariational inequality*, Nonlinear An. RWA 36 (2017), 69–88, sprowadza się do znajdowania jednoznacznego rozwiązania zagadnienia zagadnień postaci

$$(E_0) \quad \dot{w}(t) + A(t, w(t)) + \partial \psi(t, w(t)) \ni f(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T)$$

z warunkiem początkowym $w(0) = w_0$, gdzie $\psi : (0,T) \times V \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem spełniającym warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej, który w szczególności jest taki, że operator $A(t, \cdot) + \partial\psi(t, \cdot)$ jest monotoniczny i koercytywny. Dowodząc istnienia rozwiązania dla (E_0) poprawia się krok, w którym dokonuje się weryfikacji koercytywności odpowiedniego operatora w dowodzie ze wspomnianej pracy, gdzie użyto twierdzenia typu Browdera o surjektywności względnie pseudo-monotonicznego, ograniczonego i koercytywnego zaburzenia operatora maksymalnie monotonicznego. Pozwala to na złagodzenie jednego z założeń. Zbadano również ciągłe zależności od danych zagadnienia (E). Otrzymane wyniki, podobnie jak w cytowanej przed chwilą pracy, zostały zastosowane do modelu z mechaniki kontaktowej. Pracę kończy zastosowanie abstrakcyjnych wyników do zagadnienia półprzepuszczalności.

Ocena wyników rozprawy

Uzyskanie wyników wchodzących w skład rozprawy wymagało od doktorantki szerokiej znajomości analizy funkcjonalnej, analizy niegładkiej oraz nowszych technik związanych z monotonicznością, a także wiedzy na temat modeli matematycznych w tzw. mechanice kontaktowej (z ang. *contact mechanics*), która stanowi źródło motywacji i zastosowań dla rozważanych w rozprawie zagadnień. Wyniki wchodzące w skład rozprawy są z pewnością nowe i dobrze wpisują się w aktualny nurt badań w teorii nierówności wariacyjnych. Samo sformułowanie abstrakcyjnych zagadnień jest złożone, w tym sensie, że używa się wielu obiektów (przestrzeni i odwzorowań), na które nakłada się szereg warunków (większości tu nie przytaczałem). Są to jednak założenia dosyć naturalne (z technicznego punktu widzenia) i umotywowane przykładami wywodzącymi się z mechaniki. W części rozprawy dotyczącej abstrakcyjnych rezultatów, to przyznam, że nie zauważam tu nowych konstrukcji, połączeń różnych technik czy istotnych trudności do przezwyciężenia. Wyniki są raczej przewidywalne, podobnie jak dowody, które są bezpośrednim zastosowaniem lub adaptacją znanych i stosowanych wcześniej technik opartych na twierdzeniach typu KKM (w pracy (I)) i monotoniczności (w pracy (III)). Wydaje mi się, że wartość wyników rozprawy należy upatrywać w przedstawionych w każdej z tych prac złożonych zagadnieniach wywodzących się z mechaniki i uzyskanym dla nich aparacie pozwalającym na stwierdzenie poprawnego sformułowania tych zagadnień (*well-posedness*), mimo, iż nie sprawiło to większych trudności związanych ze słabymi pochodnymi czy używanymi przestrzeniami Sobolewa. Uzyskane podejście pozwoli zapewne również na badania jakościowe (np. zbadanie zjawisk bifurkacji dla (S) lub dynamiki zagadnień, np. stabilności rozwiązań stacjonarnych czy istnienia atraktorów w przypadku (E)), czego obecnie tu brakuje i co wiązałoby się z rozszerzeniem wachlarza używanych metod.

Moją konsternację wywołały fragmenty pracy (III), gdzie w dowodzie głównych faktów dot. zagadnienia (E) odsyła się czytelnika do wcześniejszych prac promotora z adnotacją, że dowód jest analogiczny do wyniku z zacytowanej pracy (której autorem nie jest doktorantka) i dlatego został pominięty lub że używa się argumentów podobnych do tych z przytoczonej pracy (dot. dowodów Th. 3 i Th. 5). Jest to część rozprawy doktorskiej, gdzie oczekiwałbym większej dokładności, która pozwoliłaby na łatwiejsze prześledzenie szczegółów. Jednak, po zapoznaniu się z przytoczonymi dowodami, nie wpłynęło to znacząco na moją ogólną pozytywną ocenę rozprawy.

Konkluzja

Biorąc pod uwagę przedstawioną wyżej ocenę, uważam, że rozprawa doktorska mgr Yunru Bai spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania oraz wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów postępowania w przewodzie doktorskim.

Aleksander Ćwiszewski

Aleksander Ćwiszewski