AUTOREFERAT

Piotr Budzyński

5 grudnia 2018

1 Imię i nazwisko

Piotr Budzyński

2 Dyplomy i stopnie naukowe

- Stopień doktora w dziedzinie nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka, Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, 2008.
  Tutuł rozprawy doktorskiej: „Subnormalność C_0-półgrup operatorów kompozycji na przestrzeniach L^2".
- Dyplom magistra matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, 2003.

3 Historia zatrudnienia w jednostkach naukowych

- październik 2010 – teraz: adiunkt, Katedra Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Rolniczy im. H. Kołłątaja w Krakowie.
- październik 2009 – wrzesień 2010: asystent, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.
- czerwiec 2008 – wrzesień 2009: adiunkt, Katedra Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Rolniczy im. H. Kołłątaja w Krakowie.
- październik 2004 – maj 2008: asystent, Katedra Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Rolniczy im. H. Kołłątaja w Krakowie.

4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.)

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Ważone operatory podstawiania w przestrzeniach typu L^2: subnormalność, refleksywność oraz powiązane zagadnienia

4.2 Prace stanowiące osiągnięcie naukowe (w odwrotnym porządku chronologicznym)

[O1] P. Budzyński, P. Dymek, A. Płaneta, M. Ptak, Weighted shifts on directed trees. Their multiplier algebras, reflexivity, and decompositions, Studia Math. 244 (2019), 285-308.

[O2] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Unbounded weighted composition operators in L^2-spaces, Lect. Notes Math 2209 (2018), 1-189.

[O3] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Subnormality of composition operators over directed graphs with one circuit: exotic examples, Adv. Math. 310 (2017), 484-556.

[O4] P. Budzyński, P. Dymek, M. Ptak, Analytic structure of weighted shifts on directed trees, Math. Nachr. 290 (2017), 1612-1629.

[O5] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Unbounded subnormal composition operators in L^2-spaces, J. Funct. Anal. 269 (2015), 2110-2164.

[O6] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Unbounded subnormal weighted shifts on directed trees. II, J. Math. Anal. Appl. 398 (2013), 600-608.

[O7] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Unbounded subnormal weighted shifts on directed trees, J. Math. Anal. Appl. 394 (2012), 819-834.

4.3 Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Ważone operatory podstawiania w rozmaitych przestrzeniach funkcyjnych (przestrzeniach typu L^2, przestrzeniach funkcji ciągłych, czy przestrzeniach funkcji analitycznych) są klasycznym obiektem badań w analizie funkcjonalnej. Żeby się o tym przekonać wystarczy sięgnąć po twierdzenie Banacha-Stone'a, które charakteryzuje surjektywne liniowe izometrie pomiędzy przestrzeniami funkcji ciągłych na przestrzeniach topologicznych Hausdorffa jako ważone operatory podstawiania właśnie, albo wspomnieć o operatorach Koopmana z teorii ergodycznej, które też należą do tej klasy operatorów. Z punktu widzenia teorii operatorów są to obiekty ciekawe i w związku z tym ich własności są badane od wielu lat. Problem, czy hipoteza Bishopa mówiąca o tym, że niektóre operatory z tej klasy nie posiadają nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych, pozostaje ciągle otwarty.

Rozprawa koncentruje się na własnościach nieograniczonych ważonych operatorów podstawiania w przestrzeniach typu L^2, ze szczególnym naciskiem na subnormalność i refleksywność. Dla uproszczenia terminologii będziemy mówić dalej o ważonych operatorach podstawiania mając na myśli ważone operatory podstawiania w przestrzeniach typu L^2.

Niech $(X, \mathscr{A}, \mu)$ oznacza przestrzeń z miarą σ–skończoną, a $\phi\colon X \to X$ oraz $w\colon X \to \mathbb{C}$ będą odwzorowaniami $\mathscr{A}$–mierzalnym. Wtedy możemy na $L^2(\mu) := L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$ określić operator liniowy o dziedzinie

$$\{f \in L^2(\mu)\colon w \cdot (f \circ \phi) \in L^2(\mu)\}$$

i działający zgodnie z formułą

$$f \longmapsto w \cdot (f \circ \phi).$$

Operator taki, jeśli jest poprawnie określony, nazywamy ważonym operatorem podstawiania i oznaczamy przez $C_{\phi,w}$. Odwzorowanie (transformację) ϕ nazywamy symbolem $C_{\phi,w}$, zaś w nazywamy wagą $C_{\phi,w}$.

W zależności od specyficznego wyboru przestrzeni mierzalnej $(X, \mathscr{A}, \mu)$, transformacji ϕ, czy wagi w mamy do czynienia z rozmaitymi klasami operatorów. W przypadku, gdy $w \equiv 1$, mówimy o operatorze podstawiania i skrótowo oznaczamy wtedy $C_{\phi,w}$ przez C_ϕ. W sytuacji zaś, gdy ϕ jest odwzorowaniem identycznościowym otrzymujemy operator mnożenia M_w. Można zauważyć, że spora część klasy ważonych operatorów przesunięcia (nazywanych w dalszej części autoreferatu przesunięciami) na drzewach skierowanych zawiera się w klasie ważonych operatorów podstawiania (definicję tych stosunkowo niedawno wprowadzonych operatorów podamy poniżej). W szczególności, klasyczne jedno- i dwustronne przesunięcia w przestrzeniach typu ℓ^2 są ważonymi operatorami podstawiania w przestrzeniach typu L^2.

Zanim przejdziemy do dalszego omawiania zagadnień poruszanych w rozprawie, zwrócimy uwagę na fakt, że pomimo tego, iż ważone operatory podstawiania w przestrzeniach L^2 są klasycznym i znanym obiektem badań, nie były one w zasadzie badane w przypadku nieograniczonym i ponadto, poza paroma rezultatami, wszystkie wyniki uzyskane bez założenia ograniczoności dotyczyły istotnych podklas interesującej nas klasy ważonych operatorów podstawiania, np. operatorów mnożenia, klasycznych przesunięć ważonych w ℓ^2, czy przesunięć ważonych na drzewach skierowanych. Podobna sytuacja zachodzi nawet w przypadku operatorów podstawiania. Co więcej, nawet w przypadku badań nad ograniczonymi ważonymi operatorami podstawiania większość autorów czyniła założenia, które spowodowały, że rezultaty nie są w pełni ogólne. Wspomnijmy tutaj o, częstym w przypadku badań nad operatorami podstawiania, założeniu o zupełności miary μ, albo, w przypadku badań nad ważonymi operatorami podstawiania, założeniu, że odpowiadający operatorowi $C_{\phi,w}$ operator C_ϕ jest gęsto określony. Szczególnie to drugie okazuje się być ograniczające - można podać przykład izometrycznego operatora $C_{\phi,w}$ takiego, że C_ϕ nie jest poprawie określony (patrz [O2, Example

102]). Jedyna praca poświęcona faktycznie nieograniczonym ważonym operatorom podstawiania, czyli [4] autorstwa Campbella i Hornora, jest napisana właśnie przy tym ostatnim założeniu. Metod użytych w tej pracy nie da się zastosować w sytuacji pełnej ogólności jak w niniejszej rozprawie.

Głównym interesującym nas w rozprawie zagadnieniem była subnormalność. Przypomnijmy, że gęsto określony operator S w (zespolonej) przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest subnormalny, jeśli istnieje normalny operator N w przestrzeni Hilberta $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ taki, że $S \subseteq N$ tzn. $\mathscr{D}(S) \subseteq \mathscr{D}(N)$ oraz $Sf = Nf$ dla każdego $f \in \mathscr{D}(S)$. Operatory subnormalne, ze względu na bliski związek z operatorami normalnymi, a co za tym idzie, możliwością uzyskania wielu interesujących rezultatów, były intensywnie badane zarówno w przypadku ograniczonym oraz nieograniczonym (ograniczonym operatorom subnormalnym jest poświęcona monografia [9]; w zakresie nieograniczonych operatorów subnormalnych należy wspomnieć o [2, 12, 29, 30, 31, 32]). Stanowią one jedną z lepiej poznanych klas operatorów w przestrzeniach Hilberta. Pomimo tego, literatura nie zawierała wcześniej żadnych rezultatów dotyczących subnormalności nieograniczonych ważonych operatorów podstawiania, a jedynie rezultaty w jej istotnych podklasach np. klasycznych przesunięciach ważonych. To samo można powiedzieć o nieograniczonych operatorach postawiania. W klasie ograniczonych operatorów podstawiania rezultatem stanowiącym punkt odniesienia jest wynik Lamberta z [20] charakteryzujący ich subnormalność w języku pochodnych Radona-Nikodyma oraz ciągów momentów Stjeltjesa. Dokładnie rzecz ujmując, na to żeby ograniczony operator C_ϕ na $L^2(\mu)$ był subnormalny potrzeba i wystarcza, aby dla μ-prawie wszystkich $x \in X$ ciąg $\{\mathsf{h}_{\phi^n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ był ciągiem momentów Stieltjesa; h_{ϕ^n}, dla $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, oznacza pochodną Radona-Nikodyma miary $\mu \circ (\phi^n)^{-1}$ względem μ (istniejącą dla poprawnie określonego C_ϕ), natomiast $\mathsf{h}_{\phi^0} = 1$. Przypomnijmy, że ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa, jeżeli istnieje nieujemna miara borelowska ν na $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ taka, że

$$a_n = \int_0^\infty t^n \,\mathrm{d}\nu(t), \quad n \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Wspomniane tutaj twierdzenie Lamberta jest w pewnym sensie modelowym przykładem wyniku w teorii ważonych operatorów podstawiania – opisuje ono teorio-operatorowe własności $C_{\phi,w}$ za pomocą własności obiektów teorio-miarowych związanych bezpośrednio z przestrzenią $(X, \mathscr{A}, \mu)$, symbolem ϕ oraz wagą w definiującymi rozważany operator.

Twierdzenie Lamberta w sytuacji nieograniczonej przestaje być prawdziwe, a warunek mówiący o „generowaniu" ciągu momentów Stieltjesa staje się konieczny, ale nie jest już wystarczający (patrz [P9, Conclusion 10.5]). Próba zastąpienia go innym wystarczającym warunkiem, podjęta z sukcesem w rozprawie, prowadzi do szeregu niezmiernie interesujących i głębokich rezultatów, o których powiemy niżej.

Drugim motywującym badania podjęte w rozprawie pojęciem jest refleksywność (operatora). Jeden z ciągle otwartych problemów w teorii operatorów polega na odpowiedzi na pytanie, czy każdy ograniczony operator na przestrzeni Hilberta posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. Refleksywność operatora, będąca pojęciem wywodzącym się z wersji twierdzenia von Neumanna o komutancie autorstwa Sarasona z [24], związana jest z badaniami nad problemem przestrzeni niezmienniczej. W dużym uproszczeniu, operator jest refleksywny, jeżeli posiada tak dużo przestrzeni niezmienniczych, że w pewien sposób determinują one algebrę generowaną przez ów operator. Przechodząc do ścisłej definicji, rozważmy (zespoloną) przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ oraz podalgebrę $\mathscr{W}$ algebry wszystkich operatorów ograniczonych na $\mathcal{H}$; tę ostatnią będziemy oznaczać przez $\mathbf{B}(\mathcal{H})$. Zbiór podprzestrzeni niezmienniczych dla wszystkich operatorów $A \in \mathscr{W}$ oznaczamy przez $\mathbf{Lat}\,\mathscr{W}$. Jeśli $\mathcal{M}$ jest rodziną (domkniętych) podprzestrzeni przestrzeni $\mathcal{H}$, to określamy $\mathbf{Alg}\,\mathcal{M} = \{A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})\colon A\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \text{ dla każdego } \mathcal{M} \in \mathcal{M}\}$. Algebra $\mathscr{W}$ jest refleksywna, jeśli $\mathbf{Alg}\,\mathbf{Lat}\,\mathscr{W} = \mathscr{W}$. Operator $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ nazywamy refleksywnym, jeżeli $\mathscr{W}(A)$, czyli najmniejsza domknięta w słabej topologii operatorowej algebra zawierająca A oraz operator identycznościowy I, jest refleksywna. Klasyczny wynik Sarasona z [24] stwierdza, że (nieważony) operator przesunięcia jednostronnego jest refleksywny. Wobec faktu, że, jak już wspomniano wcześniej, operator ten stanowi przykład ważonego operatora podstawiania, pytanie o refleksywność tych ostatnich wydaje się być dobrze uzasadnione.

Pierwsze rezultaty rozprawy dotyczą subnormalności ważonych operatorów przesunięcia na drzewach skierowanych i pochodzą z prac [O7] oraz [O6]. Ta, całkiem niedawno wprowadzona w [15] klasa operatorów, jak już wspomniano, obejmuje klasyczne przesunięcia na ℓ^2, ale jest znacznie bogatsza. Operatory te definiujemy w następujący sposób.

Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie drzewem skierowanym, gdzie V oznacza zbiór wierzchołków $\mathscr{T}$ oraz E oznacza zbiór krawędzi $\mathscr{T}$. Jeśli $u \in V$, to jedyny wierzchołek $v \in V$ taki, że $(v, u) \in E$ nazywamy rodzicem u oraz oznaczamy przez $\mathsf{par}(u)$. Wierzchołek nie posiadający rodzica nazywamy korzeniem $\mathscr{T}$. Jeśli takowy istnieje, to jest jedyny i oznaczamy go przez root. Drzewo skierowane, dla którego korzeń nie istnieje, nazywamy bezkorzennym. Niech $V^\circ = V \setminus \{\mathsf{root}\}$, jeśli $\mathscr{T}$ posiada korzeń; w przeciwnym razie $V^\circ = V$. Dla $u \in V$, oznaczamy $\mathsf{Chi}(u) = \{v \in V\colon (u, v) \in E\}$ i nazywamy elementy $\mathsf{Chi}(u)$ dziećmi u. Ważone przesunięcie na $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ} \subseteq \mathbb{C}$ to operator $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ działający w $\ell^2(V)$ zdefiniowany za pomocą

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{f \in \ell^2(V)\colon \Lambda_{\mathscr{T}} f \in \ell^2(V)\}, \\ S_{\boldsymbol{\lambda}} f &= \Lambda_{\mathscr{T}} f, \quad f \in \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}), \end{aligned}$$

gdzie $\Lambda_{\mathscr{T}}$ jest odwzorowaniem $\mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$ zadanym przez

$$(\Lambda_{\mathscr{T}} f)(v) = \begin{cases} \lambda_v \cdot f\big(\mathsf{par}(v)\big) & \text{dla } v \in V^\circ, \\ 0 & \text{dla } v = \mathsf{root}, \end{cases} \qquad f \in \mathbb{C}^V.$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku, gdy $\operatorname{card}(V) \leqslant \aleph_0$, to ważony operator przesunięcia na $\mathscr{T}$ jest w istocie ważonym operatorem podstawiania w $L^2(V, 2^V, \mu)$, gdzie μ jest miarą liczącą.

Dla $u \in V$, przez $e_u \in \ell^2(V)$ oznaczamy funkcję charakterystyczną singletona $\{u\}$, natomiast $\mathscr{E}_V$ oznacza $\mathsf{lin}\{e_u\colon u \in V\}$, czyli rozpięcie liniowe zbioru $\{e_u\colon u \in V\}$. Przez $\mathscr{D}^\infty(S_{\boldsymbol{\lambda}})$ będziemy oznaczali $\bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^n)$. Elementy $\mathscr{D}^\infty(S_{\boldsymbol{\lambda}})$ nazywamy wektorami klasy C^∞ operatora $S_{\boldsymbol{\lambda}}$.

Główny rezultat w pracy [O7] jest następujący.

Twierdzenie 1 ([O7, Theorem 5.1.1]) *Załóżmy, że $\mathscr{E}_V \subseteq \mathscr{D}^\infty(S_{\boldsymbol{\lambda}})$. Przypuśćmy, że ist-*

nieje rodzina $\{\mu_v\}_{v\in V}$ borelowskich miar probabilistycznych na $\mathbb{R}_+$ oraz rodzina $\{\varepsilon_v\}_{v\in V}$ nieujemnych liczb rzeczywistych, które dla każdego $u \in V$ spełniają

$$\mu_u(\sigma) = \sum_{v\in\mathsf{Chi}(u)} |\lambda_v|^2 \int_\sigma \frac{1}{s}\,\mathrm{d}\mu_v(s) + \varepsilon_u\delta_0(\sigma), \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+), \tag{4.1}$$

gdzie

$$\varepsilon_u = 1 - \sum_{v\in\mathsf{Chi}(u)} |\lambda_v|^2 \int_0^\infty \frac{1}{s}\,\mathrm{d}\mu_v(s). \tag{4.2}$$

Wtedy $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest subnormalny.

Powyższe twierdzenie uzyskano za pomocą specyficznej dla subnormalnych przesunięć na drzewach skierowanych metody aproksymacji. Jest ono jedynym ogólnym kryterium (warunkiem wystarczającym) na subnormalność nieograniczonych ważonych przesunięć na drzewach skierowanych. Wartym podkreślenia jest również fakt, że jest to nowy rezultat nawet w przypadku ograniczonym.

W przypadku, gdy rozważany operator $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ posiada dostatecznie dużo wektorów quasianalitycznych, powyższe kryterium okazuje się być pełną charakteryzacją. Przypomnijmy jedynie wcześniej, że dla operatora S w zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ wektor $f \in \mathscr{D}^\infty(S)$ jest jego wektorem quasianalitycznym, jeżeli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|S^n f\|^{\frac{1}{n}}} = \infty \quad \Big(\text{z umową: } \frac{1}{0} = \infty\Big).$$

Przez $\mathscr{Q}(S)$ oznaczymy zbiór wektorów quasianalitycznych operatora S.

Twierdzenie 2 ([O7, Theorem 5.3.1]) *Załóżmy, że $\mathscr{E}_V \subseteq \mathscr{D}^\infty(S_{\boldsymbol{\lambda}})$. Wtedy następujące warunki są równoważne*:

- *(i) $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest subnormalny,*
- *(ii) $\{\|S_{\boldsymbol{\lambda}}^n e_u\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego $u \in V$,*
- *(iii) istnieje rodzina $\{\mu_v\}_{v\in V}$ borelowskich miar probabilistycznych na $\mathbb{R}_+$ oraz rodzina $\{\varepsilon_v\}_{v\in V}$ nieujemnych liczb rzecywistych, które spełaniają (4.1) dla każdego $u \in V$.*

Rezultat powyższy należy porównać z twierdzeniem Lamberta z [19] charakteryzującym subnormalność ograniczonych operatorów:

Twierdzenie 3 *Niech $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. Wtedy równoważne są następujące warunki*:

(i) A jest subnormalny,

(ii) $\{\|A^n f\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego $f \in \mathcal{H}$.

Jak pokazuje zaskakujący przykład z pracy [16] sytuacja opisywana przez twierdzenie Lamberta jest daleka od typowej w przypadku nieograniczonym. Skonstruowano tam bowiem przykład ważonego przesunięcia $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ na drzewie skierowanym, które generuje ciągi momentów Sieltjesa, tzn. spełniony jest dostosowany do sytuacji nieograniczonej warunek (ii) Twierdzenia 2 ale operator $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ nie jest nawet hyponormalny, tym bardzie zatem subnormalny.

Próba uogólnienia twierdzenia Lamberta na przypadek nieograniczony prowadzi w naturalny sposób do bardzo ciekawego problemu: czy istnieje nieograniczony operator A, który jest subnormalny, ale dziedzina A^2 jest trywialna, tzn $\mathscr{D}(A^2) = \{0\}$. Problem tak postawiony posiada rozwiązanie zaproponowane przez Naimarka w [23], który podał przykład domkniętego symetrycznego operatora A takiego, że $\mathscr{D}(A^2) = \{0\}$. Należy jednak zauważyć, że w przypadku, gdy rozważamy ważone przesunięcia na drzewach skierowanych lub ogólniej ważone operatory podstawiania, symetryczność implikuje automatycznie gęstość wektorów C^∞, a zatem przykład typu Naimarka nie jest możliwy w tych klasach (patrz [02, Proposition 67]). To oczywiście prowadzi do zmodyfikowanej wersji postawionego wcześniej problemu: czy istnieje ważone przesunięcie na drzewie skierowanym $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ będące operatorem subnormalnym i spełniającym $\mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^2) = \{0\}$. Zauważmy, że próba rozwiązania tego problemu napotyka na przeszkodę w postaci braku kryterium pozwalającego sprawdzić subnormalność operatora $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ w przypadku, gdy wektory klasy C^∞ nie stanowią zbioru gęstego w $\ell^2(V)$ (ich gęstość jest jednym z głównych założeń Twierdzenia 1). Tym samym warunkiem rozwiązania tak postawionego problemu jest wcześniejsze wskazanie kryterium na subnormalność dla ważonych przesunięć na drzewach skierowanych bez założenia gęstości wektorów klasy C^∞. Tym zajmuje się kolejna część rozprawy. Zanim do niej przejdziemy wspomnijmy jeszcze o rezultatach z pracy [O6].

Praca [O6] poświęcona jest zastosowaniom rezultatów pracy [O7] w przypadku przesunięć ważonych na wybranych drzewach. W sytuacji najbardziej elementarnej mowa o klasycznych przesunięciach ważonych jedno- i dwustronnych. Ich subnormalność charakteryzuje kryterium Bergera-Gellara-Wallena (patrz [13, 14] w przypadku ograniczonym oraz [30] w przypadku nieograniczonym). Przykładowo dla przesunięcia jednostronnego

$$S_{\boldsymbol{\lambda}} e_n = \lambda_{n+1} e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.3}$$

na $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, gdzie $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ zachodzi

Twierdzenie 4 ([O6, Theorem 3.1]) *Jeżeli $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest jednostronnym przesunięciem z niezerowymi wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ (zob. (4.3)), wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest subnormalny,

(ii) $(1, |\lambda_1|^2, |\lambda_1\lambda_2|^2, |\lambda_1\lambda_2\lambda_3|^2, \ldots)$ jest ciągiem momentów Stieltjesa,

(iii) k jest wierzchołkiem stieltjesowskim dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$, tzn. $\{\|S_{\boldsymbol{\lambda}}^n e_k\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa.

Okazuje się, że ten oraz pozostałe znane rezultaty można wywnioskować właśnie z Twierdzenia 1 (patrz również [O7, Theorem 3.2]). Twierdzenie to również można zastosować do modelowych drzew skierowanych z pojedynczym wierzchołkiem rozgałęziającym (czyli posiadającym więcej niż jedno dziecko). Takie drzewa są bardzo interesujące, ponieważ są najprostszymi drzewami skierowanymi, które nie są izomorficzne ze zbiorami liczb naturalnych i liczb całkowitych, naturalnie wyposażonymi w strukturę drzewa skierowanego. Dzięki tej własności drzewa te nadają się do konstrukcji wszelakich przykładów przesunięć ważonych – można na tych drzewach konstruować przykłady stosunkowo prosto, a jednocześnie otrzymane operatory będą już miały własności inne niż klasyczne przesunięcia ważone. Praca [O6] zawiera kryteria na subnormalność również w kontekście takich drzew (patrz [O6, Theorem 4.1] oraz [O6, Theorem 4.3]).

W następnym kroku objętych rozprawą badań, podjęta została próba podania kryterium na subnormalność operatorów podstawiania. Wyniki tych badań zawiera praca [O5]. Stanowi ona niejako preludium do [O2]. Głównym rezultatem [O5] jest kryterium na subnormalność nieograniczonych operatorów podstawiania nie wymagające gęstości wektorów klasy C^∞. W tym, oraz w następujących później rezultatach zakładamy, że $(X, \mathscr{A}, \mu)$ jest przestrzenią mierzalną z miarą σ–skończoną, natomiast $\phi\colon X \to X$ oraz $w\colon X \to \mathbb{C}$ są $\mathscr{A}$–mierzalne.

Twierdzenie 5 ([O5, Theorem 9]) *Niech C_ϕ będzie gęsto określony. Przypuśćmy, że istnieje $\mathscr{A}$–mierzalna rodzina $P\colon X \times \Sigma \to [0,1]$ miar probabilistycznych na przestrzeni mierzalnej (T, Σ) oraz istenieje Σ–mierzalna funkcja $\zeta\colon T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ spełniająca jednen z poniższych równoważnych warunków:*

(i) zachodzi warunek

$$\mathsf{h}_\phi(x)\big(\mathsf{E}(P(\cdot,\sigma)) \circ \phi^{-1}\big)(x) = \int_\sigma \zeta(t) P(x, \mathrm{d}t) \ \text{dla } \mu\text{-p.w. } x \in X, \quad \sigma \in \Sigma, \qquad (\mathrm{CC}_\zeta^{-1})$$

(ii) zachodzi warunek

$$\mathsf{E}(P(\cdot,\sigma))(x) = \frac{\int_\sigma \zeta(t) P(\phi(x), \mathrm{d}t)}{\mathsf{h}_\phi(\phi(x))} \ \text{dla } \mu\text{-p.w. } x \in X, \quad \sigma \in \Sigma \qquad (\mathrm{CC}_\zeta)$$

oraz C_ϕ jest injektywny.

Wtedy C_ϕ jest subnormalny.

Wyjaśnijmy, że jeśli $(X, \mathscr{A})$ oraz (T, Σ) są przestrzeniami mierzalnymi, to $P\colon X \times \Sigma \to [0,1]$ jest $\mathscr{A}$–mierzalną rodziną miar probabilistycznych, jeżeli

(i) $P(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną dla każdego $x \in X$,

(ii) $P(\cdot, \sigma)$ jest $\mathscr{A}$–mierzalna dla każdego $\sigma \in \Sigma$.

Lewa strona równania w (CC_ζ) zawiera $\mathsf{E}\big(P(\cdot,\sigma)\big)$, czyli warunkową wartość oczekiwaną funkcji $P(\cdot,\sigma)$ względem σ-algebry $\phi^{-1}(\mathscr{A})$. Dla $\mathscr{A}$–mierzalnej funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}_+$, $\mathsf{E}(f)\colon X \to \mathbb{R}_+$ jest $\phi^{-1}(\mathscr{A})$–mierzalną funkcją spełniającą

$$\int_{\phi^{-1}(\sigma)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\phi^{-1}(\sigma)} \mathsf{E}(f) \, \mathrm{d}\mu, \quad \sigma \in \mathscr{A};$$

istnieje ona o ile tylko $\mathsf{h}_{\phi,w} < \infty$ p.w. $[\mu]$. Ze względu na własności warunkowej wartości oczekiwanej, możemy mówić o funkcji $\mathsf{E}(P(\cdot,\sigma)) \circ \phi^{-1}$, która występuje po lewej stronie równości w (CC_ζ^{-1}).

Występujące powyżej warunki (CC_{ζ}^{-1}) oraz (CC_{ζ}) odgrywają podobną rolę co warunek (4.1) w Twierdzeniu 1, wiążąc między sobą miary probabilistyczne związane z różnymi punktami zbioru X. Metoda ich wykorzystania w dowodzie subnormalności rozważanych operatorów jest jednak diametralnie różna. W przypadku Twierdzenia 1 metoda bazowała na aproksymacji oraz wykorzystaniu rezultatów z pracy [8], co było możliwe dzięki założeniu gęstości wektorów C^{∞}. W przypadku Twierdzenia 5 takiej możliwości nie ma, o dziedzinie operatora $C_{\phi,w}$ wiemy jedynie, że jest gęsta. Metodą wykazania subnormalności $C_{\phi,w}$ jest w tym przypadku budowa rozszerzenia quasinormalnego - operator posiadający rozszerzenie quasinormalne jest subnormalny [30]. Takie rozszerzenie można zbudować modyfikując konstrukcję, którą wykorzystał Lambert w [21] do budowy rozszerzenia quasinormalnego subnormalnego ograniczonego operatora podstawiania. Podkreślmy tutaj, że Lambert mając do dyspozycji subnormalność operatora, wskazywał dla niego rozszerzenie quasinormalne, natomiast w Twierdzeniu 5, subnormalność jest efektem końcowym konstrukcji rozszerzającego operatora quasinormalnego – są to zatem zupełnie inne sytuacje, wymagające innego spojrzenia na zagadnienie. Powyższe twierdzenie, pomimo jego zdawałoby się bardzo abstrakcyjnego charakteru, można zastosować w przypadku konkretnych klas nieograniczonych operatorów podstawiania, co zostało również pokazane w [O5]. Mowa tutaj o operatorach podstawiania z liniowymi symbolami oraz o operatorach podstawiania nad dyskretnymi przestrzeniami mierzalnymi (patrz [O5, Theorem 32] oraz [O5, Theorem 35]).

Badania w kontekście dyskretnych przestrzeni mierzalnych były prowadzone również w pracy [O3]. Motywacją do badań objętych tą pracą był problem istnienia ważonego operatora podstawiania $C_{\phi,w}$, który nie byłby subnormalny, ale generowałby ciągi momentów Stieltjesa. Powiemy, że operator A w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ generuje ciągi momentów Stieltjesa, jeżeli $\mathscr{D}^{\infty}(A)$ jest gęste w $\mathcal{H}$ oraz $\{\|A^n f\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego $f \in \mathscr{D}^{\infty}(A)$. Jak już wspomniano wcześniej, istnienie operatora podstawiania generującego ciągi momentów Stieltjesa, który nie byłby hyponormalny zostało wykazane w [16]. Transformacja, będąca symbolem tego operatora podstawiania, indukowała graf, który nie był lokalnie skończony. To zainicjowało badania próbujące znaleźć odpowiedź na pytanie, czy operator podstawiania o wspomnianych własnościach może mieć symbol, który indukuje lokalnie skończony graf. Główny rezultat pracy, to pozytywna odpowiedź na tak postawiony problem. Używamy w nim następujących oznaczeń: dla parami różnych punktów x_0 oraz $\{x_{i,j}\}_{i=1}^{\eta}{}_{j=1}^{\infty}$ określamy

$$X_{\eta,0} = \{x_0\} \cup \{x_{i,j} \colon i \in \{1, 2, \dots, \eta\}, j \in \mathbb{N}\}, \tag{4.4}$$

$$\phi_{\eta,0}(x) = \begin{cases} x_{i,j-1} & \text{, jeśli } x = x_{i,j} \text{ dla } i \in \{1, 2, \dots \eta\} \text{ oraz } j \geqslant 2, \\ x_{\kappa} & \text{, jeśli } x = x_{i,1} \text{ dla } i \in \{1, 2, \dots \eta\} \text{ lub } x = x_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Twierdzenie 6 ([O3, Theorem 5.5.2]) *Niech $\eta \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Wtedy istnieje miara dyskretna μ na $X = X_{\eta,0}$ taka, że operator podstawiania C_{ϕ} w $L^2(\mu)$ o symbolu $\phi = \phi_{\eta,0}$ ma następujące własności:*

(i) $\{\mathsf{h}_{\phi^n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego $x \in X$,

(ii) C_ϕ *generuje ciągi momentów Stieltjesa,*

(iii) C_ϕ *nie jest hyponormalny.*

Wypowiedzianym własnościom operatora C_ϕ towarzyszy bardzo dokładna analiza determinizmu rozważanych ciągów momentów Stieltjesa.

Konstrukcja operatora o wymienionych powyżej własnościach była poprzedzona rozważaniami pod jakimi warunkami rodzina miar probabilistycznych $\{P(x,\cdot)\}_{x\in X}$ spełnia warunek

$$\frac{1}{\mu(x)}\sum_{y\in\phi^{-1}(\{x\})}\mu(y)P(y,\sigma)=\int_\sigma tP(\phi(x),\mathrm{d}t,\quad \sigma\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+),x\in\phi(X),\tag{CC}$$

będący dyskretną wersją warunku (CC_ζ), który jak już wiemy implikuje subnormalność. Wśród czterech uzyskanych warunków (patrz [O3, Theorem 4.4.1]), kluczowy dla konstrukcji był warunek następujący

$$\sum_{i=1}^{\eta}\frac{\mu(x_{i,1})}{\mu(x_0)}\int_0^\infty\frac{1}{t-1}P(x_{i,1},\mathrm{d}t)\leqslant 1.\tag{i-d}$$

Zastąpienie go warunkiem słabszym

$$\sum_{i=1}^{\eta}\frac{\mu(x_{i,1})}{\mu(x_0)}\int_0^\infty\frac{1}{t-1}P(x_{i,1},\mathrm{d}t)<\infty,\tag{i-d'}$$

w sytuacji, gdy ciąg $\{\mathsf{h}_{\phi^n}(x_0)+c\}_{n=0}^\infty$ jest S-zdeterminiowanym ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego $c\in(0,\infty)$ nie zmienia nic w kwestii subnormalności C_ϕ (patrz [O3, Theorem 4.4.2]). Okazuje się jednak, że ogólnie pomiędzy tymi warunkami występuje różnica (patrz [O3, Theorem 5.4.1]), a znalezienie miar spełniających warunek (i-d'), ale nie spełniających warunku (i-d) otwiera możliwość skonstruowania operatora o własnościach wymienionych w Twierdzeniu 6. Konstrukcja ta opisana jest w [O3, Procedure 5.2.1] i bazuje na istnieniu miar N-ekstremalnych o pewnych dodatkowych własnościach. Wspomniane miary można otrzymać ze specjalnie wybranych miar Kreina i Friedrichsa za pomocą skalowania i homotetii (patrz dowód [O3, Theorem 5.5.2] oraz [O3, Remark 5.5.3]). Duża część pracy jest poświęcona zagadnieniom związanym z determinizmem ciągów momentów Stieltjesa oraz własnościami miar N-ekstremalnych (patrz w szczególności [O3, Section 2]).

Ostatnią pozycją rozprawy zajmującą się, między innymi, kwestią subnormalności jest [O2]. Zagadnienie to jest w niej badane w najogólniejszym interesującym nas kontekście, czyli dla ważonych operatorów podstawiania. W tym zakresie istotnie rozwinięte są w niej idee z [O5], co pozwoliło na uzyskanie ogólnych kryteriów na subnormalność dla nieograniczonych ważonych operatorów postawiania. Ze względu na obecność wagi, sytuacja w przypadku ważonych operatorów podstawiania jest bardziej skomplikowana i subtelna niż w przypadku (nieważonych) operatorów podstawiania. Mamy teraz trzy warunki zgodności, które wraz z pewnymi dodatkowymi założeniami implikują subnormalność:

$$\mathsf{E}_{\phi,w}(P(\cdot,\sigma))(x) = \frac{\int_\sigma tP(\phi(x),\mathrm{d}t)}{\mathsf{h}_{\phi,w}(\phi(x))} \quad \text{dla } \mu_w\text{-p.w. } x \in X, \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+), \tag{CC}$$

oraz

$$\big(\mathsf{E}_{\phi,w}(P(\cdot,\sigma))\circ\phi^{-1}\big)(x)\cdot\mathsf{h}_{\phi,w}(x) = \int_\sigma tP(x,\mathrm{d}t) \quad \text{dla } \mu_w\text{-p.w. } x \in X, \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+), \tag{CC$_*^{-1}$}$$

oraz

$$\big(\mathsf{E}_{\phi,w}(P(\cdot,\sigma))\circ\phi^{-1}\big)(x)\cdot\mathsf{h}_{\phi,w}(x) = \int_\sigma tP(x,\mathrm{d}t) \quad \text{dla } \mu\text{-p.w. } x \in X, \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+). \tag{CC^{-1}}$$

W pracy badane są dokładnie zależności pomiędzy warunkami i tak np. warunek (CC^{-1}) jest silniejszy od pozostałych dwóch, a (CC) implikuje (CC$_*^{-1}$) przy założeniu $\mathsf{h}_{\phi,w} > 0$ p.w. $[\mu]$ na zbiorze $\{w \neq 0\}$ (patrz [O2, Proposition 25], [O2, Theorem 27] oraz [O2, Corollary 42]). Zacytujmy jako przykład jedno z uzyskanych kryteriów.

Twierdzenie 7 ([O2, Theorem 29]) *Niech $C_{\phi,w}$ będzie gęsto określony oraz $\mathsf{h}_{\phi,w} > 0$ p.w. $[\mu_w]$. Jeżeli istnieje $\mathscr{A}$–mierzalna rodzina miar probabilistycznych $P\colon X \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$ spełniająca* (CC), *to $C_{\phi,w}$ jest subnormalny oraz*

$$\mathsf{h}_{\phi^n,\widehat{w}_n}(x) = \int_0^\infty t^n P(x,\mathrm{d}t) \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ oraz } \mu_w\text{-p.w. } x \in X. \tag{4.6}$$

Występująca w warunku (4.6) funkcja $\mathsf{h}_{\phi^n,\widehat{w}_n}$, $n \in \mathbb{N}$, to pochodna Radona-Nikodyma miary $\mu_{\widehat{w}_n} \circ (\phi^n)^{-1}$ względem miary μ, przy czym $\widehat{w}_n = \prod_{j=0}^{n-1} w \circ \phi^j$.

W konsekwencji powyżej wspomnianych twierdzeń otrzymano pełną charakteryzację subnormalnych ograniczonych ważonych operatorów podstawiania.

Twierdzenie 8 ([O2, Theorem 51]) *Niech $C_{\phi,w} \in \mathbf{B}(L^2(\mu))$. Wtedy następujące warunki są równoważne*:

(i) *$C_{\phi,w}$ jest subnormalny,*

(ii) *$\mathsf{h}_{\phi,w} > 0$ p.w. $[\mu_w]$ oraz istnieje $P\colon X \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$, $\mathscr{A}$–mierzalna rodzina miar probabilistycznych, która spełnia* (CC),

(iii) *istnieje $P\colon X \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$, $\mathscr{A}$–mierzalna rodzina miar probabilistycznych, która spełnia* (CC^{-1}).

Ponadto, zachodzą:

(a) *jeśli (i) zachodzi, to istnieje $P\colon X \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$, $\mathscr{A}$–mierzalna rodzina miar probabilistycznych, która spełnia* (CC^{-1}) *i posiada własność:* $\operatorname{supp} P(x,\cdot) \subseteq [0, \|C_{\phi,w}\|^2]$ *dla każdego $x \in X$,*

(b) *jeśli $P_1, P_2\colon X \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$ są $\mathscr{A}$–mierzalnymi rodzinami miar probabilistycznych, które spełniają* (CC) *oraz $\mathsf{h}_{\phi,w} > 0$ p.w. $[\mu_w]$, to $P_1(x,\cdot) = P_2(x,\cdot)$ dla μ_w-p.w. $x \in X$,*

(c) jeśli $P_1, P_2\colon X \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$ są $\mathscr{A}$–mierzalnymi rodzinami miar probabilistycznych, które spełniają (CC^{-1}), *to $P_1(x,\cdot) = P_2(x,\cdot)$ dla μ-p.w. $x \in X$.*

Badaniu subnormalności w [O2] towarzyszy badanie innych własności. Bezpośrednio związaną i scharakteryzowaną w pracy jest własność generowania ciągów momentów Stieltjesa. Rezultat, który uzyskano stanowi odpowiednik wspomnianych wcześniej wyników Lamberta charakteryzujących subnormalne ograniczone operatory podstawiania.

Twierdzenie 9 ([O2, Theorem 48]) *Następujące warunki są równoważne:*

(i) $C_{\phi,w}$ generuje ciągi momentów Stieltjesa,

(ii) $\overline{\mathscr{D}(C_{\phi,w}^k)} = L^2(\mu)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $\{\|C_{\phi,w}^n f\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego $f \in \mathscr{D}^\infty(C_{\phi,w})$,

(iii) $\{\mathsf{h}_{\phi^n,\widehat{w}_n}(x)\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla μ-p.w. $x \in X$,

(iv) $\{\mu_{\widehat{w}_n}(\phi^{-n}(\varDelta))\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego $\varDelta \in \mathscr{A}$ spełniającego $\mu_{\widehat{w}_k}(\phi^{-k}(\varDelta)) < \infty$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$ oraz $\overline{\mathscr{D}(C_{\phi,w}^k)} = L^2(\mu)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$,

(v) istnieje odwzorowanie liniowe $L\colon \mathbb{C}[t] \to \mathcal{M}_X$ takie, że

$$\begin{aligned} L(t^n) &= \mathsf{h}_{\phi^n,\widehat{w}_n} \ \text{p.w. } [\mu], \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ L(p) &\geqslant 0 \ \text{p.w. } [\mu], \quad p \in \mathbb{C}[t]_+. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ponadto, jeśli (i) zachodzi, to

(a) $\mathscr{D}^\infty(C_{\phi,w})$ jest rdzeniem $C_{\phi,w}^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}_+$,

(b) $C_{\phi,w}^n$ jest domknięty oraz $C_{\phi,w}^n = C_{\phi^n,\widehat{w}_n}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}_+$.

Związaną z subnormalnością (poprzez wykorzystywaną metodę dowodową) i scharakteryzowaną w [O2] jest quasinormalność.

Twierdzenie 10 ([O2, Theorem 20]) *Jeżeli $C_{\phi,w}$ jest gęsto określony, to jest quasinormalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathsf{h}_{\phi,w} \circ \phi = \mathsf{h}_{\phi,w}$ p.w. $[\mu_w]$.*

Twierdzenie to uogólnia charakteryzację quasinormalności dla ograniczonych operatorów podstawiania uzyskaną w [33] przez Whitley'a oraz tę dla nieograniczonych operatorów postawiania wykazaną w [P9].

Campbell i Hornor w [4] uzyskali w przypadku nieograniczonym (przy wspomnianych już wcześniej ograniczających założeniach) częściowe rezultaty na temat hyponormalności i kohyponormalności. Obie te własności zostały w pełni opisane w [02].

Twierdzenie 11 ([O2, Theorem 53]) *Niech $C_{\phi,w}$ będzie gęsto określony. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $C_{\phi,w}$ jest hyponormalny,

(ii) $\mathsf{h}_{\phi,w} > 0$ *p.w.* $[\mu_w]$ *oraz* $\mathsf{E}_{\phi,w}\Big(\sqrt{\frac{\mathsf{h}_{\phi,w}\circ\phi}{\mathsf{h}_{\phi,w}}}\cdot f\Big)^2 \leqslant \mathsf{E}_{\phi,w}(f^2)$ *p.w.* $[\mu_w]$ *dla każdej* $\mathscr{A}$*–mierzalnej funkcji* $f\colon X \to \mathbb{R}_+$,

(iii) $\mathsf{h}_{\phi,w} > 0$ *p.w.* $[\mu_w]$ *oraz* $\mathsf{E}_{\phi,w}\Big(\frac{\mathsf{h}_{\phi,w}\circ\phi}{\mathsf{h}_{\phi,w}}\Big) \leqslant 1$ *p.w.* $[\mu_w]$,

(iv) $\mathsf{h}_{\phi,w} > 0$ *p.w.* $[\mu_w]$ *oraz* $\mathsf{E}_{\phi,w}\Big(\frac{1}{\mathsf{h}_{\phi,w}}\Big) \leqslant \frac{1}{\mathsf{h}_{\phi,w}\circ\phi}$ *p.w.* $[\mu_w]$.

Twierdzenie 12 ([O2, Theorem 60]) *Niech* $C_{\phi,w}$ *będzie gęsto określony. Wtedy równoważne są:*

(i) $C_{\phi,w}$ *jest kohyponormalny,*

(ii) następujące warunki zachodzą:

(ii-a) $\mathsf{h}_{\phi,w} = 0$ *na* $\{w = 0\}$ *p.w.* $[\mu]$,
(ii-b) $\chi_{\{\mathsf{h}_{\phi,w}>0\}} \cdot L^2(\mu_w) \subseteq \mathscr{R}(\mathsf{E}_{\phi,w})$,
(ii-c) $\mathsf{h}_{\phi,w} \leqslant \mathsf{h}_{\phi,w}\circ\phi$ *p.w.* $[\mu_w]$.

Ponadto, jeśli $C_{\phi,w}$ *jest kohyponormalny, to*

(iii) $\mathsf{E}_{\phi,w}(\mathsf{h}_{\phi,w}) = \mathsf{h}_{\phi,w}$ *p.w.* $[\mu_w]$,

(iv) $M_\theta \in \mathbf{B}(L^2(\mu_w))$, M_θ *jest kontrakcją,* $\mathscr{R}(\mathsf{E}_{\phi,w})$ *redukuje* M_θ *oraz*

$$M_\theta = M_\theta|_{\mathscr{R}(\mathsf{E}_{\phi,w})} \oplus 0|_{\mathscr{N}(\mathsf{E}_{\phi,w})},$$

gdzie $\theta = \sqrt{\frac{\mathsf{h}_{\phi,w}}{\mathsf{h}_{\phi,w}\circ\phi}}$ *p.w.* $[\mu_w]$..

Charakteryzacje hyponormalności i kohyponormalności dają natychmiast rezultat opisujący normalność ważonych operatorów podstawiania.

Twierdzenie 13 *Niech* $C_{\phi,w}$ *będzie gęsto określony. Wtedy równoważne są:*

(i) $C_{\phi,w}$ *jest normalny,*

(ii) następujące warunki zachodzą:

(ii-a) $\mathsf{h}_{\phi,w} = 0$ *on* $\{w = 0\}$ *p.w.* $[\mu]$,
(ii-b) $\mathscr{R}(\mathsf{E}_{\phi,w}) = L^2(\mu_w)$,
(ii-c) $\mathsf{h}_{\phi,w} = \mathsf{h}_{\phi,w}\circ\phi$ *p.w.* $[\mu_w]$.

Ponadto, jeśli $C_{\phi,w}$ *jest normalny, to* $\{\mathsf{h}_{\phi,w} > 0\} = \{w \neq 0\}$ *p.w.* $[\mu]$.

Powyższy rezultat w istotny sposób uogólnia uzyskane przez Singha i Kumara (patrz [26]) oraz Whitley'a (patrz [33]) wyniki na temat ograniczonych operatorów podstawiania oraz te uzyskane przez Campbella, Embry-Wardrop, Fleminga, Jamisona i Narayana (patrz [5, 3]) na temat podklasy ograniczonych ważonych operatorów podstawiania.

W [O2] opisane są również związki pomiędzy operatorami $C_{\phi,w}$ i C_ϕ, oraz odpowiadającym im pochodnym Radona-Nikodyma, co oczywiście związane jest ze, wspomnianym na początku i często wykorzystywanym przez autorów wcześniejszych prac, silnie ograniczającym założeniem o poprawnej określoności operatora podstawiania C_ϕ przy badaniu związanego z nim ważonego operator podstawiania $C_{\phi,w}$.

Podkreślmy na zakończenie omawiania wyników związanych z subnormalnością jeszcze raz fakt, że w przypadku nieograniczonym jedynie hyponormalność i kohyponormalność były wcześniej badane (częściowe rezultaty uzyskali Campbell i Hornor w [4]), natomiast pozostałe własności nie były opisane w przypadku nieograniczonym nawet dla operatorów podstawiania. Na chwilę obecną [O2] jest jedyną pozycją w literaturze podejmującą w sposób kompleksowy badania na temat nieograniczonych ważonych operatorów postawiania.

Drugim zagadnieniem, które podlegało badaniom w rozprawie, jest refleksywność ograniczonych ważonych przesunięć na drzewach skierowanych. Motywacją do jego rozważenia był wspomniany wcześniej wynik Sarasona mówiący o refleksywności przesunięcia jednostronnego na $\ell^2(\mathbb{N})$ oraz fakt, że klasyczne przesunięcia jedno- i dwustronne są ważonymi przesunięciami na drzewach skierowanych. Struktura drzewa skierowanego pozwalała przypuszczać, że metodami wykorzystującymi funkcje analityczne uda się pokazać refleksywność w szerokiej podklasie przesunięć ważonych na drzewach skierowanych.

W przypadku klasycznych przesunięć na ℓ^2, szereg podstawowych rezultatów bazuje na realizacji przesunięcia ważonego jako operatora mnożenia przez zmienną niezależną na przestrzeni Hilberta formalnych szeregów potęgowych, która okazuje się mieć analityczną strukturę. To pozwala na użycie narzędzi związanych z operatorami mnożenia takich, jak mnożniki. Te zaś umożliwiają na opisanie pewnych własności spektralnych przesunięć na drzewach skierowanych, a także na wskazanie wśród nich podklasy, która składa się z operatorów refleksywnych.

Kluczowe znaczenia dla badań tej części rozprawy ma pojęcie mnożnika, które wprowadzono w [O4]. Ze względów wyłącznie technicznych, pojęcie to wprowadzone zostało dla tzw. przesunięć ważonych na ważonych drzewach skierowanych, które określamy następująco. Formalnie jest to ogólniejsze pojęcie niż ważone przesunięcia na (nieważonych) drzewach skierowanych, ale okazują się one być równoważne, a uzyskane rezultaty w jednym kontekście mają odpowiedniki w drugim.

Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie drzewem skierowanym oraz niech $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v\in V^\circ} \subseteq \mathbb{C}$. Jeżeli teraz $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_v\}_{v\in V} \subseteq \mathbb{C}$, to przez $\mathscr{T}_{\boldsymbol{\beta}}$ oznaczamy parę $(\mathscr{T}, \boldsymbol{\beta})$ nazywaną przez nas ważonym drzewem. Przesunięcie ważone na $\mathscr{T}_{\boldsymbol{\beta}}$ z wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v\in V^\circ} \subseteq \mathbb{C}$, to operator $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ na $\ell^2(\boldsymbol{\beta})$ określony za pomocą

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{f \in \ell^2(\boldsymbol{\beta})\colon \Lambda_{\mathscr{T}}^{\boldsymbol{\lambda}} f \in \ell^2(\boldsymbol{\beta})\},\\ S_{\boldsymbol{\lambda}} f &= \Lambda_{\mathscr{T}}^{\boldsymbol{\lambda}} f, \quad f \in \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}),\end{aligned}$$

gdzie $\Lambda_{\mathscr{T}}^{\boldsymbol{\lambda}}\colon \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$ jest jak w przypadku (nieważonych) przesunięć na drzewach skierowanych.

Zauważmy, że przesunięcie ważone $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ na $\mathscr{T}_{\mathbb{1}}$ (w sensie powyższej definicji) to przesunięcie ważone $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ w sensie definicji z [15].

Zakładając teraz, że $\mathscr{T} = (V, E)$ jest przeliczalnym, ukorzenionym i bezlistnym drzewem skierowanym, a ponadto $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_v\}_{v\in V} \subseteq (0,\infty)$ oraz $\{\lambda_v\}_{v\in V^\circ} \subseteq (0,\infty)$, możemy dla $\hat\varphi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ określić $\varGamma_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda}}\colon \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$ za pomocą

$$(\varGamma_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda}} f)(v) = \sum_{k=0}^{|v|} \lambda_{\mathsf{par}^k(v)|v}\, \hat\varphi(k) f(\mathsf{par}^k(v)), \quad v \in V,$$

gdzie $|v|$ oznacza odległość wierzchołka v od korzenia, a $\lambda_{\mathsf{par}^k(v)|v} = \lambda_v \lambda_{\mathsf{par}(v)} \cdots \lambda_{\mathsf{par}^{k-1}(v)}$. Następnie możemy zdefiniować

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(M_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}}) &= \{f \in \ell^2(\boldsymbol{\beta})\colon \varGamma_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda}} f \in \ell^2(\boldsymbol{\beta})\}, \\ M_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}} f &= \varGamma_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda}} f, \quad f \in \mathcal{D}(M_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}}). \end{aligned}$$

Tak określony operator $M_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}}\colon \ell^2(\boldsymbol{\beta}) \supseteq \mathcal{D}(M_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}}) \to \ell^2(\boldsymbol{\beta})$ nazywamy operatorem mnożenia o symbolu $\hat\varphi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$. Dla prostoty, jeśli to nie prowadzi do nieporozumienia, piszemy $\varGamma_{\hat\varphi}$ oraz $M_{\hat\varphi}$ zamiast $\varGamma_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda}}$ oraz $M_{\hat\varphi}^{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}}$. Symbole $\hat\varphi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ takie, że $\mathscr{D}(M_{\hat\varphi}) = \ell^2(\boldsymbol{\beta})$ nazywamy mnożnikami. Tworzą one przestrzeń liniową $\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$. Po jej unormowaniu przez

$$\|\hat\varphi\| \overset{df}{=} \|M_{\hat\varphi}\|, \quad \hat\varphi \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda}),$$

oraz wyposażeniu w mnożenie $*\colon \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+} \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}$ zadane przez

$$(\hat\varphi * \hat\psi)(k) = \sum_{j=0}^{k} \hat\varphi(j)\hat\psi(k-j), \quad \hat\varphi, \hat\psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}, \tag{4.8}$$

otrzymujemy algebrę Banacha, która powiązana jest z ważonym przesunięciem $S_{\boldsymbol{\lambda}}$.

Twierdzenie 14 ([O4, Theorem 4.4]) *Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie przeliczalnym, ukorzenionym i bezlistnym drzewem skierowanym, $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_v\}_{v\in V} \subseteq (0,\infty)$ oraz $\{\lambda_v\}_{v\in V^\circ} \subseteq (0,\infty)$. Niech $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{B}(\ell^2(\boldsymbol{\beta}))$ będzie przesunięciem ważonym na $\mathscr{T}_{\boldsymbol{\beta}}$. Wtedy zachodzą:*

(i) Dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$, $M_{\chi_{\{n\}}} = S_{\boldsymbol{\lambda}}^n$.

(ii) Jeśli $\hat\varphi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ posiada skończony nośnik, to $\hat\varphi \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$.

(iii) Dla dowolnych $\hat\varphi, \hat\psi \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$, odwzorowanie $\hat\varphi * \hat\psi$ należy do $\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$ oraz

$$M_{\hat\varphi} M_{\hat\psi} = M_{\hat\varphi * \hat\psi}.$$

(iv) $\mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$ jest przemienną algebrą Banacha z jedynką.

Mnożniki w naturalny sposób związane są z funkcjami analitycznymi, a indukowane przez nie operatory mnożenia z szeregami potęgowymi operatora $S_{\boldsymbol{\lambda}}$, co pokazują następne rezultaty. $r(S_{\boldsymbol{\lambda}})$ oznacza promień spektralny operatora $S_{\boldsymbol{\lambda}}$, natomiast $\varDelta_t = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < t\}$.

Propozycja 15 ([O4, Proposition 4.7]) *Niech $\hat{\varphi}\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ będzie takie, że $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, z^n$ jest zbieżny dla dowolnego $z \in \Delta_{\|S_{\boldsymbol{\lambda}}\|}$. Jeśli funkcja $\varphi\colon \Delta_{\|S_{\boldsymbol{\lambda}}\|} \to \mathbb{C}$ zadana przez $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, z^n$ jest ograniczona, to $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$ oraz $\|M_{\hat{\varphi}}\| \leqslant \|\varphi\|_\infty := \sup\{|\varphi(z)|\colon |z| < \|S_{\boldsymbol{\lambda}}\|\}$.*

Propozycja 16 ([O4, Proposition 4.8]) *Niech $r \in (r(S_{\boldsymbol{\lambda}}), \infty)$. Jeśli $\hat{\varphi}\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ jest takie, że $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, z^n$ jest zbieżny dla każdego $z \in \Delta_r$, wtedy $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})$, $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, S_{\boldsymbol{\lambda}}^k$ jest zbieżny (wg normy) oraz $M_{\hat{\varphi}} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, S_{\boldsymbol{\lambda}}^k$.*

Badanie mnożników kontynuowano w kolejnej pracy, czyli [O1]. Pokazano w niej m.in., że przestrzeń operatorów, których symbolami są mnożniki tzn: $\mathscr{M}(\boldsymbol{\lambda}) := \{M_{\hat{\varphi}}\colon \hat{\varphi} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda})\}$, jest domknięta w topologii SOT oraz WOT (z pracy [O4] wynikało jej domknięcie w topologi normy). To zaś, w połączeniu z aproksymacją opartą na jądrach Fejera, daje elegancki opis $\mathscr{M}(\boldsymbol{\lambda})$ zaprezentowany poniżej.

Twierdzenie 17 ([O1, Theorem 3.6]) *Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie przeliczalnym, ukorzenionym i bezlistnym drzewem skierowanym, $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ} \subseteq (0, \infty)$ oraz $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{B}(\ell^2(V))$. Wtedy*

$$\mathscr{M}(\boldsymbol{\lambda}) = \overline{\{p(S_{\boldsymbol{\lambda}})\colon p \in \mathbb{C}[X]\}}^{SOT} = \overline{\{p(S_{\boldsymbol{\lambda}})\colon p \in \mathbb{C}[X]\}}^{WOT}.$$

To zaś pozwala na opisanie $\mathbf{Alg\,Lat}\,\mathscr{M}(\boldsymbol{\lambda})$ w języku operatorów rzędu 1.

Propozycja 18 ([O1, Proposition 4.1]) $\mathbf{Alg\,Lat}\,\mathscr{M}(\boldsymbol{\lambda})$ *jest złożona z wszystkich operatorów $A \in \mathbf{B}(\ell^2(V))$, które dla dowolnych $f, g \in \ell^2(V)$ spełniają następujący warunek:*

$$\Big(\forall \hat{\varphi} \in \mathcal{M}_0(\boldsymbol{\lambda}) \ \ \langle M_{\hat{\varphi}} f, g\rangle = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad \langle Af, g\rangle = 0.$$

Powyższy rezultat umożliwia natomiast wykazanie refleksywności przesunięć ważonych na drzewach skierowanych dla których "promień spektralny" $r_2^{\mathscr{P}}(S_{\boldsymbol{\lambda}})$ liczony wzdłuż ścieżek $\mathscr{T}$ jest dodatni.

Twierdzenie 19 ([O1, Theorem 4.3]) *Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie przeliczalnym, ukorzenionym i bezlistnym drzewem skierowanym, $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ} \subseteq (0, \infty)$ oraz $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{B}(\ell^2(V))$. Jeśli $r_2^{\mathscr{P}}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) > 0$ dla każdego $\mathscr{P} \in \mathcal{P}$, to $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest refleksywny.*

W powyższym twierdzeniu

$$r_2^{\mathscr{P}}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) = \lim_{n\to\infty} \inf \Big\{ \big(\lambda_{\mathsf{root}\,|v}\big)^{\frac{1}{|v|}} \colon v \in \mathscr{P}, |v| \geqslant n \Big\}, \quad \mathscr{P} \in \mathcal{P},$$

gdzie $\mathcal{P}$ oznacza zbiór wszystkich ścieżek drzewa $\mathscr{T}$. Twierdzenie 19 jest odpowiednikiem wspomnianego już wcześniej rezultatu Sarasona w kontekście przesunięć na drzewach skierowanych.

Osobnym zagadnieniem badanym w [O1] była kwestia możliwości reprezentacji

$$\ell^2(V) = \mathcal{N}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^*) \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_{\boldsymbol{\lambda}}^n(\mathcal{N}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^*)),$$

czyli rozkładu typu Wolda, nawiązującego oczywiście do rozkładu Wolda dla klasycznego przesunięcia na $\ell^2(\mathbb{N})$. Wynik, który uzyskano (patrz [O1, Theorem 6.4]) wskazuje, że taki rozkład zachodzi dla injektywnych przesunięć ważonych na drzewach skierowanych, które są zbalansowane, czyli spełniają warunek

$$\|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_u\| = \|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\| \text{ dla dowolnych } u,\, v \in V \text{ takich, że } |u| = |v|.$$

Brak założenia injektywności albo spełniania warunku zbalansowania powoduje, że rozkład typu Wolda może nie mieć miejsca, na co zaprezentowane jest szereg przykładów (patrz [O1, Examples 6.6-6.8 oraz Example 6.10]).

W przypadku ograniczonych ważonych przesunięć na ważonych drzewach skierowanych można wykorzystać pojęcie BPE (z ang. „bounded point evaluation"), czyli $w \in \mathbb{C}$ spełniających

$$\sum_{v \in V} \beta_v^{-1} |w|^{2|v|} < \infty,$$

aby uzyskać, przy pewnych dodatkowych założeniach, dodatkowe informacje na temat widma punktowego sprzężenia operatora $S_{\boldsymbol{\lambda}}$, albo ogólniej dla operatora mnożenia, którego symbol jest mnożnikiem (patrz [O4, Corollary 7.8]):

$$\varphi\big(\operatorname{int}(\mathsf{bpe}(\mathscr{T}_{\boldsymbol{\beta}}))\big)^* \subseteq \sigma_p(M_{\hat{\varphi}}^*),$$

gdzie $\mathsf{bpe}(\mathscr{T}_{\boldsymbol{\beta}})$ oznacza zbiór BPE dla $S_{\boldsymbol{\lambda}}$. Wynik ten zaś jest konsekwencją swoistego rachunku funkcyjnego

Twierdzenie 20 ([O4, Theorem 5.8]) *Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie przeliczalnym, ukorzenionym i bezlistnym drzewem skierowanym, $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_v\}_{v \in V} \subseteq (0, \infty)$ oraz $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ} \subseteq (0, \infty)$. Jeśli dla dowolnego $u \in V$ zachodzi $\sum_{v \in \mathsf{Chi}(u)} \lambda_v = 1$ oraz $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{B}(\ell^2(\boldsymbol{\beta}))$, to*

$$\mathsf{V}_w(M_{\hat{\varphi}} f) = \varphi(w)\, \mathsf{V}_w(f), \qquad f \in \ell^2(\boldsymbol{\beta}),\ \hat{\varphi} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\lambda}),\ w \in \operatorname{int}(\mathsf{bpe}(\mathscr{T}_{\boldsymbol{\beta}})).$$

Zagadnienia poruszane w pracach [O4] oraz [O1] były wcześniej rozważane w kontekście klasycznych przesunięć, o czym traktuje doskonała monografia [25] autorstwa Shieldsa. W kontekście przesunięć na drzewach skierowanych, były one również badane przez Chavana, Pradhana i Trivediego w [6, 7] z wykorzystaniem modelu analitycznego uzyskanego w oparciu o wyniki Shimorina i funkcje analityczne o wartościach wektorowych. Te badania były prowadzone równolegle i niezależnie od tych związanych z rozprawą.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Prace składające się na pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze:

[P1] P. Budzyński, P. Dymek, A. Płaneta, Quasinormal extensions of subnormal operator-weighted composition operators in ℓ^2-spaces, J. Math. Anal. Appl. 452 (2017), 27-46.

[P2] P. Budzyński, P. Dymek, A. Płaneta, Unbounded composition operators via inductive limits: cosubnormal operators with matrix symbols, Filomat 31 (2017), 1665-1670.

[P3] P. Budzyński, P. Dymek, A. Płaneta, Unbounded composition operators via inductive limits: cosubnormal operators with matrix symbols. II, Banach J. Math. Anal. 11 (2017), 164-187.

[P4] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Subnormal weighted shifts on directed trees whose nth powers have trivial domain, J. Math. Anal. Appl. 435 (2016), 302-314.

[P5] P. Budzyński, A. Płaneta, Dense definiteness and boundedness of composition operators in L^2-spaces via inductive limits, Oper. Matrices, 9 (2015), 853-876.

[P6] P. Budzyński, K. Piwowarczyk, M. Ptak, A note on k-hyperreflexivity of Toeplitz-harmonic subspaces, Bull. Korean Math. Soc. 51 (2014), 1727-1733.

[P7] P. Budzyński, P. Dymek, Z. J. Jabłoński, J. Stochel, Subnormal weighted shifts on directed trees and composition operators in L^2-spaces with non-densely defined powers, Abstract Appl. Anal. vol. 2014 (2014), Article ID 791817, 6 pages.

[P8] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, A multiplicative property characterizes quasinormal composition operators in L^2-spaces, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), 576-581.

[P9] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, On unbounded composition operators in L^2-spaces, Ann. Mat. Pura Appl. 193 (2014), 663-688.

[P10] P. Budzyński, A note on unbounded hyponormal composition operators in L^2-spaces, J. Funct. Sp. Appl. vol. 2012 (2012), Article ID 902853, 8 pages.

[P11] P. Budzyński, J. Stochel, Joint subnormality of n-tuples and C_0-semigroups of composition operators on L^2-spaces. II, Studia Math. 193 (2009), 29-52.

[P12] P. Budzyński, J. Stochel, Joint subnormality of n-tuples and C_0-semigroups of composition operators on L^2-spaces, Studia Math. 179 (2007), 167-184.

W pracy [P1] zaproponowano konstrukcję rozszerzenia quasinormalnego dla ważonego operatora podstawiania na przestrzeni L^2 nad dyskretną przestrzenią mierzalną, którego wagi są operatorami mnożenia, czego konsekwencją było kryterium na subnormalność klasy takich operatorów. Są one zdefiniowane następująco. Niech X będzie zbiorem przeliczalnym, μ będzie miarą dyskretną na X, $\phi\colon \to X$, $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{\mathcal{H}_x \colon x \in X\}$ będzie rodziną przestrzeni Hilberta oraz $\boldsymbol{\Lambda} = \{\Lambda_x \colon x \in X\}$ będzie rodziną operatorów takich, że $\Lambda_x \colon \mathcal{H}_{\phi(x)} \to \mathcal{H}_x$ dla każdego $x \in X$. Powiemy wtedy, że $(X, \phi, \mu, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\Lambda})$ jest dopuszczający. Przez $\mathscr{D}(\boldsymbol{\Lambda})$ oznaczamy zbiór wszystkich $\boldsymbol{f} \in \ell^2(\boldsymbol{\mathcal{H}}, \mu)$ takich, że $f_y \in \bigcap_{z \in \phi^{-1}(\{y\})} \mathscr{D}(\Lambda_z)$ dla każdego $y \in \phi(X)$. Ważony (operatorowo) operator podstawiania w $\ell^2(\boldsymbol{\mathcal{H}}, \mu)$ indukowany przez ϕ oraz $\boldsymbol{\Lambda}$, to operator

$$C_{\phi,\boldsymbol{\Lambda}} \colon \ell^2(\boldsymbol{\mathcal{H}}, \mu) \supseteq \mathcal{D}\left(C_{\phi,\boldsymbol{\Lambda}}\right) \to \ell^2(\boldsymbol{\mathcal{H}}, \mu)$$

określony przez

$$\mathscr{D}(C_{\phi,\boldsymbol{\Lambda}}) = \Big\{\mathbf{F} \in \mathscr{D}(\boldsymbol{\Lambda})\colon \quad \sum_{x\in X} \|\Lambda_x f_{\phi(x)}\|^2_{\mathcal{H}_x}\mu_x < \infty\Big\},$$
$$\big(C_{\phi,\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{F}\big)_x = \Lambda_x f_{\phi(x)}, \quad x \in X,\ \mathbf{F} \in \mathscr{D}(C_{\phi,\boldsymbol{\Lambda}}).$$

W pracy zaproponowano warunki, przy których ważony operator podstawiania z wagami będącymi operatorami mnożenia jest subnormalny (patrz [P1, Theorem 3.6]), co jak już wspomniano osiągnięto za pomocą konstrukcji rozszerzenia quasinormalnego. Konstrukcja ta jest adaptacją konstrukcji użytych w [O5] oraz [O2] w przypadku ważonych operatorów podstawiania w przestrzeniach typu L^2. Podano szereg przykładów na zastosowanie wspomnianego kryterium na subnormalność (uogólnienie kryterium Bergera-Gellara-Wallena, subnormalność ważonego operatora podstawiania, którego symbol indukuje drzewo o stałej walencji, a wagi są operatorami mnożenia przez zmienną niezależną, dyskretna wersja kryterium z [O2], itp.). Zagadnienia subnormalności ograniczonego jednostronnego przesunięcia z wagami operatorowym dotyczyła praca [28]

W pracach [P5], [P3] oraz [P2] badaniom podlegały nieograniczone operatory podstawiania. We wszystkich pracach wykorzystane metody bazowały na induktywnych przejściach granicznych. Badanie te zostały zainspirowane pracami [22, 18, 27]. W [P5] zaproponowano warunki umożliwiające stwierdzenie, czy operator podstawiania działający w przestrzeni L^2 będącą granicą induktywną ciągu przestrzeni L^2 nad projektywnym systemem przestrzeni mierzalnych jest poprawnie określony, gęsto określony, czy ograniczony (patrz [P5, Theorem 4.11] oraz [P5, 4.12]). Modelowym przykładem jest operator podstawiania indukowany przez nieskończoną macierz i działający w przestrzeni L^2 z miarą gaussowską $\mu_{\mathtt{G}}$ na $\mathbb{R}^\infty$. W takim przypadku z ogólnych zawartych w pracy twierdzeń można wydedukować następujący rezultat.

Wniosek 21 ([P5, Proposition 5.3]) *Niech A będzie transformacją $\mathbb{R}^\infty$ indukowaną przez macierz $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$. Niech A_n, $n \in \mathbb{N}$, będzie tranformacją $\mathbb{R}^n$ indukowaną przez macierz $(a_{ij})_{i,j=1}^n$. Jeżeli spełnione są:*

(i) $\inf_{n\in\mathbb{N}} |\det A_n| > 0$,

(ii) dla każdego $j \in \mathbb{N}$ istnieje $K \in \mathbb{N}$ takie, że $a_{j,k} = 0$ dla wszystkich $k \geqslant K$,

(iii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| \leqslant 1$,

to $C_A \in \mathbf{B}(L^2(\mu_{\mathtt{G}}))$. Ponadto, C_A jest granicą SOT ciągu $\{C_{A_n} \otimes I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie I_n oznacza operator identycznościowy na $L^2(\mu_{\mathtt{G}})$.

W pracy [P2] rozważane są operatory podstawiania indukowane przez transformacje liniowe $\mathbb{R}^n$ w przestrzeniach L^2 związanych miarami pochodzącymi od funkcji analitycznych z nieujemnymi współczynnikami w rozwinięciu. Badania nad takimi operatorami zostały zapoczątkowane w [27], gdzie w przypadku ograniczonym scharakteryzowano ich subnoramalność. Główny wynik [P2] to kryterium na kosubnormalność tego typu operatorów, które wypowiemy poniżej. Niech $\mathscr{E}_{V+}$ oznacza ogół funkcji całkowitych γ na $\mathbb{C}$ postaci $\gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, dla $z \in \mathbb{C}$, gdzie a_n są nieujemne oraz $a_k > 0$ dla pewnego $k \geqslant 1$. Jeśli $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathscr{E}_{V+}$ oraz $|\cdot|$ jest normą na $\mathbb{R}^\kappa$ indukowaną przez iloczyn skalarny, to $\mu_\gamma^{|\cdot|}$ jest miarą borelowską na $\mathbb{R}^\kappa$ określoną przez

$$\mu_\gamma^{|\cdot|}(\mathrm{d}x) = \gamma(|x|^2)\, \mathrm{m}_\kappa(\mathrm{d}x),$$

gdzie m_κ oznacz miarę Lebesgue na $\mathbb{R}^\kappa$.

Twierdzenie 22 ([P2, Theorem 3.1]) *Niech A będzie odwracalnym liniowym odwzorowanie $\mathbb{R}^\kappa$. Jeśli A jest normalne w $(\mathbb{R}^\kappa, |\cdot|)$, to C_A jest kosubnormalny w $L^2(\mu_{1/\gamma}^{|\cdot|})$, tzn., C_A^* jest subnormalny w $L^2(\mu_{1/\gamma}^{|\cdot|})$.*

W pracy [P3], która dotyczy klasy operatorów związanych z operatorami kosubnormalnymi, rozwijane są metody z dwóch wcześniej wymienionych prac.

Niech $n, r \in \mathbb{Z}_+$. Powiemy, że gęsto określony operator T w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ należy do klasy $\mathcal{S}_{n,r}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $m \in \mathbb{N}$ oraz $a = \{a_{p,q}^{i,j}\}_{p,q=0,\ldots,n}^{i,j=1,\ldots,m} \subset \mathbb{C}$,

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{p,q=0}^{n_a} a_{p,q}^{i,j} \lambda^p \bar{\lambda}^q z_i \bar{z}_j \geqslant 0, \quad \lambda, z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}, \tag{5.1}$$

implikuje

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{p,q=0}^{n_a} \sum_{k,l=0}^{r} a_{p,q}^{i,j} \left\langle T^{p+k} f_i^l, T^{q+l} f_j^k \right\rangle \geqslant 0, \tag{5.2}$$

dla każdego skończonego ciągu $\{f_i^k \colon i = 1, \ldots, m,\ k = 0, \ldots, r\} \subseteq \mathcal{D}(T^{n_a+r})$. Powiemy natomiast, że T należy do $\mathcal{S}_{n,r}^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy T^* należy do $\mathcal{S}_{n,r}$.

Definicja powyższej klasy jest inspirowana kryterium na subnormalność z pracy [8]. Jak można wykazać, subnormalność operatora S oznacza, że $S \in \mathcal{S}_{n,r}$ dla dowolnych $n, r \in \mathbb{Z}_+$, natomiast w przypadku, gdy $S \in \mathcal{S}_{n,0}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}_+$, to $S|_{\mathcal{D}^\infty(S)}$ jest subnormalny.

Praca dostarcza kryteria na przynależność operatorów podstawiania indukowanych przez nieskończone macierze do klasy $\mathcal{S}_{n,r}^*$ (patrz [P3, Proposition 5.2] oraz [P3, Proposition 5.9]). Pozwala na wskazanie rozmaitych przykładów operatorów, w przypadku których metoda induktywna wydaje się być jedyną możliwą do zastosowania, w szczególności przykład operatora subnormalnego związanego z trójdiagonalną macierzą nieskończoną.

Praca [P6] podejmuje zagadnienie k-hyperrefleksywności. Przypuśćmy, że $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$ jest przestrzenią liniową. Dla $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ oraz $k \in \mathbb{N}$ możemy rozważyć

$$d(A, \mathcal{S}) = \inf\{\|A - T\| \colon T \in \mathcal{S}\}, \quad \alpha_k(A, \mathcal{S}) = \sup\{|\langle A, t\rangle| \colon t \in \mathcal{S}_\perp \cap \mathbb{B}_k(\mathcal{H})\},$$

gdzie $\langle A, t\rangle = \operatorname{tr}(At)$ (ślad), $\mathcal{S}_\perp = \{t \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \colon \langle T, t\rangle = 0$ dla wszystkich $T \in \mathcal{S}\}$ oraz $\mathbb{B}_k(\mathcal{H})$ oznacza kulę jednostkową w przestrzeni operatorów rzędu k (względem normy śladowej $\|\cdot\|_1$). Przestrzeń $\mathcal{S}$ jest *k-hyperrefleksywna*, jeżeli istnieje stała C taka, że

$$d(A, \mathcal{S}) \leqslant C\, \alpha_k(A, \mathcal{S}), \quad A \in \mathbf{B}(\mathcal{H}). \tag{5.3}$$

Z kolei operator $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ nazywamy k-hyperrefleksywnym, jeżli $\mathcal{W}(T)$ jest k-hyperrefleksywna. Hyperrefleksywność (tutaj 1-refleksywność), własność silniejsza od refleksywności, została wprowadzona przez Arvesona w [1], który wykazał, że algebry gniazdowe mają własność hyperrefleksywności. Davidson w [11] wykazał natomiast, że algebra analitycznych operatorów Toeplitza, czyli algebra generowana przez izometryczne przesunięcie jednostronne, jest hyperrefleksywna. Z drugiej jednak strony, o przestrzeni wszystkich operatorów Toeplitza wiadomo, że nie jest nawet refleksywna. Posiada ona za to własność 2-hyperrefleksywności, co zainspirowało pytanie, czy przestrzeń generowana w analogiczny sposób za pomocą izometrii, czy operatora quasinormalnego T

$$\mathcal{T}(A) = \mathrm{w}^*\text{-cl}\,\{p(A) + q(A)^*\colon\ p \text{ oraz } q \text{ są wielomianami analitycznymi}\}.$$

jest 2-hyperrefleksywna. Przestrzenie tego typu rozważano w [10]. Praca daje pozytywną odpowiedź na to pytanie.

Twierdzenie 23 ([P6, Theorem 8] oraz [P6, Theorem 9]) *Niech $V \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem izometrycznym lub quasinormalnym. Wtedy każda *słabo domknięte podprzestrzeń $\mathcal{S}$ przestrzeni $\mathcal{T}(V)$ jest 2-hyperrefleksywna.*

Prace [P4], [P7] oraz [P10] są związane z wymienionym już wcześniej problemem istnienie subnormalnego ważonego operatora podstawiani, którego kwadrat posiada trywialną dziedzinę. W pracy [P10] podany jest elementarny przykład operatora podstawiania o tej własności, że kwadrat ma trywialną potęgę. Niezależnie, taki przykład, ale w klasie przesunięć ważonych na drzewach skierowanych, został podany w [17]. W pracy [P7], w oparciu o uzyskane w [O2] kryterium na subnormalność, wskazano przykład subnormalnego ważonego operatora podstawiania, którego $n$ta potęgą, z dowolnie wskazanym $N \geqslant 2$, nie jest gęsta (patrz [P7, Example 1] oraz [P7, Remark 8]). Ostatecznie problem został rozwiązany w [P4, Corollary 3.4], bazując na twierdzeniu:

Twierdzenie 24 ([P4, Theorem 3.1]) *Przypuśćmy, że $\mathscr{T} = (V, E)$ jest ekstremalnym drzewem skierowanym oraz $n \in \mathbb{N}$. Istnieje wtedy subnormalne ważone przesunięcie $S_{\boldsymbol\lambda}$ na $\mathscr{T}$ z niezerowymi wagami takie, że $S_{\boldsymbol\lambda}^n$ jest gęsto określony oraz $\mathscr{D}(S_{\boldsymbol\lambda}^{n+1}) = \{0\}$.*

Drzewem ekstremalnym nazywamy drzewo skierowane którego każdy wierzchołek ma przeliczalną liczbę dzieci (z dokładnością do izomorfizmu są takie dwa drzewa).

W pracy [P8] zaproponowano kryterium na quasinormalność dla operatorów podstawiania, które jest nowe zarówno w przypadku nieograniczonym, jak i ograniczonym.

Twierdzenie 25 ([P8, Theorem 3.1]) *Niech ϕ będzie transformacją X taką, że C_ϕ jest gęsto określony. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) C_ϕ *jest quasinormalny,*

(ii) $\chi_\sigma \circ \mathsf{h}_\phi \circ \phi \cdot \chi_\sigma \circ \mathsf{h}_\phi = \chi_\sigma \circ \mathsf{h}_\phi \circ \phi$ *p.w.* $[\mu]$ *dla każdego* $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$,

(iii) $\mathsf{E}(\chi_\sigma \circ \mathsf{h}_\phi) = \chi_\sigma \circ \mathsf{h}_\phi \circ \phi$ *p.w.* $[\mu]$ *dla każdego* $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$,

(iv) $\mathsf{E}(f \circ \mathsf{h}_\phi) = f \circ \mathsf{h}_\phi \circ \phi$ *p.w.* $[\mu]$ *dla każdej funkcji borelowskiej* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

(v) $\mathsf{h}_{\phi^n} = \mathsf{h}_\phi^n$ *p.w.* $[\mu]$ *dla każdego* $n \in \mathbb{Z}_+$,

(vi) $\mathsf{E}(\mathsf{h}_\phi) = \mathsf{h}_\phi \circ \phi$ *p.w.* $[\mu]$ *oraz* $\mathsf{E}(\mathsf{h}_{\phi^n}) = \mathsf{E}(\mathsf{h}_\phi)^n$ *p.w.* $[\mu]$ *dla każdego* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Spośród wyżej wymienionych warunków najważniejszy jest (v). Warto wspomnieć, że w dowodzie wykorzystany jest fakt, że dla operatora quasinormalnego można skonstruować mierzalną rodzinę miar probabilistycznych, która spełnia warunek zgodności, co pokazano w [O5], a konsekwencją tego jest formuła

$$\mathsf{h}_{\phi^n}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} t^n P(x, \mathrm{d}t) \text{ dla } \mu\text{-p.w. } x \in X \text{ oraz dowolnego } n \in \mathbb{Z}_+.$$

[P9] była pierwszą pracą podejmującą systematyczne badania nad nieograniczonymi operatorami podstawiania. Podano w niej charakteryzacje gęstej określoności zarówno dla pojedynczego operatora postawiania, jak i dla iloczynu skończonej liczby takich operatorów. Podano również charakteryzacje gęstości wektorów klasy C^∞, nawiązując do kryterium Lamberta. Głównym wynikiem pracy w tym kontekście jest następujące.

Twierdzenie 26 ([P9, Theorem 10.4]) *Niech* C_ϕ *będzie poprawnie określony. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) C_ϕ *generuje ciągi momentów Stieltjesa,*

(ii) $\{\mathsf{h}_{\phi^n}(x)\}_{n=0}^\infty$ *jest ciągiem momentów Stieltjesa dla* μ*-p.w.* $x \in X$,

(iii) $\overline{\mathscr{D}(C_\phi^k)} = L^2(\mu)$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$ *oraz* $\{\mu(\phi^{-n}(\varDelta))\}_{n=0}^\infty$ *jest ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego* $\varDelta \in \mathscr{A}$, *które spełnia* $\mu(\phi^{-k}(\varDelta)) < \infty$ *dla dowolnego* $k \in \mathbb{Z}_+$,

(iv) $\mathsf{h}_{\phi^n} < \infty$ *p.w.* $[\mu]$ *dla każdgo* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $L(p) \geqslant 0$ *p.w.* $[\mu]$ *o ile tylko* $p(t) \geqslant 0$ *dla dowolnego* $t \in \mathbb{R}_+$, *gdzie* $L\colon \mathbb{C}[t] \to \mathcal{M}$ *jest odwzorowaniem liniowym określonym wzorem*

$$L(t^n) = \mathsf{h}_{\phi^n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+;$$

$\mathbb{C}[t]$ *oznacza wielomiany zespolone jednej zmiennej rzeczywistej* t, *a* $\mathcal{M}$ *oznacza zbiór* $\mathscr{A}$*–mierzalnych funkcji na* X *o wartościach zespolonych.*

Ponado, jeśli (i) *zachodzi, to* $C_\phi^n = C_{\phi^n}$ *oraz* $\mathscr{D}^\infty(C_\phi)$ *jest rdzeniem* C_ϕ^n *dla każdego* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Twierdzenie to wskazuje, że, tak jak w przypadku ograniczonych operatorów podstawiania, generowanie ciągów momentów Stieltjesa ma miejsce tylko wtedy, gdy pochodne Radona-Nikodyma związane z kolejnymi iteracjami symbolu ϕ prowadzą do ciągów momentów Stieltjesa (patrz warunek (ii) powyżej). W odróżnieniu jednak od przypadku ograniczonego, powyższe twierdzenie wraz z rezultatami z [16], pokazuje, że subnormalności nieograniczonego operatora podstawiania nie można scharakteryzować za pomocą powyższego warunku (ii).

Praca [P9] podaje również opis rozkładu polarnego dla nieograniczonego operatora postawiania, a także charakteryzacje normalności, formalnej normalności oraz quasinormalności – wyniki, które zostały uogólnione w [O2] na przypadek ważonych operatorów podstawiania.

Subnormalność układów, C_0–półgrup oraz C_0–grup operatorów podstawiania jest tematem badań w [P11] oraz [P12]. Praca [P12] charakteryzują (łączną) subnormalność układu n przemiennych ograniczonych operatorów podstawiania za pomocą punktowej dodatniej określoności dla multi-ciągu pochodnych Radona-Nikodyma związanych z układem (patrz [P12, Theorem 3.4]). Ponadto pokazano w niej również, że C_0–półgrupa operatorów podstawiania $\{C_{\phi_t}\}_{t\geqslant 0}$ jest (łącznie) subnormalna, jeżeli rodzina pochodnych Radona-Nikodyma kanonicznie związanych z pólgrupą jest zadana przez transformacje Laplace'a rodziny nieujemnych miar Borelowskich na $\mathbb{R}_+$ (patrz [P12, Theorem 4.5] oraz [P12, Corollary 4.6]). W [P11] podjęte jest zagadnienie subnormalności dla C_0-grup operatorów podstawiania. Wykazano w niej, że przy odpowiednich założeniach dotyczących symboli, subnoralność C_0–grupy jest równoważna subnormalności operatora C_{ϕ_1} oraz zachodzeniu warunku zgodności wzdłuż trajektorii dla miar pochodzących z reprezentacji ciągów momentów Stieltjesa $\{\mathsf{h}_{\phi_1^n}(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ (patrz [P11, Theorem 6.5]).

Literatura

[1] N. T. Arveson, Interpolation problems in nest algebras, J. Funct. Anal. 20 (1975), 208-233.

[2] A. Brown, On a class of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 723-728.

[3] J. T. Campbell, M. Embry-Wardrop, R. J. Fleming, S. K. Narayan, Normal and quasinormal weighted composition operators, Glasgow Math. J. 33 (1991), 275-279.

[4] J. T. Campbell, W. E. Hornor, Seminormal composition operators. J. Operator Theory 29 (1993), 323-343.

[5] J. T. Campbell, J. E. Jamison, On some classes of weighted composition operators, Glasgow Math. J. 32 (1990), 87-94.

[6] S. Chavan, S. Trivedi, An analytic model for left-invertible weighted shifts on directed trees, J. London Math. Soc. 94, 253–279 (2016).

[7] S. Chavan, D. K. Pradhan and S. Trivedi, Multishifts on directed Cartesian products of rooted directed trees, Dissertationes Math. 527 (2017), 102 pp.

[8] D. Cichoń, J. Stochel, F. H. Szafraniec, Extending positive definiteness, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 545-577.

[9] J. B. Conway, The theory of subnormal operators, Mathematical Surveys and Monographs, 36, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[10] J. B. Conway, M. Ptak, The harmonic functional calculus and hyperreflexivity, Pacific Journal of Mathematics, 204 (2002), 19-29.

[11] K. Davidson, The distance to the analytic Toeplitz operators, Illinois J. Math 31 (1987) 2, 265-273.

[12] C. Foiaş, Décompositions en opérateurs et vecteurs propres. I., Études de ces dècompositions et leurs rapports avec les prolongements des opérateurs, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 7 (1962), 241-282.

[13] R. Gellar, L. J. Wallen, Subnormal weighted shifts and the Halmos-Bram criterion, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 375-378.

[14] D. Herrero, Subnormal bilateral weighted shifts, Notas mimeografiadas, 1971.

[15] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Weighted shifts on directed trees, Mem. Amer. Math. Soc. 216 (2012), no. 1017, viii+107pp.

[16] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, A non-hyponormal operator generating Stieltjes moment sequences, J. Funct. Anal. 262 (2012), 3946-3980.

[17] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, A hyponormal weighted shift on a directed tree whose square has trivial domain, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), 3109-3116.

[18] J. Janas, Inductive limit of operators and its applications, Studia Math. 90 (1988), 87-102.

[19] A. Lambert, Subnormality and weighted shifts, J. London Math. Soc. 14 (1976), 476-480.

[20] A. Lambert, Subnormal composition operators, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 750-754.

[21] A. Lambert, Normal extensions of subnormal composition operators, Michigan Math. J. 35 (1988), 443-450.

[22] W. Mlak, Operators induced by transformations of Gaussian variables, Ann. Polon. Math. 46 (1985), 197-212.

[23] M. Naimark, On the square of a closed symmetric operator, Doklady Akademii Nauk SSSR, vol. 26, pp. 866–870, 1940.

[24] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math. 17 (1966), 511-517.

[25] A. L. Shields, Weighted shift operators and analytic function theory, Topics in operator theory, Math. Surveys, No. 13 (Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974), pp. 49–128.

[26] R. K. Singh, A. Kumar, Characterizations of invertible, unitary, and normal composition operators, Bull. Austral. Math. Soc. 19 (1978), 81-95.

[27] J. Stochel, Seminormal composition operators on L^2 spaces induced by matrices, Hokkaido Math. J. 19 (1990), 307–324.

[28] J. Stochel, Characterizations of subnormal operators, Studia Math. 97 (1991) 227-238.

[29] J. Stochel, F. H. Szafraniec, On normal extensions of unbounded operators. I, J. Operator Theory 14 (1985), 31-55.

[30] J. Stochel and F. H. Szafraniec, On normal extensions of unbounded operators, II, Acta Sci. Math. (Szeged) 53 (1989), 153-177.

[31] J. Stochel, F. H. Szafraniec, On normal extensions of unbounded operators. III. Spectral properties, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **25** (1989), 105-139.

[32] J. Stochel, F. H. Szafraniec, The complex moment problem and subnormality: a polar decomposition approach, J. Funct. Anal. 159 (1998), 432-491.

[33] R. Whitley, Normal and quasinormal composition operators, Proc. Amer. Math. Soc. 70 (1978), 114-118.