

## AUTOREFERAT

### 1. Imię i Nazwisko:

Bartłomiej Bosek

### 2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

- Magister informatyki, Uniwersytet Jagielloński, 2004
- Doktor nauk matematycznych, dyscyplina: informatyka, Uniwersytet Jagielloński, 2008  
Tytuł rozprawy: *On-line Chain Partitioning Approach to Scheduling*

### 3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- 2008–2010: Uniwersytet Jagielloński, asystent
- od 2010: Uniwersytet Jagielloński, adiunkt

### 4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2017 r. poz. 1789)

#### a) Tytuł osiągnięcia naukowego:

**Algorytmy dla częściowych porządków oraz gier na grafach —  
kolorowanie i skojarzenia**

#### b) Lista prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

- [A1] Marcin Anholcer, Bartłomiej Bosek, Jarosław Grytczuk.  
Majority Choosability of Digraphs.  
*Electronic Journal of Combinatorics*, 24 (3), P3.57, 2017.  
<http://www.combinatorics.org/v24i3p57>
- [A2] Bartłomiej Bosek, Sebastian Czerwiński, Jarosław Grytczuk, Paweł Rzażewski.  
Harmonious coloring of uniform hypergraphs.  
*Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 10 (1), 73–87, 2016.  
<https://doi.org/10.2298/AADM160411008B>
- [A3] Bartłomiej Bosek, Stefan Felsner, Kolja Knauer, Grzegorz Matecki.  
On the Duality of Semiantichains and Unichain Coverings.  
*Order*. 33 (1), 29–38, 2016.  
<https://doi.org/10.1007/s11083-015-9348-x>  
Wersja konferencyjna<sup>1</sup>:  
Bartłomiej Bosek, Stefan Felsner, Kolja Knauer, Grzegorz Matecki.  
News about Semiantichains and Unichain Coverings.  
*7th International Computer Science Symposium in Russia (CSR 2012)*,

---

<sup>1</sup>Odniesienia do konkretnych twierdzeń numerowane są według wersji opublikowanej w czasopiśmie.

*Lecture Notes in Computer Science*, 7353, 43–51, Springer, 2012.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-30642-6\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-30642-6_5)

- [B1] Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk, Grzegorz Matecki.  
 First-Fit Coloring of Incomparability Graphs.  
*SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27 (1), 126–140, 2013.  
<https://doi.org/10.1137/110854394>  
 Wersja konferencyjna<sup>2</sup>:  
 Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk, Grzegorz Matecki.  
 Forbidden structures for efficient First-Fit chain partitioning (extended abstract).  
*European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb'11)*,  
*Electronic Notes of Discrete Mathematics*, 38, 173–179, 2011.  
<https://doi.org/10.1016/j.endm.2011.09.030>
- [B2] Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk.  
 A subexponential upper bound for the on-line chain partitioning problem.  
*Combinatorica*, 35, 1–38, 2015.  
<https://doi.org/10.1007/s00493-014-2908-7>  
 Wersja konferencyjna<sup>3</sup>:  
 Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk.  
 The Sub-exponential Upper Bound for On-Line Chain Partitioning.  
*51th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2010)*,  
 347–354, IEEE Computer Society, 2010.  
<https://doi.org/10.1109/FOCS.2010.40>
- [B3] Bartłomiej Bosek, H. A. Kierstead, Tomasz Krawczyk, Grzegorz Matecki, Matthew Smith.  
 An Easy Subexponential Bound for Online Chain Partitioning.  
*Electronic Journal of Combinatorics*, 25 (2), P2.28, 2018.  
<http://www.combinatorics.org/v25i2p28>
- [C1] Bartłomiej Bosek, Dariusz Leniowski, Piotr Sankowski, Anna Zych.  
 Online bipartite matching in offline time.  
*55th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2014)*,  
 384–393, IEEE Computer Society, 2014.  
<https://doi.org/10.1109/FOCS.2014.48>
- [C2] Bartłomiej Bosek, Dariusz Leniowski, Piotr Sankowski, Anna Zych-Pawlewicz.  
 Shortest Augmenting Paths for Online Matchings on Trees.  
*Theory of Computing Systems*, 62 (2), 337–348, 2018.  
<https://doi.org/10.1007/s00224-017-9838-x>  
 Wersja konferencyjna<sup>4</sup>:  
 Bartłomiej Bosek, Dariusz Leniowski, Piotr Sankowski, Anna Zych.  
 Shortest Augmenting Paths for Online Matchings on Trees.  
*13th International Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA 2015)*,  
*Lecture Notes in Computer Science*, 9499, 59–71, Springer, 2015.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-28684-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-28684-6_6)
- [C3] Bartłomiej Bosek, Dariusz Leniowski, Piotr Sankowski, Anna Zych-Pawlewicz.  
 A Tight Bound for Shortest Augmenting Paths on Trees.

---

<sup>2</sup>Odniesienia do konkretnych twierdzeń numerowane są według wersji opublikowanej w czasopiśmie.

<sup>3</sup>Odniesienia do konkretnych twierdzeń numerowane są według wersji opublikowanej w czasopiśmie.

<sup>4</sup>Odniesienia do konkretnych twierdzeń numerowane są według wersji opublikowanej w czasopiśmie.

*13th Latin American Theoretical Informatics Symposium (LATIN 2018),  
LATIN 2018: Theoretical Informatics, 10870, 201–216, Springer, 2018.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-77404-6\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77404-6_16)*

Pełny dowód jest zaprezentowany na repozytorium arXiv<sup>5</sup>:

Bartłomiej Bosek, Dariusz Leniowski, Piotr Sankowski, Anna Zych-Pawlewicz.

Shortest Augmenting Paths for Online Matchings on Trees.

*Computing Research Repository*, abs/1704.02093v2, 1–22, 2017.

<http://arxiv.org/abs/1704.02093v2>

c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

## KRÓTKI ZARYS

Problemy dotyczące istnienia różnych typów kolorowań grafów jak i efektywnych ich konstruowania w modelu online to kluczowe elementy algorytmicznej teorii grafów. Przedmiotem niniejszego opracowania będzie w szczególności prezentacja wyników dotyczących

- różnych wariantów kolorowania grafów oraz częściowych porządków,
- kolorowania online częściowych porządków,
- dynamicznych algorytmów znajdujących skojarzenia w grafach dwudzielnych.

Prace [A1], [A2], i [A3] dotyczą różnych wariantów kolorowania. Poruszają one różne aspekty tego problemu i w konsekwencji używają odmiennych technik dowodowych.

Jedną z odmian kolorowania jest przypisanie kolorów do wierzchołków grafu skierowanego, tak że dla każdego wierzchołka  $v$ , co najwyżej połowa sąsiadów wychodzących z  $v$  ma ten sam kolor co  $v$ . Takie kolorowanie nazywamy *kolorowaniem większościowym* grafu skierowanego. Ponadto, graf skierowany  $D$  jest *większościowo  $k$ -wybieralny*, jeśli dla dowolnego przypisania do wierzchołków list kolorów o rozmiarze  $k$  istnieje większościowe kolorowanie  $D$  z tych list. We wspólnej pracy z Anholcerem i Grytczukiem w [A1] udowodniliśmy, że każdy graf skierowany jest większościowo 4-wybieralny. Daje to pozytywną odpowiedź na pytanie zadane ostatnio przez Kreutzer, Ouma, Seymoura, van der Zypena i Wooda w [88]. Wynik ten został uzyskany dzięki udowodnieniu bardziej ogólnego twierdzenia, w którym warunek większościowy został sprytnie wzmocniony. Jednym z wniosków powyższego wzmocnienia jest to, że każdy graf skierowany posiada kolorowanie wierzchołków z dowolnych list o rozmiarze trzy, w którym co najwyżej  $2/3$  wychodzących sąsiadów dowolnego wierzchołka ma ten sam kolor. Rozwiązuje to inny problem postawiony w [88] i jest on znaczącym krokiem w rozwiązaniu intrygującej hipotezy stwierdzającej, że każdy graf skierowany jest większościowo 3-kolorowalny.

Myśląc o kolorowaniu grafu czy też hipergrafu, na podstawie typowych lokalnych warunków kolorowania (zależnych od najbliższego sąsiedztwa), stawiamy czasami dodatkowe warunki, które są globalne. Dzieje się tak np. w *harmonijnym kolorowaniu*. W [A2] z Czerwińskim, Grytczukiem oraz Rzażewskim studiowaliśmy tę wersję kolorowania dla  $k$ -jednorodnych hipergrafów, które jest takim kolorowaniem wierzchołków, w którym dwa wierzchołki należące do tej samej krawędzi mają różne kolory, a każdy  $k$ -elementowy podzbiór kolorów pojawia się na co najwyżej jednej krawędzi. *Liczba harmonijna*  $h(H)$  hipergrafu  $H$  to najmniejsza liczba kolorów potrzebnych do takiego pokolorowania  $H$ . Te pojęcia powstały jako naturalne rozszerzenie szeroko studiowanego tematu harmonijnego kolorowania grafów prostych. W [A2], udowodniliśmy, że  $k$ -jedrodne hipergrafy o ograniczonym maksymalnym stopniu  $\Delta$  są harmonijnie kolorowalne za pomocą  $h(H) = \mathcal{O}(\sqrt[k]{k!m})$  kolorów, gdzie  $m$  to liczba krawędzi w  $H$ . Ograniczenie to jest z dokładnością do stałej multiplikatywnej najlepsze z możliwych. Co więcej, dla każdej stałej  $\Delta$  ta stała ma

<sup>5</sup>Odniesienia do konkretnych twierdzeń numerowane są według wersji opublikowanej na arXivie.

wartość 1 gdy  $k \rightarrow \infty$ . Używamy nowej metody, zwanej *kompresją entropii*, która wyłoniła się z algorytmicznej wersji Lokalnego Lematu Lovásza wprowadzonej przez Mosera i Tardosa w [92]. Ta metoda w rzeczywistości daje skuteczny randomizowany algorytm tworzący pożądane kolorowanie. Ponadto, zastosowanie powyższej metody daje również takie samo ograniczenie w wersji listowej tego problemu.

Innym ważnym aspektem kolorowania grafów jest minimaksowa zależność między liczbą kolorów a rozmiarem klik. Jeśli  $G$  to graf nieporównywalności zbioru częściowo uporządkowanego (posetu)  $P$ , to właściwe kolorowanie  $G$  tworzy podział na łańcuchy posetu  $P$ , a klika w  $G$  odpowiada antyłańcuchowi w  $P$ . Twierdzenie Dilwortha [27] głosi, że najmniejsza liczba łańcuchów potrzebnych do pokrycia posetu  $P$  jest równa wielkości największego antyłańcucha w  $P$ . W języku grafów oznacza to, że minimalna liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania grafu nieporównywalności  $G$  jest równa wielkości największej klik w  $G$ . Innymi słowy oznacza to, że grafy nieporównywalności są doskonałe. Saks i West [118, 119] w 1981 roku postawili hipotezę, że relacja minimaksowa występuje także między maksymalnym semi-antyłańcuchem, a minimalnym pokryciem uni-łańcuchowym w dowolnym iloczynie kartezyjskim dwóch posetów. Po ponad 30 latach, w [A3] z Felsnerem, Knauerem oraz Mateckim, obaliliśmy powyższe przypuszczenia Saksa i Westa, przedstawiając przykłady pokazujące, że w ogólności relacja minimaksowa nie jest spełniona. Z drugiej strony, prezentujemy również pozytywne wyniki, określając warunki na posetach, które implikują pożądaną relację minimaksową. Na podstawie tych warunków identyfikujemy kilka nowych rodzin posetów, w których hipoteza jest spełniona. Ponadto znacznie upraszczamy już istniejące dowody w kilku innych przypadkach.

Artykuły [B1], [B2], i [B3] dotyczą algorytmów online pokrywania łańcuchami (kolorowania) zbiorów częściowo uporządkowanych (grafów nieporównywalności). *Algorytm kolorowania online* sukcesywnie koloruje wierzchołki prezentowane jeden po drugim tak, aby kolor przypisany do nowo zaprezentowanego wierzchołka  $v$ , był określany wyłącznie przez podgraf rozpięty na wierzchołkach zaprezentowanych do momentu pojawienia się  $v$ . Jednym z najprostszych algorytmów kolorowania online jest first-fit. Algorytm *first-fit* dla każdego nowo zaprezentowanego wierzchołka  $v$  przypisuje najmniejszą liczbę naturalną, która nie pojawia się w uprzednio przedstawionych sąsiadach  $v$ . Kierstead w [83] przedstawił poset szerokości 2, dla którego first-fit jest zmuszony do użycia dowolnie wielu łańcuchów. W [B1] z Krawczykiem i Mateckim przedstawiamy pełną charakterystykę klasy posetów, dla których liczba użytych kolorów (łańcuchów) przez first-fit jest funkcją szerokości, czyli najlepszego rozwiązania offline. Precyzując niech  $\mathcal{P}$  będzie klasą posetów o ograniczonej szerokości, zamkniętą na branie indukowanych podposetów. W [B1] (z Krawczykiem i Mateckim) udowodniliśmy, że first-fit używa ograniczonej liczby łańcuchów na posetach w  $\mathcal{P}$  wtedy i tylko wtedy, gdy klasa  $\mathcal{P}$  nie zawiera jakiegoś ustalonego posetu szerokości 2.

Wyżej wymienione wyniki wskazują, że first-fit nie jest efektywny w całej klasie zbiorów częściowo uporządkowanych. Nie jest to oczywiste, że istnieje jakikolwiek algorytm online, który dzieli porządki o ustalonej szerokości na skończoną liczbę łańcuchów. Problem ten został pozytywnie rozstrzygnięty przez Kiersteada [82], który zaprezentował algorytm używający co najwyżej  $(5^w - 1)/4$  łańcuchów na posetach o szerokości  $w$  i od lat 80-tych było to najlepsze rozwiązanie. Pytanie, czy istnieje algorytm online, który pokrywa posety o szerokości co najwyżej  $w$  wykorzystując wielomianową liczbę łańcuchów, stało się głównym pytaniem w dziedzinie pokrywania łańcuchowego online, patrz rozdział Trottera *Partially ordered sets* w *Handbook of Combinatorics* [48]. W [B2] z Krawczykiem prezentujemy algorytm online, który pokrywa porządki o szerokości  $w$  na co najwyżej  $w^{13 \log_2 w}$  łańcuchów. Wynik ten jest pierwszym podwykładniczym oszacowaniem dla problemu pokrywania łańcuchowego online. Później okazało się, że istnieje o wiele prostszy dowód tej samej złożoności z nieco lepszą stałą. W [B3] z Kiersteadem, Krawczykiem, Mateckim oraz M. Smithem poprawiliśmy powyższy wynik do  $w^{6.5 \log_2 w + 7}$  z krótszym dowodem, łącząc pracę Boska i Krawczyka z pracą Kiersteada i M. Smitha analizującą pokrycie

łańcuchowe produkowane przez first-fit na porządkach niezawierających tak zwanych drabin. Niestety zastosowane techniki nie dały szansy na udowodnienie niczego mocniejszego. W [B3] podajemy przykłady ilustrujące ograniczenia naszego podejścia. Aby osiągnąć znaczący postęp, powróciliśmy do technik zawartych w pierwszym podwykładniczym oszacowaniu z pracy [B2]. Niedawno w [20] z Krawczykiem przedstawiliśmy algorytm online, który pokrywa porządki o szerokościach  $w$  za pomocą  $w^{\mathcal{O}(\log \log w)}$  łańcuchów. Pytanie, czy istnieje algorytm online wykorzystujący wielomianowo wiele łańcuchów w zależności od szerokości, jest wciąż otwarte i stało się jeszcze bardziej intrygujące.

Zagadnienie znajdowania pokrycia łańcuchowego częściowych porządków jest ściśle związane z problemem skojarzenia w grafach dwudzielnych. Przykładem takiego powiązania jest równoważność w przypadku offline. Artykuły [C1], [C2] i [C3] poruszają problem utrzymywania maksymalnych skojarzeń we wzrastających grafach dwudzielnych. W tym przypadku graf dwudzielny pomiędzy  $n$  klientami i  $n$  serwerami jest prezentowany w sposób online. Klienci są przedstawiani w pewnej nieznannej kolejności i żądają skojarzenia do serwera z podanego na wstępie podzbioru dopuszczalnych serwerów. Szczególną cechą omawianego modelu w odróżnieniu od problemów online jest to, że z jednej strony pozwalamy klientom na przełączanie się pomiędzy serwerami, ale za to żądamy, aby skojarzenie w każdym kroku było maksymalne, tzn. po przybyciu klienta algorytm znajduje ścieżkę powiększającą od nowo przybyłego klienta do wolnego serwera. Celem jest zminimalizowanie całościowej liczby zmian przydziałów klientów pomiędzy serwerami. Najbardziej znane dolne oszacowanie jest łatwe do udowodnienia  $\Omega(n \log n)$ , co jest także prawdą w klasie grafów złożonych z ścieżek prostych. Chaudhuri *i inni* w pracy [23] zadali pytanie czy  $\mathcal{O}(n \log n)$  jest także górnym oszacowaniem dla całkowitej liczby zmian. Pomimo, że w tym problemie test to główne otwarte pytanie, w tym czasie jedynym znanym oszacowaniem było oczywiste  $\mathcal{O}(n^2)$ . W [C1] z Leniowskim, Sankowskim i Zych-Pawlewicz zaprezentowaliśmy algorytm przyrostowy, który zmienia skojarzenia każdego serwera co najwyżej  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  razy. Daje to ograniczenie  $\mathcal{O}(n^{3/2})$  na całkowitą liczbę zmian, co jest pierwszym nietrywialnym postępem w kierunku rozwiązania wcześniej wspomnianej głównej hipotezy. Co więcej, prezentujemy implementację powyższego algorytmu, która działa w sumarycznym czasie  $\mathcal{O}(\sqrt{nm})$ . Daje to algorytm równie szybki jak najlepszy znany algorytm Hopcrofta-Karpa [62], ale z tą różnicą, że nasz dodatkowo działa w modelu przyrostowym.

Innym podejściem do konstruowania maksymalnego skojarzenia w modelu przyrostowym jest takie, aby z osobna zminimalizować liczbę zmian podczas rozszerzania skojarzenia dokonywanego po każdym dodaniu klienta. Sprowadza się to de facto do tego, że zmiany skojarzeń są realizowane wzdłuż tak zwanej najkrótszej ścieżki powiększającej. Pomysł ten został wprowadzony przez Edmonsa i Karpa w [31], aby pokazać pierwszy algorytm silnie wielomianowego czasu dla problemu maksymalnego przepływu. Zaskakujące jest to, że choć podejście to było już badane od wielu lat, to jest ono dalekie od pełnego zrozumienia. Przykładem tego jest problem skojarzenia w grafach dwudzielnych w modelu przyrostowym. Tak jak wcześniej, najlepszym znanym dolnym ograniczeniem jest  $\Omega(n \log n)$ , co dotyczy także klasy grafów składających się jedynie z ścieżek prostych. Chaudhuri *i inni* [23] postawili hipotezę, że całkowita długość wszystkich najkrótszych ścieżek rozszerzających wynosi  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Oznaczałoby to, że algorytm najkrótszych ścieżek powiększających jest optymalny z dokładnością do stałej. W momencie stawiania powyższej hipotezy, nawet dla drzew, jedynym znanym górnym ograniczeniem dla tego problemu było oczywiste  $\mathcal{O}(n^2)$ . W [C2] z Leniowskim, Sankowskim i Zych-Pawlewicz, poprawiliśmy górne oszacowanie do  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ , w przypadku dla drzew. Następnie Bernstein *i inni* [15] udowodnili górne ograniczenie  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$  dla klasy wszystkich grafów dwudzielnych. Z kolei, w [C3] z Leniowskim, Sankowskim i Zych-Pawlewicz przedstawiliśmy dwudziestostronicowy argument dowodzący, w przypadku drzew, górnego ograniczenie  $\mathcal{O}(n \log n)$ , zamykając w ten sposób

powyższy problem w tej klasie grafów. Wydaje się, że zastosowana przez nas metoda byłaby pomocna w rozszerzeniu ograniczenia  $\mathcal{O}(n \log n)$  dla klasy wszystkich grafów dwudzielnych.

## A. KOLOROWANIE GRAFÓW I ZBIORÓW CZĘŚCIOWO UPORZĄDKOWANYCH

**A.1. Większościowa wybieralność w grafach skierowanych.** Niech  $D$  będzie grafem skierowanym (digrafem). Niech  $d^+(v)$  oznacza liczbę wychodzących sąsiadów wierzchołka  $v$ . Kolorowanie  $c$  wierzchołków  $D$  nazywa się *kolorowaniem większościowym*, jeśli dla każdego wierzchołka  $v$  liczba jego sąsiadów wychodzących w kolorze  $c(v)$  jest równa co najwyżej  $\frac{1}{2}d^+(v)$ . Taka wersja kolorowania została ostatnio wprowadzona przez van der Zypena [110] w związku z sieciami neuronowymi i była badana przez Kreutzera i innych w [88]. Udowodniono między innymi, że każdy graf skierowany jest większościowo 4-kolorowalny. Dowód jest bardzo prosty: po pierwsze, zauważmy, że każdy graf skierowany nieposiadający skierowanych cykli jest większościowo 2-kolorowalny. Takie kolorowanie można na przykład otrzymać, kolorując zachłannie wierzchołki w kolejności posortowania topologicznego. Następnie podzielmy krawędzie danego grafu skierowanego na dwa acykliczne grafy skierowane i weźmy produkt dwóch w powyższy sposób otrzymanych kolorowań. Autorzy [88] stawiają przypuszczenie, że każdy graf skierowany da się większościowo pokolorować za pomocą trzech kolorów. Byłoby to optymalne, ponieważ większościowe kolorowanie nieparzystego cyklu skierowanego jest tym samym co „zwykłe” kolorowanie nieskierowanego cyklu o tej samej nieparzystej długości.

Kolejny interesujący problem postawiony w [88] dotyczy *listowej* wersji kolorowania większościowego. Załóżmy, że każdemu wierzchołkowi  $v$  z grafu skierowanego  $D$  jest przypisana lista kolorów  $L(v)$ . Wtedy  $D$  jest większościowo kolorowalny z tych list, jeśli istnieje większościowe kolorowanie  $c$  digrafu  $D$  spełniające warunek, że  $c(v) \in L(v)$  dla dowolnego wierzchołka  $v$ . Jeśli  $D$  jest większościowo kolorowalny z dowolnej listy o rozmiarze  $k$ , wtedy mówimy, że  $D$  jest *większościowo  $k$ -wybieralny*. Autorzy [88] zapytali, czy istnieje skończona liczba  $k$  taka, że każdy graf skierowany jest większościowo  $k$ -wybieralny. We wspólnej pracy z Anholcerem i Grytczukiem w [A1], odpowiadamy na to pytanie twierdząco, udowadniając następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1** (Wniosek 2 w [A1]). *Każdy graf skierowany jest większościowo 4-wybieralny.*

Udowodniliśmy również, że każdy graf skierowany jest większościowo 3-wybieralny przy bardziej rozluźnionym warunku:

**Twierdzenie 2** (Wniosek 3 w [A1]). *Niech  $D$  będzie digrafem z listami kolorów o rozmiarze trzy przypisanymi do wierzchołków. Wtedy istnieje kolorowanie z tych list takie, że dla każdego wierzchołka  $v$ , co najwyżej  $\frac{2}{3}$  jego sąsiadów ma kolor  $v$ .*

Rozwiązuje to inny problem postawiony w [88] i rozszerza wynik Seymoura z [105], potwierdzając, że każdy graf skierowany można pokolorować za pomocą 3 kolorów w taki sposób, że co najmniej jeden sąsiad każdego wierzchołka (o ile w ogóle ma wychodzącego sąsiada) jest inaczej pokolorowany.

Twierdzenia 1 i 2 są następstwem następującego silniejszego twierdzenia.

**Twierdzenie 3** (Twierdzenie 1 w [A1]). *Niech  $D$  będzie grafem skierowanym. Załóżmy, że każdy wierzchołek  $v$  ma przypisaną listę  $L(v)$  czterech kolorów oraz że każdemu kolorowi  $x$  w  $L(v)$  jest przypisana liczba rzeczywista  $r_v(x)$ , zwana rangą koloru  $x$  w  $L(v)$ . Dodatkowo załóżmy, że dla każdego wierzchołka  $v$  ranga koloru  $r_v(x)$  spełnia następujący warunek:*

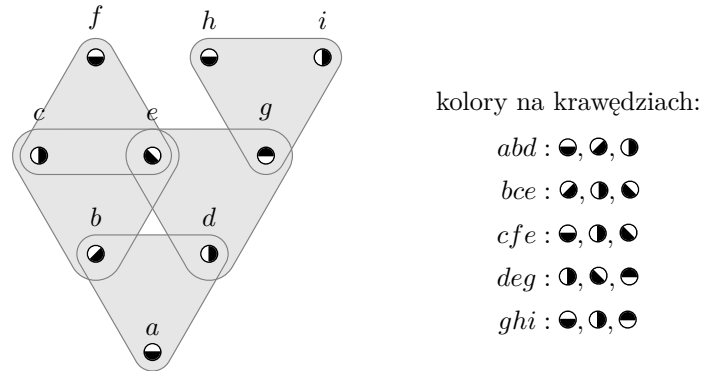
$$\sum_{x \in L(v)} r_v(x) \geq 2d^+(v).$$

*Wtedy istnieje kolorowanie wierzchołków  $D$  z list  $L(v)$  spełniające następujące ograniczenie: Jeśli  $x$  jest kolorem przypisanym do  $v$ , to liczba sąsiadów  $v$  w kolorze  $x$  wynosi co najwyżej  $r_v(x)$ .*

Istnieje wiele wariantów kolorowania większościowego, które można badać dla różnych struktur kombinatorycznych. Na przykład w wersji wielokolorowej rozważanej w [88] warunek większości jest wzmacniany do  $\frac{1}{k} d^+(v)$ , gdzie  $k \geq 2$  jest stałą liczbą całkowitą. Łatwo zauważyć, że  $k$  kolorów wystarczy dla acyklicznych digrafów, a zatem  $k^2$  wystarczy dla dowolnego grafu skierowanego (przez wzięcie produktu kolorowań). W [88] została postawiona hipoteza, że wystarczy  $k + 1$  kolorów. Jak zauważył D. Wood,<sup>6</sup> dowód Twierdzenia 3 może być łatwo rozszerzony do przypadku wielokolorowego, dając kwadratowe ograniczenie w wersji listowej tego problemu. Niedawno Knox z Šámalą w [86] i niezależnie Girão, Kittipassorn i Popielarz w [45] udowodnili, że listy długości co najwyżej  $2k$  są wystarczające. To uogólnienie Twierdzenia 1 i 2. Ponadto, obie grupy badawcze przedstawiły również przykłady, że długość list nie może być krótsza niż  $2k - 1$ . Mimo to, pytanie, czy każdy graf skierowany jest większościowo 3-wybieralny, jest wciąż otwarte.

**A.2. Harmonijne kolorowanie jednorodnych hipergrafów.** *Hipergraf* jest parą  $H = \langle V, \mathcal{E} \rangle$ , gdzie  $V$  to dowolny zbiór, a  $\mathcal{E}$  to rodzina podzbiorów  $V$ , tzn.  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(V)$ . Elementy  $V$  nazywamy *wierzchołkami*, a elementy  $\mathcal{E}$  *krawędziami* lub zamiennie *hiperkrawędziami*. Dla danej liczby całkowitej  $k \leq 2$ , hipergraf jest *k-jednorodny*, jeżeli każda jego krawędź jest rozmiaru  $k$ . *Tęczowe kolorowanie*  $H$  to odwzorowanie  $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ , w którym żadne dwa wierzchołki na tej samej krawędzi nie mają tego samego koloru. W ten sposób, każdej krawędzi  $e \in \mathcal{E}$  jest przypisany pewien  $k$ -elementowy podzbiór  $c(e) \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$ . Oczywiście, przypadek, gdy  $k = 2$ , odpowiada klasycznemu kolorowaniu wierzchołkowemu grafu prostego.

Tęczowe kolorowanie  $c$  hipergrafu  $H$  nazywa się *harmonijne*, jeśli  $c(e) \neq c(f)$  dla każdej pary różnych krawędzi  $e, f \in \mathcal{E}$ , patrz Rysunek 1. *Liczba harmonijna*  $h(H)$  to najmniejsza



RYSUNEK 1. Przykład harmonijnego kolorowania 3-jednorodnego hipergrafu.

liczba kolorów potrzebnych do harmonijnego kolorowania  $H$ . To pojęcie powstało jako naturalne uogólnienie harmonijnego kolorowania grafów — intensywnie studiowanego tematu z wieloma głębokimi wynikami i otwartymi problemami, patrz w [3, 32, 33, 34, 35, 36, 65, 87, 89].

Niech  $H$  będzie  $k$ -jednorodnym hipergrafem o  $m$  krawędziach. Niech  $Q_k(m)$  będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą  $r$  spełniającą nierówność  $\binom{r}{k} \geq m$ . Liczba różnych  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru kolorów w dowolnym harmonijnym kolorowaniu hipergrafu  $H$  musi być oczywiście co najmniej tak duża, jak liczba krawędzi w  $H$ . Stąd nierówność

$$h(H) \geq Q_k(m)$$

musi być spełniona dla każdego  $k$ -jednorodnego hipergrafu  $H$  o  $m$  krawędziach. To, przy ustalonym  $k$ , dowodzi dolnego ograniczenia  $\Omega(\sqrt[k]{k!m})$  na harmonijną liczbę  $h(H)$ . Z drugiej strony rozważmy  $k$ -jednorodny hipergraf  $S_{k,m}$  składający się z  $m$  krawędzi, których wspólne

<sup>6</sup>W rozmowie prywatnej.

przecięcie ma rozmiar  $k - 1$ . Łatwo zauważyć, że  $h(S_{k,m}) = m + k - 1$ . To pokazuje, że potrzebne są dodatkowe ograniczenia, aby zbliżyć się asymptotycznie do dolnego ograniczenia. W [A2], z Czerwińskim, Grytcukiem i Rzażewskim przedstawiliśmy górne ograniczenie na liczbę harmonijną dla  $k$ -jednorodnych hipergrafów o ograniczonym maksymalnym stopniu.

**Twierdzenie 4** (Twierdzenie 1.1. w [A2]). *Każdy  $k$ -jednorodny hipergraf  $H$  o  $m$  krawędziach i maksymalnym stopniu  $\Delta$  spełnia*

$$h(H) \leq \frac{k}{k-1} \sqrt[k]{\Delta(k-1)k!m} + f(k, \Delta),$$

gdzie  $f(k, \Delta) = 1 + \Delta^2 + (k-1)\Delta + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{i}{i-1} \sqrt[i]{(i-1)! \frac{(k-1)\Delta^2}{k-i}}$ .

Dowód używa metody o nazwie „Kompresja entropii” — nowej techniki, która wyłoniła się ze sławnej algorytmicznej wersji Lokalnego Lematu Lovásza (patrz w [5]), zaprezentowanej przez Mosera i Tardosa w [92] (patrz także w [41, 108]). Warto zauważyć, że ta metoda daje w rzeczywistości silniejsze stwierdzenie, a mianowicie, że ograniczenie z Twierdzenia 4 jest także zachowane dla *listowej* wersji harmonijnego kolorowania (gdzie każdy wierzchołek ma swoją własną przypisaną listę dostępnych kolorów). Łatwo można sprawdzić, że bezpośrednie zastosowanie Lokalnego Lematu Lovásza (w wersji asymetrycznej) daje znacznie gorsze ograniczenie dla  $h(H)$  niż to z Twierdzenia 4. Rzeczywiście, licząc prawdopodobieństwa uzyskaliśmy wyrażenie rzędu  $\mathcal{O}(\Delta m)$ , podczas gdy w Twierdzeniu 4 mamy  $\mathcal{O}(\sqrt[k]{\Delta m})$ .

Podstawowa idea dowodu jest następująca. Załóżmy, że mamy kombinatoryczną strukturę  $S$  i chcemy kolorować jej elementy za pomocą ustalonego zbioru kolorów  $\Gamma$  tak, aby uniknąć pewnych konfliktów. W tym celu wybieramy długą sekwencję kolorów  $C$  i kolorujemy elementy  $S$  jeden po drugim (w ustalonej kolejności), stosując kolejne kolory z  $C$ . Ilekroć pojawi się konflikt, wymazujemy kolory z niektórych ostatnio pokolorowanych elementów tak, aby powrócić do częściowego poprawnego kolorowania. Następnie zaczynamy od kolorowania elementów  $S$  kolejnymi kolorami wskazanymi przez sekwencję  $C$ . Proces zatrzymuje się, jeśli zakończyła się sekwencja  $C$  lub jeśli cała struktura została pomyślnie pokolorowana. Załóżmy, że pierwszy przypadek występuje dla wszystkich sekwencji  $C$  (o pewnej ustalonej długości  $N$ ). Podczas wykonywania procedury rejestrujemy informacje o wszystkich przypadkach w specjalnej tabeli  $T$ , aby po zatrzymaniu procesu odtworzyć całą sekwencję  $C$  z tabeli  $T$  i ostatecznego częściowego kolorowania  $c$ . Oznacza to, że całkowita liczba sekwencji kolorów  $C$  o długości  $N$  jest równa całkowitej liczbie możliwych wyników  $(T, c)$ . Może się jednak zdarzyć, że liczba wyników jest ograniczona od góry przez jakąś funkcję, która, dla wystarczająco dużych  $N$ , jest ściśle mniejsza niż  $|\Gamma|^N$ . Ta sprzeczność oznacza, że istnieje taka sekwencja  $C$ , dla której procedura musiała się skończyć, zanim zakończyła się sekwencja  $C$ , dając pożądane bezkonfliktowe kolorowanie struktury  $S$ . Inne zastosowania kompresji entropii do różnych problemów z kolorowaniem można na przykład znaleźć w pracach [28, 37, 46, 56].

Warto zauważyć, że ograniczenie uzyskane w Twierdzeniu 4 jest asymptotycznie optymalne (pod warunkiem, że zarówno  $k$ , jak i  $m$  są wystarczająco duże) w następującym sensie.

**Wniosek 5** (Wniosek 3.9. w [A2]). *Dla każdego  $\varepsilon > 0$  i każdej liczby całkowitej  $\Delta$  istnieją liczby całkowite  $k_0$  i  $m_0$  z następującą właściwością: Każdy  $k$ -jednorodny hipergraf o  $m$  krawędziach (gdzie  $k \geq k_0$  i  $m \geq m_0$ ) posiada harmonijne kolorowanie używające co najwyżej  $(1 + \varepsilon) \sqrt[k]{k!m}$  kolorów.*

Naturalna jest refleksja, czy można to jeszcze poprawić.

**Hipoteza 6.** *Dla każdego  $k, \Delta \geq 2$  istnieje stała  $\gamma = \gamma(k, \Delta)$  taka, że każdy  $k$ -jednorodny hipergraf  $H$  o  $m$  krawędziach i maksymalnym stopniu  $\Delta$  spełnia*

$$h(H) \leq \sqrt[k]{k!m} + \gamma.$$



Powyższa hipoteza jest naturalnym rozszerzeniem pytania zadanego przez Edwardsa [34] dla grafów prostych. Jest ona wciąż otwarta, chociaż potwierdzona dla niektórych klas grafów, patrz w [32, 33, 35, 36]. Edwards w [34] udowodnił, że

$$h(G) = (1 + o(1))\sqrt{2m}$$

zachodzi dla grafów  $G$  o ograniczonym maksymalnym stopniu. Dowód opiera się na Twierdzeniu Pippengera-Spencera o indeksie chromatycznym jednorodnych hipergrafów [97]. Analog tego wyniku dla jednorodnych hipergrafów byłby także silniejszy niż Twierdzenie 4. Warto jednak zauważyć, że dowód przedstawiony w [A2] zachodzi dla listowej wersji harmonijnego kolorowania. Możemy więc sformułować nasz wynik w następującej, silniejszej formie.

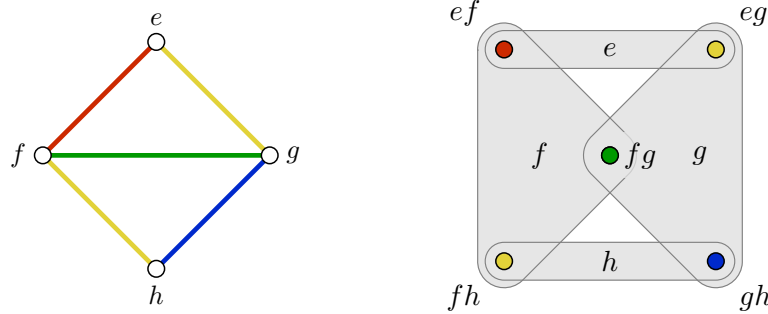
**Twierdzenie 7** (Twierdzenie 4.1. w [A2]). *Niech  $H$  będzie  $k$ -jednorodnym hipergrafem o  $m$  krawędziach i maksymalnym stopniu  $\Delta$ . Załóżmy, że każdy wierzchołek  $v$  z  $H$  ma przypisany zbiór kolorów  $L_v$  rozmiaru co najmniej*

$$\frac{k}{k-1} \sqrt[k]{(k-1)k!\Delta m} + f(k, \Delta).$$

*Wtedy istnieje harmonijne kolorowanie  $c$  hipergrafu  $H$  takie, że  $c(v) \in L_v$  dla każdego wierzchołka  $v$ .*

Wiadomo, że dla grafów prostych różnica między harmonijną liczbą  $h(G)$  a jej listową wersją może być dowolnie duża, patrz w [1, 116]. Co więcej, metoda przedstawiona w [A2] daje efektywny randomizowany algorytm konstruujący pożądane harmonijne kolorowanie danego hipergrafu.

Innym kierunkiem rozwiązania Hipotezy 6 może być próba pozytywnego rozstrzygnięcia jej dla dużych  $k$  i małych  $\Delta$ . Co ciekawe, pierwszy nietrywialny przypadek, czyli gdy  $k = 3$  i  $\Delta = 2$ , jest otwarty, nawet dla tak zwanych hipergrafów *liniowych* (czyli takich, w których każda para krawędzi przecina się w co najwyżej jednym wierzchołku). Jest to szczególny przypadek następnego intrygującego problemu, dotyczącego kolorowania krawędzi grafów prostych, wprowadzonego przez Aignera, Triescha i Tuzę [2] i intensywnie przebadanego przez wielu autorów, patrz w [6, 7, 8, 12, 21]. Rozważmy poprawne kolorowanie krawędzi  $k$ -regularnego grafu  $G$ . Niech  $P(v)$  oznacza zbiór  $k$  kolorów występujących na krawędziach incydentnych do wierzchołka  $v$ . Powiemy, że poprawne kolorowanie krawędziowe *odróżnia wierzchołki*, jeśli  $P(v) \neq P(u)$  dla każdej pary różnych wierzchołków  $v$  i  $u$  grafu  $G$ . Zauważmy, że takie kolorowanie grafu  $G$  jest równoważne z harmonijnym kolorowaniem hipergrafu *dualnego*  $D = D(G)$  do grafu  $G$ . Wierzchołki hipergrafu  $D$  są krawędziami w grafie  $G$ , a krawędzie hipergrafu  $D$  są maksymalnymi zbiorami krawędzi incydentnych do tego samego wierzchołka w  $G$ . Maksymalny stopień wierzchołka w każdym takim hipergrafie wynosi 2, a każde dwie hiperkrawędzie mają co najwyżej jeden wspólny wierzchołek (patrz Rysunek 2).



RYSUNEK 2. Poprawne kolorowanie krawędziowe odróżniające wierzchołki *diamentu* i odpowiadające mu harmonijne kolorowanie hipergrafu dualnego.

Burris i Shelp [21] postawili hipotezę, że każdy  $k$ -regularny graf  $G$  o  $n$  wierzchołkach ma kolorowanie krawędziowe odróżniające wierzchołki używające co najwyżej  $Q_k(n) + 1$  kolorów. Jednak nawet słabsza wersja powyższej hipotezy, w której dopuszczona jest dowolna dodatnia stała, jest otwarta dla grafów 3-regularnych. Sugeruje to, że Hipoteza 6 może być bardzo trudna do udowodnienia albo nawet w ogóle nieprawdziwa. Z drugiej strony, Twierdzenie 4 pociąga za sobą następujące ograniczenie dla grafów 3-regularnych.

**Wniosek 8** (Wniosek 4.2. w [A2]). *Każdy 3-regularny graf o  $n$  wierzchołkach posiada poprawne kolorowanie krawędziowe odróżniające wierzchołki, przy użyciu co najwyżej*

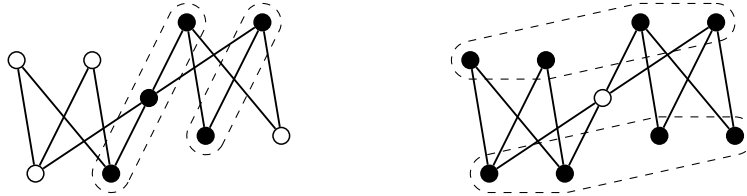
$$\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\right) \cdot Q_3(n) + c \leq 2.3812 \cdot Q_3(n) + c$$

*kolorów, gdzie  $c$  jest stałą.*

**A.3. Semi-antyłańcuchy oraz pokrycie uni-łańcuchami.** Ciekawą klasą grafów, dla których można rozważyć problem kolorowania, jest rodzina grafów nieporównywalności zbiorów częściowo uporządkowanych. *Zbiór częściowo uporządkowany (poset)* to para  $P = \langle X, \leq \rangle$ , gdzie  $X$  jest dowolnym zbiorer zaś  $\leq$  jest zwrotną, słabo antysymetryczną oraz przechodnią relacją binarną na  $X$ . Mówimy, że  $x, y \in X$  są *porównywalne*, jeśli  $x \leq y$  lub  $y \leq x$ ; w przeciwnym razie  $x$  i  $y$  są *nieporównywalne*, co jest oznaczone przez  $x \parallel y$ . *Łańcuchy* i *antyłańcuchy* są odpowiednio zbiorami elementów parami porównywalnych i parami nieporównywalnych. Przez *wysokość*  $h(P)$  i *szerokość*  $w(P)$  posetu  $P$  mamy na myśli odpowiednio rozmiar największego łańcucha i największego antyłańcucha w  $P$ . Dilworth [27] udowodnił, że każdy poset  $P$  może być pokryty za pomocą  $w(P)$  łańcuchów.

Z każdym posetem można skojarzyć dwa następujące grafy. Graf *porównywalności* (*nieporównywalności*) posetu  $P = \langle X, \leq \rangle$  to graf, w którym zbiór wierzchołków jest równy zbiorowi elementów  $X$ , a zbiór krawędzi to zbiór wszystkich porównywalnych (nieporównywalnych) par w  $P$ . Graf porównywalności i nieporównywalności posetu  $P$  jest oznaczony odpowiednio jako  $G_P$  i  $\overline{G_P}$ . Zbiór niezależny i klika w  $\overline{G_P}$  odpowiadają odpowiednio łańcuchowi i antyłańcuchowi w  $P$ . Tak więc, wyżej wspomniane Twierdzenie Dilwortha innymi słowy oznacza, że każdy graf nieporównywalności jest doskonały.

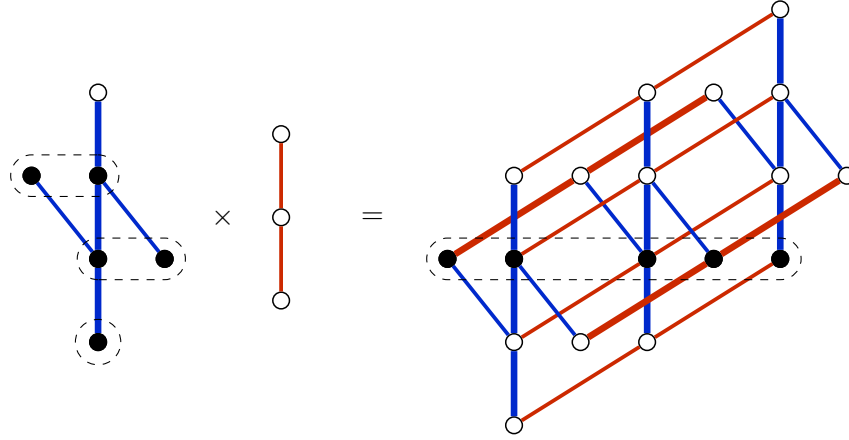
Pojęcie łańcucha oraz antyłańcucha można uogólnić w następujący sposób. Nazywamy *k-łańcuchem* oraz *k-antyłańcuchem* w posecie  $P = \langle X, \leq \rangle$  takie podzbiory  $X$ , które mogą zostać zdekomponowane odpowiednio na  $k$  łańcuchów i  $k$  antyłańcuchów. Maksymalny rozmiar *k-łańcucha* oraz *k-antyłańcucha* w posecie  $P$  oznacza się odpowiednio przez  $c_k(P)$  oraz  $d_k(P)$  (patrz Rysunek 3). Greene i Kleitman [50] uogólnili twierdzenie Dilwortha, udowadniając, że



RYSUNEK 3. Po lewej stronie jest zaprezentowany 2-łańcuch, a po prawej 2-antyłańcuch w posecie  $P$ .  $c_k(P) = 5$  i  $d_k(P) = 8$ .

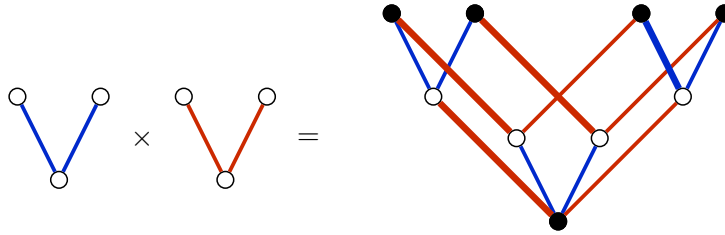
dla każdej liczby dodatniej całkowitej  $k$ , istnieje podział łańcuchowy  $C_1, C_2, \dots, C_l$  posetu  $P$  taki, że  $d_k(P) = \sum_{i=1}^l \min(k, |C_i|)$ . Z kolei, Saks w [102] zaprezentował nowy dowód twierdzenia Greene'a i Kleitmana, używający produktu dwóch posetów. Produkt  $P \times Q$  dwóch posetów  $P = \langle X, \leq_P \rangle$  i  $Q = \langle Y, \leq_Q \rangle$  jest posetem określonym na zbiorze  $X \times Y$  z częściowym porządkiem zdefiniowanym w następujący sposób:  $(x, y) \leq_{P \times Q} (x', y')$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \leq_P x'$

i  $y \leq_Q y'$ . Saks udowodnił de facto, że w produkcie  $C \times P$ , gdzie  $C$  jest łańcuchem, rozmiar maksymalnego antyłańcucha równa się rozmiarowi minimalnego pokrycia złożonego z łańcuchów w postaci  $\{c\} \times C'$  lub  $C \times \{x\}$  oraz, że liczba ta równa się  $d_{|C|}(P)$ , patrz Rysunek 4. Łańcuchy



RYSUNEK 4. Produkt niebieskiego posetu  $P$  i czerwonego łańcucha  $C$ , gdzie  $d_{|C|}(P) = 5 = w(P \times C)$ . Po lewej stronie pogrubione niebieskie krawędzie prezentują pokrycie łańcuchowe posetu  $P$ , o którym mowa w twierdzeniu Greene'a-Kleitmana. Po prawej stronie są zaprezentowane uni-łańcuchy w produkcie  $P \times C$ .

występujące w twierdzeniu Saksa nazywane są uni-łańcuchami. Mówiąc bardziej ogólnie, łańcuch w produkcie  $P \times Q$  jest *uni-łańcuchem*, jeśli jest postaci  $\{x\} \times C'$  lub  $C \times \{y\}$ . Dualnym pojęciem do uni-łańcucha jest *semi-antyłańcuch*, który jest zbiorem  $S \subseteq P \times Q$  niezawierającym dwóch różnych elementów należących do tego samego uni-łańcucha. Naturalną próbą uogólnienia twierdzenia Greene'a-Kleitmana jest hipoteza postawiona przez Saksa i Westa [118, 119] w 1981r., że w każdym produkcie dwóch posetów rozmiar największego semi-antyłańcucha jest równy rozmiarowi najmniejszego pokrycia uni-łańcuchami (patrz Rysunek 5).



RYSUNEK 5. Semi-antyłańcuch i pokrycie uni-łańcuchowe iloczynu dwóch  $V$ .

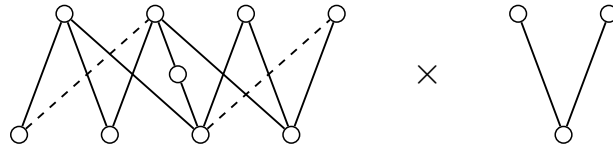
Tovey i West [119] zauważyli, że powyższą hipotezę można sformułować w języku iloczynu kartezjańskiego dwóch grafów porównywalności, przy czym iloczyn kartezjański  $G \square H$  posiada krawędź  $(v, u) \sim (v', u')$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $(v = v' \text{ i } u \sim u')$  lub  $(v \sim v' \text{ i } u = u')$ . Zauważmy, że w ogólności  $G_{P \times Q} \neq G_P \square G_Q$ . Jeśli  $x <_P x'$  oraz  $y <_Q y'$ , to z przechodniości wynika, że  $(x, y) <_{P \times Q} (x', y')$ , lecz z drugiej strony w iloczynie  $G_P \square G_Q$  nie ma krawędzi pomiędzy  $(x, y)$  oraz  $(x', y')$ . Zamiast tego istnieje odpowiedniość pomiędzy uni-łańcuchami oraz semi-antyłańcuchami w  $P \times Q$  a klikami oraz zbiorami niezależnymi w  $G_P \square G_Q$ . Tak więc hipoteza Saksa i Westa jest równoznaczna stwierdzeniu, że dla dowolnych dwóch posetów  $P$  oraz  $Q$ , rozmiar największego zbioru niezależnego w  $G_P \square G_Q$  jest równy minimalnemu rozmiarowi pokrycia klikowego grafu  $G_P \square G_Q$ .

Na wstępie warto przypomnieć, że Twierdzenie Greene’a-Kleitmana dotyczy specjalnego przypadku powyższej hipotezy, w którym jeden z mnożonych posetów jest łańcuchem. Ponadto omawiana hipoteza została udowodniona w następujących przypadkach. Tovey i West [119] wykazali, że maksymalizację semi-antyłańcucha oraz minimalizację pokrycia uni-łańcuchami można wyrazić za pomocą dualnych problemów programowania całkowitoliczbowego typu „pakowania oraz podziału”. Autorzy ci postawili pierwsze kroki w kierunku badań posetów ze specjalnymi własnościami tzw. „łańcuchowej” oraz „antyłańcuchowej rozkładalności”. Używając powyższych warunków, potwierdzili oni omawianą hipotezę dla produktów posetów, które posiadają tzw. „symetryczny rozkład łańcuchowy” lub „skośne pokrycie łańcuchowe”. Otrzymane przez nich rezultaty rozszerzają wyniki z prac [52] i [117]. Tovey i West w [109] pogłębili badania hipotezy w języku programowania całkowitoliczbowego, wykorzystując podejście oparte na przepływie w sieciach. Następnie w pracy [115], West skonstruował specjalne pokrycia uni-łańcuchowe dla posetów z własnością tzw. „zagnieżdżonego nasycenia”. Posłużyły one do udowodnienia hipotezy dla produktów postaci  $P_m \times P_n$ , gdzie  $P_k$  jest elementem specjalnej rodziny tzw. „wielonienasyconych” posetów wprowadzonych w [114]. Z kolei Liu i West [90] pozytywnie zweryfikowali hipotezę dla następujących trzech przypadków: (a) oba zbiory mają szerokość co najwyżej 2; (b) oba zbiory mają wysokość co najwyżej 2; (c)  $P$  jest *rankingiem*,<sup>7</sup> a  $Q$  jest posetem o wysokości co najwyżej 2, którego graf porównywalności jest drzewem.

Po ponad 30 latach, w pracy [A3] z Felsnerem, Knauerem oraz Mateckim, podajemy kontrprzykład na hipotezę Saksa-Westa pokazując, że w ogólności powyższa relacja minimaksowa jest fałszywa. Udowodniliśmy coś więcej:

**Twierdzenie 9** (Uwaga 3.2 w [A3]). *Różnica między rozmiarem maksymalnego semi-antyłańcucha a rozmiarem minimalnego pokrycia uni-łańcuchowego może być dowolnie duża.*

Wszystkie minimalne kontrprzykłady przedstawiono na Rysunku 6.



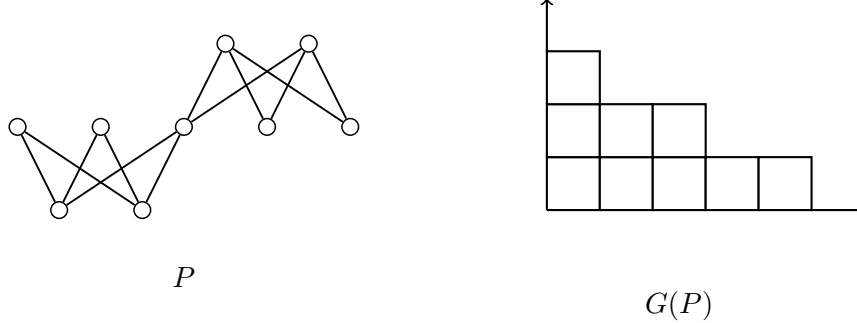
RYSUNEK 6. Wszystkie 4 minimalne kontrprzykłady na hipotezę Saksa-Westa. Porównywalności przedstawione w postaci linii przerywanej są opcjonalne.

W pracy [A3] prezentujemy także klasy posetów, dla których jest spełniona omawiana hipoteza. Aby przedstawić uzyskany przez nas rezultat, wprowadzimy kilka następujących pojęć. *Sprzężeniem* partycji  $\lambda = \{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_w\}$  liczby  $n$  jest partycja  $\mu = \{\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{\lambda_1}\}$ , gdzie  $\mu_i = |\{j \in [w] : \lambda_j \geq i\}|$ .<sup>8</sup> Greene [49] udowodnił, że dla dowolnego posetu  $P$  istnieje partycja  $\lambda^P = \{\lambda_1^P \geq \dots \geq \lambda_w^P\}$  liczby  $|P|$  taka, że  $c_k(P) = \lambda_1^P + \dots + \lambda_k^P$  oraz  $d_k(P) = \mu_1^P + \dots + \mu_k^P$  dla dowolnego  $k$ , gdzie  $\mu^P$  oznacza sprzężenie  $\lambda^P$ . Powyższe twierdzenie Greene’a jest głównym narzędziem w dowodzie naszego twierdzenia i jest typowym uogólnieniem twierdzenia Greene-Kleitmana. Twierdzenie Greene’a zostało uogólnione w kilku kierunkach i dowiedzione za pomocą różnych metod. Więcej na ten temat można znaleźć w pracy Greene’a i Kleitmana [51] oraz Westa [113]. Badanie dotyczące uogólnienia w kierunku grafów skierowanych były na przykład przedmiotem pracy Hartmana [14]. Za Viennotem [111] diagram Ferrersa podziału  $\lambda^P$  nazwiemy *diagramem Greene’a* posetu  $P$  i będziemy oznaczać za pomocą  $G(P)$ . Poset  $P$  jest *d-dekomponowalny*,

<sup>7</sup>Zbiór częściowo uporządkowany, w którym elementom można przypisać liczby całkowite w taki sposób, że elementy z przypisaną tą samą liczbą są nieporównywalne, zaś z różną są w relacji zgodnej z relacją przypisanych liczb.

<sup>8</sup>Czyli  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_w = n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{\lambda_1}$ .

jeśli posiada podział antyłańcuchowy  $A_1, A_2, \dots, A_h$  taki, że  $|\bigcup_{i=1}^k A_i| = d_k(P)$  dla dowolnego  $k$ . Innymi słowy,  $|A_k| = \mu_k^P$  dla każdego  $k$ . Dualnie dla pojęcia  $d$ -dekomponowalności, powiemy, że poset  $P$  jest  $c$ -dekomponowalny, jeśli posiada podział łańcuchowy  $C_1, C_2, \dots, C_w$  taki, że  $|\bigcup_{i=1}^w C_i| = c_k(P)$  dla dowolnego  $k$ , tzn.  $|C_k| = \lambda_k^P$  dla każdego  $k$  (patrz Rysunek 7). Podział łańcuchowy spełniający powyższą własność nazywa się *całkowicie nasyconym*, patrz [54, 119].



RYSUNEK 7. Poset  $P$  z diagramem Greene'a  $G(P)$ . Zaprezentowany poset  $P$  jest  $c$ -dekomponowalny ale nie  $d$ -dekomponowalny.

W pracy [A3] z Felsnerem, Knauerem oraz Mateckim udowodniliśmy następujące techniczne twierdzenie, które jest przydatnym narzędziem do wskazania klas, dla których prawdziwa jest hipoteza Saksa-Westa.

**Twierdzenie 10** (Twierdzenie 2.4 w [A3]). *Jeśli poset  $P$  jest  $d$ -dekomponowalny oraz  $c$ -dekomponowalny, a poset  $Q$  jest  $d$ -dekomponowalny, to rozmiar minimalnego pokrycia uniłańcuchowego równy jest rozmiarowi maksymalnego semi-antyłańcucha w produkcie  $P \times Q$ . Dodatkowo rozmiar ten równa się*

$$\sum_{i=1}^{\min(h(P), h(Q))} \mu_i^P \mu_i^Q = \sum_{j=1}^{w(P)} d_{\lambda_j^P}(Q).$$

Jak zauważył West (w prywatnej rozmowie) powyższe twierdzenie wynika pośrednio z niezależnych rozważań w [119].

Na bazie Twierdzenia 10 uzyskujemy nowe dowody hipotezy Saksa-Westa dla wcześniej potwierdzonych klas posetów, ale także dowody dla nowych klas. Klasy te obejmują zbiory częściowo uporządkowane które są  $d$ -dekomponowalne i  $c$ -dekomponowalne lub tylko  $d$ -dekomponowalne. Lista najbardziej interesujących klas jest prezentowana poniżej:

- Poset nazywamy *rangowym*, jeśli dla każdego elementu  $x$  każdy maksymalny łańcuch o największym elemencie  $x$  ma ten sam rozmiar, który nazywamy rangą elementu  $x$  oraz oznaczamy przez  $r(x)$ . Rangowy poset  $P$ , którego rangi dają podział antyłańcuchowy świadczący, że  $P$  jest  $d$ -dekomponowalny nazywa się *silnie Spernerowskim*, patrz w [53].
- Dla łańcucha  $C$  w posecie  $P$  oznaczamy przez  $r(C)$  jako zbiór rang elementów z  $C$ . Podział łańcuchowy  $\mathcal{C}$  posetu  $P$  nazywa się *zagnieżdżonym*, jeśli dla każdych  $C, C' \in \mathcal{C}$  mamy, że  $r(C) \subseteq (C')$  o ile  $|C| \leq |C'|$ . Większość przykładów zagnieżdżonych pokryć łańcuchowych jest symetryczna (więcej na ten temat można znaleźć w [53]). W [53] Griggs zauważył, że zagnieżdżone pokrycia łańcuchowe są całkowicie nasycone i że posety posiadające zagnieżdżone pokrycia łańcuchowe są silnie Spernerowskie. Stąd posety, które mają zagnieżdżone pokrycia łańcuchowe, są  $d$ -dekomponowalne oraz  $c$ -dekomponowalne. Fakt, że produkty posetów z zagnieżdżonymi pokryciami łańcuchowymi spełniają Hipotezę Saksa-Westa, pokazał West w [115].
- Porządki o szerokości co najwyżej 3 są  $d$ -dekomponowalne — udowodnione zostało w [A3].

- Porządki *szeregowo-równoległe* są  $d$ -dekomponowalne oraz  $c$ -dekomponowalne — udowodnione zostało w [A3].
- Poset  $P$  jest *prostokątny*, jeśli  $P$  zawiera poset  $L$  składający się z rozłącznej sumy  $w$  łańcuchów długości  $h$  oraz  $P$  jest zawarty w rankingu  $U$  o wysokości  $h$  z poziomami rozmiaru  $w$ . W tym przypadku zawieranie jest rozumiane jako zawieranie relacji porządku. Zauważmy, że posety prostokątne nie muszą być rangowe, ponieważ mogą one zawierać maksymalne łańcuchy o rozmiarze mniejszym niż  $h$ . Nadal istnieje naturalna koncepcja rangi i zagnieżdżonej dekompozycji łańcuchowej, które mogą być użyte do pokazania, że prostokątne posety są  $c$ -dekomponowalne oraz  $d$ -dekomponowalne. Można powiedzieć jeszcze więcej:

**Twierdzenie 11** (Twierdzenie 2.6 w [A3]). *W iloczynie  $P \times Q$ , gdzie poset  $P$  jest prostokątny, rozmiar minimalnego pokrycia uni-łańcuchowego jest równy rozmiarowi maksymalnego semi-antyłańcucha.*

## B. KOLOROWANIE ONLINE ZBIORÓW CZĘŚCIOWO UPORZĄDKOWANYCH

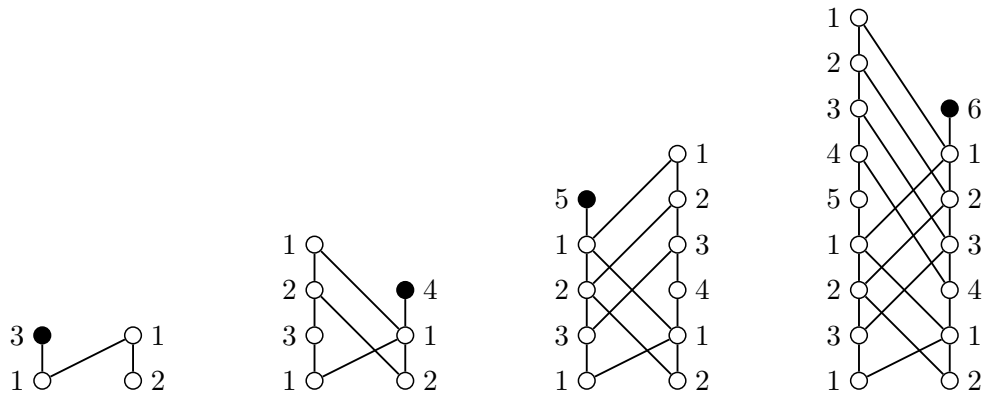
**B.1. Zachłanne kolorowanie.** Jedną z najprostszych heurystyk do uzyskania poprawnego kolorowania grafu jest zachłanny algorytm *first-fit*. Algorytm ten koloruje wierzchołki  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  grafu  $G = \langle V, E \rangle$  w podanej kolejności  $v_1 \ll v_2 \ll \dots \ll v_n$  w następujący sposób.<sup>9</sup> Dla każdego wierzchołka  $v_t$  *first-fit* przypisuje najmniejszą liczbę, która nie występuje na wcześniej pokolorowanych sąsiadach  $v_t$ , czyli  $N(v_t) \cap \{v_1, \dots, v_t\}$ . Liniowy porządek  $\ll$ , który nazywany jest *kolejnością prezentacji*, odgrywa ważną rolę w algorytmie *first-fit*. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego grafu  $G$  istnieje kolejność prezentacji, dla której *first-fit* używa  $\chi(G)$  kolorów. Bardziej jednak interesującym scenariuszem jest druga skrajność, tzn. maksymalna liczba kolorów, którą można wymusić na algorytmie *first-fit* poprzez podanie wierzchołków w „najgorszej” kolejności prezentacji. Taką wartość nazywamy zachłanną liczbą chromatyczną grafu  $G$ .

W ogólnym przypadku liczba kolorów użytych przez *first-fit* nie może być ograniczona żadną funkcją liczby chromatycznej. Rozbieżność między liczbą chromatyczną a zachłanną liczbą chromatyczną występuje nawet w klasie drzew, dla których *first-fit* używa nieograniczonej liczby kolorów (Christen i Selkow [24]). W całej klasie grafów dwudzielnych rozbieżność ta może być nawet rzędu  $\Omega(n)$ . Istnieje kolejność prezentacji pełnego grafu dwudzielnego (o rozmiarze  $n$ ) z usuniętym doskonałym skojarzeniem, dla którego *first-fit* używa  $n/2$  kolorów (Lovász, Saks i Trotter [91]). W tej sytuacji, jednym ze sposobów badania algorytmu *first-fit* jest poszukiwanie najlepszego górnego ograniczenia zachłannej liczby chromatycznej w zależności od liczby wierzchołków dla znanych klas grafów. Na przykład Bean [13] i niezależnie, Gyárfás z Lehelem [58] udowodnili, że *first-fit* używa co najwyżej  $\log_2 n + 1$  kolorów na drzewach o rozmiarze  $n$ . Irani [64] uogólniła ten wynik, pokazując, że *first-fit* używa  $\mathcal{O}(d \log n)$  kolorów na  $d$ -zdegenerowanych grafach o rozmiarze  $n$ . Później, Balogh i inni [9] z poprawkami Changa i Hsu [22] poprawili powyższy wynik do  $\log_{(d+1)/d} n + 2$ .

Z drugiej strony, zapoczątkowane przez Gyárfása i Lehela, badania skupiały się na znalezieniu tych klas grafów, dla których zachłanna liczba chromatyczna jest funkcją rozmiaru maksymalnej kliki. Takie klasy są raczej rzadkie. Zgodnie ze stanem badań, wśród nich są: split grafy [58]; dopełnienia grafów dwudzielnych [58]; dopełnienia grafów cięciwowych [58]; grafy przedziałowe [96, 93, 80]; grafy o tolerancji  $p < 1$  [79]; grafy nie zawierające indukowanej gwiazdy o ustalonym rozmiarze; grafy nie zawierające indukowanej 5-elementowej ścieżki [85]; grafy, które nie zawierają ani  $K_{t,t}$  ani  $T_d^r$ , gdzie  $K_{t,t}$  jest pełnym grafem dwudzielnym o  $t$  wierzchołkach w każdej ze stron, zaś  $T_d^r$  jest drzewem o promieniu  $d$ , w którym wszystkie wierzchołki inne niż liście mają stopień  $d$  [76].

<sup>9</sup>Gdy wynika to jasno z kontekstu, to  $n$  będzie oznaczać liczbę wierzchołków lub elementów odpowiednio grafu lub posetu.

W tym kontekście, ciekawą klasą grafów jest klasa grafów nieporównywalności posetów.<sup>10</sup> Przypomnijmy, że podział zbioru wierzchołków posetu  $P = \langle X, \leq \rangle$  na łańcuchy jest równoznaczny z poprawnym kolorowaniem grafu nieporównywalności  $\overline{G_P} = \langle X, \parallel \rangle$ . Tak więc możemy sformułować definicję algorytmu first-fit w języku posetów. *Algorytm pokrywania łańcuchowego first-fit* rozpatruje elementy  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  posetu  $P = \langle X, \leq \rangle$  w podanej kolejności  $x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll x_n$  i przypisuje każdemu elementowi  $x_t$  taką najmniejszą liczbę naturalną, aby wszystkie elementy z tym samym numerem tworzyły łańcuch. Oczywiście orientacja  $\leq$  krawędzi w dopełnieniu grafu  $\overline{G_P}$  nie ma wpływu na wydajność algorytmu first-fit. Zatem pokrycie łańcuchowe wygenerowane przez first-fit posetu  $P$  daje taki sam rezultat, jak kolorowanie first-fit grafu  $\overline{G_P}$  pod warunkiem, że struktury te są kolorowane w tej samej kolejności. Wiadomo, że w klasie wszystkich posetów first-fit nie działa dobrze. Przykład autorstwa Kiersteada [83] (patrz Rysunek 8) pokazuje, jak wymuszać dowolnie wiele łańcuchów na posetach o szerokości 2. Z dru-



RYSUNEK 8. First-fit jest zmuszony użyć 6 łańcuchów na posecie o szerokości 2.

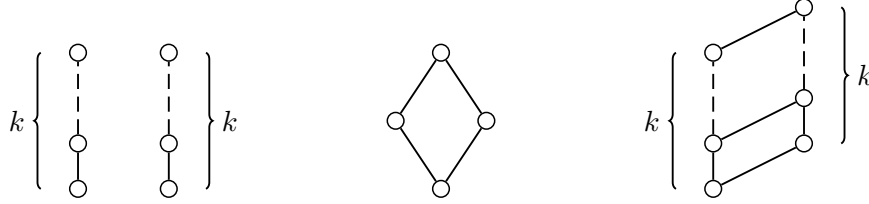
giej strony udowodniono, że first-fit jest efektywny w niektórych klasach posetów, takich jak porządki przedziałowe, porządki nie posiadające dwóch niezależnych łańcuchów, czy też posety nie zawierające diamentu (patrz Rysunek 9).

*Porządek przedziałowy* to poset, którego elementy są domkniętymi przedziałami  $[l, r] \subseteq \mathbb{R}$  z relacją  $[l_1, r_1] < [l_2, r_2]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $r_1 < l_2$ . Górne ograniczenie liczby kolorów używanych przez first-fit w klasie porządków przedziałowych o szerokości  $w$  było poprawiane wielokrotnie i wynosiło kolejno:  $\mathcal{O}(w^2)$  (D. R. Woodall, patrz [78]),  $\mathcal{O}(w^{1+\varepsilon})$  dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  (Witsenhausen [120], i niezależnie Gyárfás i Lehel [58]),  $\mathcal{O}(w \log w)$  (W. Just, patrz [58, 78]),  $40w$  (Kierstead [73]),  $25.72w$  (Kierstead i Qin [78]),  $10w$  (Pemmaraju i Raman [96]). Narayanaswamy i Babu [93] oraz niezależnie Brightwell, Kierstead i Trotter<sup>11</sup> zauważyli, że analiza first-fit zaproponowana przez Pemmaraju i Ramana może zostać poprawiona, co prowadzi do obecnie najlepszego górnego ograniczenia równego  $8w$ . Z drugiej strony, dolne ograniczenie na zachłanną liczbę chromatyczną wynosiło kolejno:  $3.56w$  (Woodall, patrz [73, 122]);  $4w - o(w)$  (Witsenhausen [120] oraz niezależnie Chrobak wraz ze Ślusarkiem [25]);  $4.4w - \mathcal{O}(1)$  (Chrobak wraz ze Ślusarkiem [25]);  $4.45w - \mathcal{O}(1)$  (Ślusarek [107]). Ostatecznie, Kierstead, D. Smith i Trotter [80] dla dowolnie małej dodatniej liczby rzeczywistej  $\varepsilon > 0$  i wystarczająco dużego  $w$  skonstruowali rodzinę porządków przedziałowych o szerokości  $w$ , na których first-fit używa co najmniej  $(5 - \varepsilon)w$  kolorów.

<sup>10</sup>Podstawowa terminologia zbiorów częściowo uporządkowanych została przedstawiona w pierwszym akapicie w podsekcji A.3.

<sup>11</sup>Informacja pochodząca z prywatnej rozmowy.

Mówimy, że poset  $P = \langle X, \leq_P \rangle$  zawiera indukowany poset  $Q = \langle Y, \leq_Q \rangle$ , jeśli istnieje funkcja różnowartościowa  $\mu : Y \rightarrow X$  taka, że  $y_1 \leq_Q y_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu(y_1) \leq_P \mu(y_2)$  dla wszystkich  $y_1, y_2 \in Y$ . Dodatkowo poset  $P$  jest  $Q$ -wolny (lub wolny od  $Q$ ), jeśli  $P$  nie zawiera indukowanego  $Q$ . Na przykład twierdzenie Fishburna [39] głosi, że poset jest porządkiem przedziałowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest on  $(2 + 2)$ -wolny, gdzie  $k + k$  to porządek składający się z dwóch nieporównywalnych łańcuchów wysokości  $k$  (patrz Rysunek 9). W [D12]



RYSUNEK 9.  $k + k$ , diament i  $(2, k)$ -drabina.

z Krawczykiem i Szczypką udowodniliśmy, że first-fit pokrywa posety  $(k + k)$ -wolne o szerokości  $w$  za pomocą co najwyżej  $3kw^2$  łańcuchów. Joret i Milans [67] poprawili ten wynik, pokazując górne ograniczenie równe  $8(k - 1)^2w$ , które zostało później poprawione przez Dujmović, Joreta i Wooda [29] do  $16kw$ . W powyższej pracy autorzy pokazali także, że ograniczenie to jest asymptotycznie najlepsze. Kierstead i M. Smith [81] udowodnili z kolei, że first-fit pokrywa posety wolne od diamentów za pomocą co najwyżej  $w^2$  łańcuchów i ograniczenie to jest możliwe najlepsze (patrz Rysunek 9).

Powyższe wyniki zainspirowały Joreta i Milansa [67] do zadania następującego pytania: Dla jakich posetów  $Q$  istnieje funkcja  $f_Q$  taka, że first-fit pokrywa  $Q$ -wolne posety o szerokości  $w$  za pomocą co najwyżej  $f_Q(w)$  łańcuchów? Przykład Kiersteada pokazuje, że  $Q$  musi być posetem o szerokości 2. Powyższy warunek jest nie tylko konieczny, ale też wystarczający, tzn. funkcja  $f_Q$  istnieje dla każdego posetu  $Q$  szerokości 2. W [B1] z Krawczykiem i Mateckim udowodniliśmy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 12** (Twierdzenie 1. w [B1]). *Niech  $Q$  będzie posetem o szerokości 2. Wtedy istnieje funkcja  $f_Q$  taka, że first-fit pokrywa  $Q$ -wolne posety o szerokości  $w$  za pomocą co najwyżej  $f_Q(w)$  łańcuchów.*

Możemy więc scharakteryzować wszystkie klasy posetów zamkniętych na podposety indukowane, dla których, przy zadanej szerokości, first-fit używa skończonej liczby łańcuchów.

**Wniosek 13** (Wniosek 2. w [B1]). *Niech  $\mathcal{P}$  będzie klasą posetów o ograniczonej szerokości, zamkniętą na indukowane podposety. Wtedy poniższe zdania są równoważne:*

- Istnieje stała  $c$  taka, że first-fit pokrywa dowolny poset z  $\mathcal{P}$  za pomocą co najwyżej  $c$  łańcuchów.
- $\mathcal{P}$  nie zawiera pewnego ustalonego posetu  $Q$  o szerokości 2.

Wersja grafowa powyższego wniosku ma następującą postać.

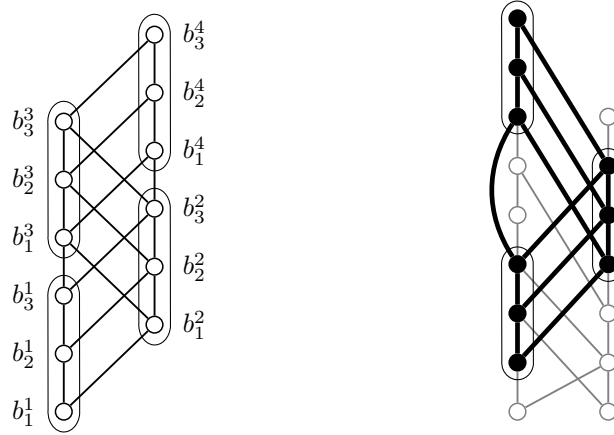
**Wniosek 14** (Wniosek 3. w [B1]). *Niech  $\mathcal{G}$  będzie klasą grafów nieporównywalności z ograniczonym rozmiarem maksymalnej klik, zamkniętą na indukowane podgrafy. Wtedy poniższe zdania są równoważne:*

- Istnieje stała  $c$  taka, że zachłanna liczba chromatyczna dowolnego grafu z  $\mathcal{G}$  jest ograniczona przez  $c$ .
- $\mathcal{G}$  nie zawiera ustalonego grafu nieporównywalności bez trójkąta.

Kluczem do lepszego zrozumienia Twierdzenia 12 oraz wyników z innych omawianych prac jest analiza następującej rodziny posetów. Załóżmy, że  $s, k$  są dodatnimi liczbami całkowitymi. Poset



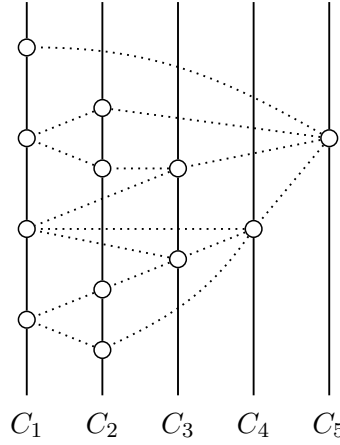
$\langle L, \leq \rangle$  będziemy nazywać  $(s, k)$ -drabiną (patrz Rysunek 10), gdy zbiór elementów  $L$  można podzielić na *bloki*  $B_i$ , tzn.  $L = \bigcup_{i=1}^s B_i$ , gdzie każdy blok  $B_i = \{b_1^i, b_2^i, \dots, b_k^i\}$  dla  $i = 1, 2, \dots, s$ . Relację porządku  $\leq$  definiujemy w następujący sposób. Każdy blok  $B_i$  to łańcuch kolejnych  $k$  elementów  $b_1^i < b_2^i < \dots < b_k^i$ . Odpowiednio bloki parzyste i nieparzyste są uporządkowane liniowo, tzn.  $B_1 < B_3 < \dots < B_o$  oraz  $B_2 < B_4 < \dots < B_e$ , gdzie  $o$  oraz  $e$  są największymi liczbami odpowiednio nieparzystą i parzystą każda nie większa niż  $s$ . Co więcej, dla każdego  $i \leq k$  elementy  $b_i^1 < b_i^2 < \dots < b_i^s$  następują po sobie. Wszystkie pozostałe porównywalności w  $\langle L, \leq \rangle$  wynikają z przechodniości. W [B1] z Krawczykiem i Mateckim udowodniliśmy, że dla każdego posetu  $Q$  o szerokości 2 istnieją liczby naturalne  $s$  oraz  $k$  takie, że  $Q$  jest zawarty w sposób indukowany w  $(s, k)$ -drabinie (Lemat 4 w [B1]). Tym samym wykazujemy, że drabiny pełnią rolę uniwersalnych porządków szerokości 2. Zauważmy, że jeżeli Twierdzenie 12 zachodzi, to nieskończony poset konstruowany w przykładzie Kiersteada (patrz Rysunek 8) musi zawierać wszystkie posety o szerokości 2. Wynika to z tego, że zawiera on  $(s, k)$ -drabinę dla dowolnych liczb naturalnych  $s, k$  (patrz Rysunek 10).



RYSUNEK 10.  $(4, 3)$ -drabina oraz  $(3, 3)$ -drabina w przykładzie Kiersteada.

Drugim przydatnym narzędziem przy szacowaniu liczby kolorów używanych przez first-fit, wykorzystanym między innymi przez Woodalla [122], czy też Gyárfása i Lehelá [58], jest następująca statyczna struktura. Ciąg niepustych łańcuchów  $C_1, \dots, C_g$  w posecie  $P$  nazwiemy *ścianą* o wielkości  $g$  w  $P$ , jeśli każdy element w każdym łańcuchu jest nieporównywalny z co najmniej jednym elementem z każdego poprzedniego łańcucha (patrz Rysunek 11). Łatwo zauważyć, że first-fit używa co najmniej  $g$  łańcuchów w posecie  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy w  $P$  istnieje ściana o wielkości  $g$ . Aby dokończyć dowód Twierdzenia 12 udowodniliśmy, że dla każdych  $w, s, k \geq 1$  istnieje liczba naturalna  $g(w, s, k)$  taka, że każda ściana o wielkości co najmniej  $g(w, s, k)$  zawiera albo  $(s, k)$ -drabinę lub antyłańcuch o rozmiarze  $w$  (Lemat 6 w [B1]).

**B.2. Kolorowanie online.** Algorytm first-fit koloruje wierzchołki jeden po drugim przypisując natychmiast kolor do przetwarzanego w danym momencie wierzchołka. Ponadto, first-fit ma tę własność, że decyzja, który kolor wybrać, zależy wyłącznie od już zaprezentowanego grafu i kolorowania stworzonego do tej pory. Tym samym, first-fit jest przykładem algorytmu online. *Algorytm online kolorowania* to deterministyczny algorytm, który otrzymuje graf  $G = \langle V, E \rangle$  w kolejności jego wierzchołków  $v_1 \ll v_2 \ll \dots \ll v_n$  i koloruje każdy wierzchołek  $v_t$  bazując wyłącznie na grafie  $G$  oraz kolejności  $\ll$  zawężonych do  $V_t = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ . Tak samo jak w przypadku first-fit, porządek liniowy  $\ll$  nazywany jest *kolejnością prezentacji* grafu  $G$ , a  $G$  wraz z  $\ll$  nazywany jest *grafem online*.



RYSUNEK 11. Przykład ściany o wielkości 5. Linie ciągłe i linie przerywane reprezentują odpowiednio niektóre porównywalności oraz niektóre nieporównywalności.

Powyższy model formalizuje scenariusz, w którym prowadzona jest gra pomiędzy Algorytmem, a Prezentem. Prezent konstruuje graf  $G$  pokazując w każdej turze po jednym wierzchołku z  $G$  wraz z krawędziami do już zaprezentowanych wierzchołków. Zadaniem Algorytmu jest pokolorowanie nowego wierzchołka, przy czym podjęta w tej turze decyzja nie może być później zmieniona. Celem Algorytmu jest użycie jak najmniejszej liczby kolorów w przeciwieństwie do Prezentera, który chce wymusić na Algorytmie wykorzystanie jak największej liczby kolorów.

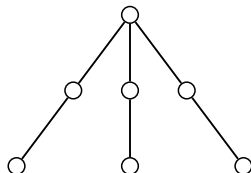
Nie we wszystkich klasach grafów wykorzystanie optymalnego algorytmu online daje lepsze rezultaty od algorytmu first-fit. Dla przykładu strategia wymuszania nieograniczonej liczby kolorów na algorytmie first-fit można łatwo zaadaptować tak, aby wymusić tyle samo kolorów na dowolnym algorytmie online [13, 58]. Natomiast, Lovász, Saks i Trotter [91] przedstawili algorytm kolorowania online, który używa  $\mathcal{O}(n \log^{(2k-3)} n / \log^{(2k-4)} n)$  kolorów<sup>12</sup> na  $k$ -kolorowalnych grafach o rozmiarze  $n$ . Później, Kierstead [74] poprawił powyższy wynik przedstawiając algorytm online, który używa  $\mathcal{O}(n^{1-1/k!})$  kolorów na grafach  $k$ -kolorowalnych. Z drugiej strony, Viswanathan [112] udowodnił, że dla każdego algorytmu kolorowania online  $\mathbf{A}$  istnieje  $k$ -kolorowalny graf online o rozmiarze  $n$ , dla którego  $\mathbf{A}$  zmuszony jest użyć  $\Omega(\log^{k-1} n)$  kolorów. Ponadto, Halldórsson i Szegedy [60] udowodnili, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje  $k$  takie, że dla każdego algorytmu kolorowania online  $\mathbf{A}$  istnieje  $k$ -kolorowalny graf online o rozmiarze  $n$ , dla którego  $\mathbf{A}$  zmuszony jest użyć  $kn / \log^2 n$  kolorów. W przypadku niektórych klas grafów jest znacząco lepiej. Na przykład Lovász, Saks i Trotter [91] zaobserwowali, że istnieje algorytm kolorowania online, który używa  $\log_2 n + 1$  kolorów na grafach dwudzielnych. Z kolei, Kierstead [74] przedstawił algorytmy online, używające  $\mathcal{O}(n^{2/3} \log^{1/3} n)$  i  $\mathcal{O}(n^{5/6} \log^{1/6} n)$  kolorów na grafach odpowiednio 3- oraz 4-kolorowalnych. Co więcej, Kierstead i Kolossa [75] udowodnili, że istnieje algorytm online, który używa  $\mathcal{O}(n^{10k/\log \log n})$  kolorów na  $k$ -kolorowalnych grafach doskonałych.

Podobnie jak w przypadku first-fit, celem badań jest znalezienie tych klas grafów, dla których istnieje *efektywny* algorytm online, czyli taki, dla którego liczba użytych kolorów jest funkcją rozmiaru maksymalnej klikli. Na początku warto wspomnieć, że z faktu, że first-fit jest przykładem algorytmu online, wszystkie klasy, dla których first-fit jest efektywny, są w oczywisty sposób przykładami klas dla których istnieje efektywne kolorowanie online. Znaczące rozszerzenie klas grafów, które można kolorować za pomocą efektywnych algorytmów online, zostało uzyskane przez Kiersteada, Penrice'a i Trottera [77]. Udowodnili oni, że dla dowolnego drzewa  $T$  o promieniu 2 istnieje efektywny algorytm online w klasie grafów wolnych od  $T$ . Z drugiej zaś strony, Gyárfás

<sup>12</sup>Funkcja  $\log^{(k)}$  oznacza log iterowany  $k$  razy.

i Lehel [59] pokazali, że nie ma efektywnego algorytmu online dla grafów wolnych od ścieżek prostych rozmiaru 6, co oznacza, że wyniku Kiersteada, Penrice’a i Trottera nie można rozszerzyć na żadne drzewo o promieniu 3.

Ponieważ każde drzewo jest grafem porównowalności jakiegoś posetu, nie ma efektywnego algorytmu online w klasie grafów porównywalności. W przypadku grafu nieporównywalności sytuacja wygląda inaczej. Gallai [43, 44] przedstawił pełną charakterystykę grafów nieporównywalności za pomocą podgrafów indukowanych. Konsekwencją twierdzenia Gallai jest to, że grafy nieporównywalności nie posiadają jako indukowanego podgrafu drzewa o promieniu 2 uzyskanego przez subdywizję każdej krawędzi  $K_{1,3}$  (patrz Rysunek 12). Dlatego efektywny algo-



RYSUNEK 12. Drzewo o promieniu 2 otrzymane przez subdywizję każdej krawędzi  $K_{1,3}$ .

rytm online dla grafów nie posiadających indukowanego drzewa o promieniu 2, zaprezentowany przez Kiersteada, Penrice’a i Trottera [77], jest również efektywnym algorytmem w klasie grafów nieporównywalności. Efektywność powyższego algorytmu nie jest jednak dokładnie znana.

Warto wspomnieć, że istnieje różnica między tym, czy na wejściu algorytmu online jest prezentowany graf porównywalności (nieporównywalności) jakiegoś nieznanego posetu  $P$ , czy też jest prezentowany poset  $P$ . W przeciwieństwie do first-fita, istnieją algorytmy online, dla których dodatkowa informacja o tym, który z dwóch porównywalnych elementów jest większy, jest istotna i poprawia efektywność tych algorytmów. Prowadzi to do następującej definicji. *Algorytm pokrywania łańcuchami (antyłańcuchami) online* jest deterministycznym algorytmem, który otrzymuje na wejściu poset  $P = \langle X, \leq \rangle$  w kolejności jego elementów  $x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll x_n$  i przypisuje każdemu elementowi  $x_t$  taki kolor, aby wszystkie elementy o tym samym kolorze tworzyły łańcuch (antyłańcuch). Decyzja algorytmu dotycząca kolorowania  $x_t$  zależy wyłącznie od posetu  $P$  oraz porządku  $\ll$  ograniczonego do  $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ . Analogicznie jak w przypadku grafów, porządek liniowy  $\ll$  nazywany jest *kolejnością prezentacji*  $P$ , a poset  $P$  wraz z kolejnością prezentacji  $\ll$  nazywany jest *posetem online*.

Przykładem, że pełna informacja o częściowym porządku daje lepsze rezultaty jest wynik J. Schmerla, który zaprezentował algorytm online dzielący posety o wysokości  $h$  na co najwyżej  $\binom{h+1}{2}$  antyłańcuchów (patrz w [83]). Wynik ten kontrastuje z faktem, że nie ma efektywnego algorytmu online kolorującego grafy porównywalności. Warto nadmienić, że algorytm Schmerla jest najlepszy z możliwych, co udowodnił E. Szemerédi w [83].

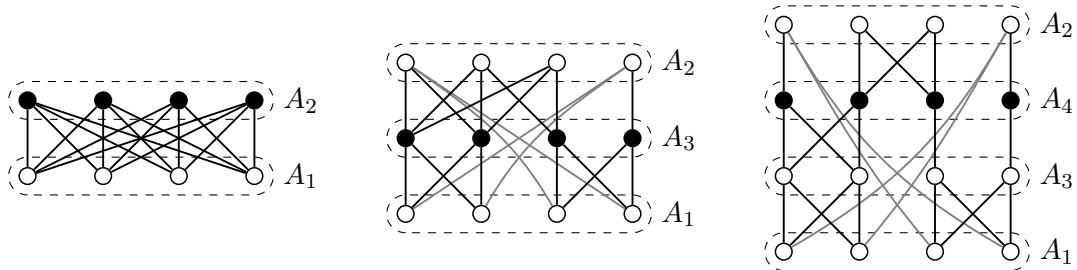
W przypadku problemu pokrywania łańcuchami porządków online, sformułowanego przez J. Schmerla (patrz w [82]) jeszcze w latach 70. ubiegłego stulecia, sytuacja jest jeszcze bardziej interesująca.<sup>13</sup> Niech  $\text{val}(w)$  będzie najmniejszą liczbą  $k$ , dla której istnieje algorytm online, który pokrywa posety o szerokości  $w$  co najwyżej  $k$  łańcuchami. Jak dotąd dokładna wartość  $\text{val}(w)$  jest znana jedynie dla  $w \leq 2$ . Oczywiście  $\text{val}(1) = 1$ . Kierstead [82] udowodnił, że  $5 \leq \text{val}(2) \leq 6$ . Felsner [38] zaprezentował algorytm online, który pokrywa posety o szerokości 2 za pomocą 5 łańcuchów, pokazując w ten sposób, że  $\text{val}(2) = 5$ . Kierstead [82] udowodnił, że  $\text{val}(3) \geq 9$ . Z kolei, w [19] pokazałem, że  $\text{val}(3) \leq 16$ . Kierstead [82] jako pierwszy zaprezentował algorytm online, który używa ograniczonej liczby kolorów na posetach o ograniczonej szerokości. W rzeczywistości

<sup>13</sup>Schmerl postawił powyższy problem zanim Kierstead, Penrice i Trotter [77] przedstawili efektywny algorytm kolorowania online grafów nieporównywalności.

Kierstead udowodnił, że  $\text{val}(w) \leq (5^w - 1)/4$ . Z drugiej strony, Kierstead w tym samym artykule wykazał, że  $\text{val}(w) \geq 4w - 3$ . Z kolei E. Szemerédi udowodnił następującą kwadratowe dolne ograniczenie:  $\text{val}(w) \geq \binom{w+1}{2}$  (patrz w [D10, 83]). W [D10] z Felsnerem, Klochem, Krawczykiem, Mateckim oraz Mickiem, poprawiliśmy ograniczenie Szemerédiego o stałą multiplikatywną i obecnym rekordem jest  $\text{val}(w) \geq (2 - o(1))\binom{w+1}{2}$ . Najważniejszym pytaniem w kontekście omawianego problemu jest, czy istnieje algorytm pokrywania łańcuchami online wykorzystujący wielomianową liczbę łańcuchów w zależności od szerokości pokrywanego porządku, innymi słowy czy  $\text{val}(w) \leq \text{poly}(w)$ . Pytanie to zostało postawione przez Kiersteada [82] w 1981, a także pojawiło się w rozdziale *Partially Ordered Sets* autorstwa W. T. Trottera w książce *Handbook of Combinatorics* [48]. Prawie 30 lat później, w pracy [B2] z Krawczykiem, przedstawiliśmy pierwszy algorytm online wykorzystujący podwykładniczo wiele łańcuchów.

**Twierdzenie 15** (Twierdzenie 1.3. w [B2]). *Istnieje algorytm online pokrywający posety o szerokości  $w$  co najwyżej  $w^{13 \log w}$  łańcuchami. To oznacza, że  $\text{val}(w) \leq w^{13 \log w}$ .*

Ważną częścią dowodu Twierdzenia 15 jest redukcja do prostszego problemu, w którym prezentowany jest bardziej ustrukturyzowany porządek. Idea ta rozszerza koncepcję lokalnej gry przedstawionej w [19].<sup>14</sup> *Posetem regularnym* jest trójką  $\langle X, \leq, A_1 \dots A_k \rangle$ , gdzie  $P = \langle X, \leq \rangle$  jest prezentowanym posetem, a  $A_1 \dots A_k$  jest sekwencją rozłącznych antyłańcuchów w  $P$  określającą strukturę posetu  $P$  jak i porządek wprowadzania elementów. W turze  $t$  prezentowany jest antyłańcuch  $A_t$ , a algorytm przypisuje elementy  $A_t$  do łańcuchów. Antyłańcuchy  $A_1, A_2$  przedstawione w pierwszych dwóch turach tworzą pełny dwudzielny poset<sup>15</sup>  $\langle A_1, A_2, < \rangle$ . Tuż przed wprowadzeniem antyłańcucha  $A_t$  (dla  $t > 2$ ), antyłańcuchy  $A_1, \dots, A_{t-1}$  pokazane wcześniej tworzą podział zaprezentowanego posetu na poziomy (patrz Rysunek 13), a poset dwudzielny<sup>16</sup> rozpięty między dwoma sąsiednimi poziomami jest *regularny*, co oznacza, że każda krawędź należy do jakiegoś doskonałego skojarzenia pomiędzy tymi poziomami. W turze  $t > 2$  antyłańcuch  $A_t$  jest wprowadzany pomiędzy dwa sąsiadujące poziomy  $A_p$  i  $A_s$  w ten sposób, że w miejscu posetu regularnego dwudzielnego  $\langle A_p, A_s, < \rangle$  pojawiają się dwa posety regularne dwudzielne  $\langle A_p, A_t, < \rangle$  i  $\langle A_t, A_s, < \rangle$ . Przykład posetu regularnego o szerokości 4 jest przedstawiony na Rysunku 13. Tak jak poprzednio, algorytm online pokrywania łańcuchami posetu



RYSUNEK 13. Antyłańcuchy  $A_2, A_3, A_4$  wprowadzone w turach 2, 3 oraz 4 w prezentacji posetu regularnego  $\langle X, \leq, A_1 \dots A_4 \rangle$  o szerokości 4.

regularnego w turze  $t$  przypisuje elementy  $A_t$  do łańcuchów w taki sposób, że decyzja ta zależy jedynie od posetu  $\langle \bigcup_{i=1}^t A_i, \leq \rangle$  oraz kolejności prezentacji  $A_1 \ll A_2 \ll \dots \ll A_t$ . Niech  $\text{reg}(w)$  będzie minimalną liczbą  $k$ , dla której istnieje algorytm online, który pokrywa posety regularne

<sup>14</sup>W rzeczywistości koncepcja lokalnej gry została użyta w dowodzie, że  $\text{val}(3) \leq 16$  i zawiera analizę tylko najbliższego otoczenia nowo prezentowanych elementów.

<sup>15</sup>Każdy element z pierwszego antyłańcucha leży pod każdym elementem drugiego antyłańcucha.

<sup>16</sup>Poset, którego zbiór elementów jest sumą rozłączną zbioru elementów minimalnych oraz zbioru elementów maksymalnych.

o szerokości  $w$  na co najwyżej  $k$  łańcuchami. Oczywiście mamy, że  $\text{reg}(w) \leq \text{val}(w)$ . W [B2] z Krawczykiem udowodniliśmy, że  $\text{val}(w)$  może być również ograniczone z góry przez  $\text{reg}(w)$ .

**Twierdzenie 16** (Lemat 3.1. w [B2]). *Istnieje algorytm online pokrywający posety o szerokości  $w$  co najwyżej  $w \cdot \text{reg}(w)$ . To oznacza, że  $\text{val}(w) \leq w \cdot \text{reg}(w)$ .*

Druga część dowodu Twierdzenia 15 to prezentacja algorytmu pokrywania łańcuchami online posetów regularnych. Przedstawiony algorytm wykorzystuje wiele procedur: algorytm dla problemu pokrywania łańcuchami online posetów *wzrastających*<sup>17</sup> (Felsner [38]); algorytm first-fit dla postów  $(k+k)$ -wolnych (Dujmović, Joret i Wood [29]);<sup>18</sup> procedurę zwaną „projekcją kolorów” (Uwaga 6.4. w [B2]); oraz procedurę zwaną „tasowaniem kolorów” (Uwaga 6.5. w [B2]). Użycie powyższych narzędzi pozwala na zredukowanie problemu dla posetów regularnych do problemu pokrywania łańcuchowego online posetów o szerokości dwa razy mniejszej. Łącząc wszystko razem, otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 17** (Lemat 3.2. w [B2]). *Istnieje algorytm online pokrywający posety o szerokości  $w$  co najwyżej  $w^{12} \cdot \text{val}(w/2)$  łańcuchami. To oznacza, że  $\text{reg}(w) \leq w^{12} \cdot \text{val}(w/2)$ .*

Twierdzenia 16 i 17 razem dają zależność rekurencyjną  $\text{val}(w) \leq w^{13} \cdot \text{val}(w/2)$ , której rozwiązanie stanowi wypowiedź Twierdzenia 15. Warto wspomnieć, że powyższy algorytm można zaimplementować tak, aby działał w czasie wielomianowym. Ze względu na fakt, że algorytm składa się z wielu nietrywialnych procedur, implementacja jest jednak raczej skomplikowana.

Jednym z najprostszych algorytmów kolorowania online, który z kolei ma trywialną implementację, jest first-fit. Przykład Kiersteada pokazuje jednak, że w klasie wszystkich posetów algorytm first-fit nie jest efektywny (patrz Rysunek 8). Z drugiej strony, z Krawczykiem i Mateckim [B1] udowodniliśmy, że jeśli klasa posetów nie zawiera jakiegoś posetu szerokości 2, to liczba kolorów użyta przez algorytm first-fit jest ograniczona funkcją szerokości (patrz Twierdzenie 12). Tak więc powstało pytanie, czy posety regularne należą do poprzednio opisanej klasy posetów, dla których algorytm first-fit działa wydajnie. W pracy [B3] z Kiersteadem, Krawczykiem, Mateckim i M. Smithem odpowiedzieliśmy twierdząco na powyższe pytanie w następujący sposób.

**Twierdzenie 18** (Lemat 13. w [B3]). *Regularny poset o szerokości  $w$  nie zawiera  $(2, 2w^2+1)$ -drabiny.*

Przykład  $(s, k)$ -drabiny przedstawiono na Rysunku 10. Z faktu, że górne ograniczenie wynikające z dowodu Twierdzenia 12 jest co najmniej wykładnicze, do poprawienia Twierdzenia 15 brakowało znaleźć lepszego oszacowania liczby wykorzystanych kolorów przez algorytm first-fit w tej klasie porządków. Kierstead i M. Smith [81] przedstawili następujące lepsze oszacowanie.

**Twierdzenie 19** ([81] i Lemat 7. w [B3]). *First-fit używa co najwyżej  $w^{2.5 \log_2(2w)+2 \log_2 k}$  łańcuchów na posetach o szerokości  $w$ , które nie posiadają  $(2, k)$ -drabin jako podposetów indukowanych.*

Twierdzenie 18 wraz z Twierdzeniem 19 dają następującą pozytywną odpowiedź na nasze pytanie dotyczące zachowania first-fit na posetach regularnych.

**Wniosek 20.** *First-fit używa co najwyżej  $w^{6.5 \log_2 w+6}$  łańcuchów na posetach regularnych o szerokości  $w$ . To oznacza, że  $\text{reg}(w) \leq w^{6.5 \log_2 w+6}$ .*

Z kolei, połączenie powyższego wyniku z Twierdzeniem 16 daje algorytm, który jest łatwy do implementacji i używa mniej kolorów.

<sup>17</sup>Elementy są maksymalne w momencie ich prezentacji.

<sup>18</sup>W oryginalnym dowodzie w wersji konferencyjnej [B2] użyliśmy wyniku Boska, Krawczyka i Szczypki przedstawionego w [D12]. Później wynik z [D12] został poprawiony przez Dujmović i innych [29], który użyliśmy w poprawionej wersji do czasopisma, aby uzyskać lepszy efekt końcowy.

**Twierdzenie 21** (Twierdzenie 3. w [B3]). *Istnieje algorytm online pokrywający posety o szerokości w co najwyżej  $w^{6.5 \log w + 7}$  łańcuchami. To oznacza, że  $\text{val}(w) \leq w^{6.5 \log w + 7}$ .*

Naturalnym sposobem poprawy Twierdzenia 21 byłoby poprawienie ograniczenia przedstawionego w Twierdzeniu 19. W pracy [B3] z Kiersteadem, Krawczykiem, Mateckim i M. Smithem pokazaliśmy jednak, że nie można istotnie poprawić ograniczenia na liczbę kolorów użytych przez first-fit na posetach nie zawierających  $(2, k)$ -drabiny jako podposetu indukowanego.

**Twierdzenie 22** (Lemat 17. w [B3]). *Dla dowolnych liczb naturalnych w i k istnieje poset wolny od  $(2, k)$ -drabiny o szerokości w, na którym first-fit używa  $w^{\log_2(k-1)}/(k-1)$  łańcuchów.*

Przy ustalonym k powyższe dolne ograniczenie jest wielomianem ze względu na szerokość. Niestety, istnieją posety regularne zawierające drabinę wielomianowego rozmiaru, co również pokazaliśmy z Kiersteadem, Krawczykiem, Mateckim i M. Smithem w pracy [B3].

**Twierdzenie 23** (Lemat 16. w [B3]). *Dla dowolnej liczby naturalnej  $w \geq 2$  istnieje poset regularny o szerokości w, który zawiera  $(2, \lfloor (w+2)/2 \rfloor)$ -drabinę.*

Oznacza to, że powyższe podejście wykorzystujące drabiny nie pozwoli skonstruować algorytmu używającego wielomianowej liczby łańcuchów. Warto jednak nadmienić, że Twierdzenia 22 oraz 23 nie wykluczają możliwości udowodnienia wielomianowego górnego ograniczenia na liczbę łańcuchów używanych przez first-fit na posetach regularnych. Powyższy problem jest nadal otwarty i być może lepsze zrozumienie pozwoli na dalszy postęp w ogólnym problemie. Niedawno w pracy [20] z Krawczykiem zaprezentowaliśmy algorytm używający asymptotycznie mniej łańcuchów niż wszystkie dotychczasowe algorytmy.

**Twierdzenie 24** (Twierdzenie 1.4. w [20]). *Istnieje algorytm online pokrywający posety o szerokości w co najwyżej  $w^{O(\log \log w)}$  łańcuchami. To oznacza, że  $\text{val}(w) \leq w^{O(\log \log w)}$ .*

Algorytm online przedstawiony w [20] bazuje na idei zawartych w artykule [B2]. Nowe pomysły w dowodzie Twierdzenia 24 pozwalają skonstruować algorytm dla porządków regularnych z lepszą zależnością rekurencyjną na  $\text{reg}(w)$ .

**Twierdzenie 25** ([20]). *Istnieje algorytm online pokrywający posety regularne o szerokości w co najwyżej  $\text{poly}(w) \cdot \text{val}^2(\sqrt{w})$ . To znaczy:  $\text{reg}(w) \leq \text{poly}(w) \cdot \text{val}^2(\sqrt{w})$ .*

Twierdzenie 16 i 25 prowadzą do zależności rekurencyjnej  $\text{val}(w) \leq \text{poly}(w) \cdot \text{val}^2(\sqrt{w})$ , z której wynika rozwiązanie przedstawione w Twierdzeniu 24. Warto zauważyć, że algorytm przedstawiony w dowodzie Twierdzenia 25 musi sprawdzić, czy poset dwudzielny szerokości w zawiera pełny graf dwudzielny o rozmiarze  $\sqrt{w}$ . Johnson [66] pokazał, że taki problem jest NP-zupełny, więc nie ma raczej nadziei, że nasz algorytm zadziała w czasie wielomianowym w zależności od rozmiaru prezentowanego posetu. Niemniej jednak można zaimplementować nasz algorytm tak, aby działał w czasie  $w^{O(\sqrt{w})}n$ , gdzie w to szerokość, a n to rozmiar prezentowanego posetu.

## C. DYNAMICZNE SKOJARZENIA

**C.1. Problem inkrementalnego skojarzenia w grafach dwudzielnych.** Ford i Fulkerson w [40] pokazali, że problem pokrycia łańcuchowego posetów jest ściśle powiązany z problemem skojarzenia w grafach dwudzielnych w następujący sposób: Dla posetu  $P = \langle X, \leq \rangle$ , gdzie  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , możemy zdefiniować graf dwudzielny  $G = \langle X', X'', E \rangle$ , gdzie  $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$  oraz  $X'' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$  oraz dwa wierzchołki  $x'_i \in X'$  i  $x''_j \in X''$  są połączone krawędzią  $x'_i \sim x''_j$  w G wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_i < x_j$  w P. Można łatwo sprawdzić, że dowolne skojarzenie w G o rozmiarze k jednoznacznie definiuje pokrycie łańcuchowe posetu P o rozmiarze  $n - k$  i na odwrót. W szczególności maksymalne skojarzenie w G jednoznacznie

wyznacza minimalne pokrycie łańcuchowe posetu  $P$ . Odwrotna redukcja jest jeszcze prostsza, ponieważ na każdy graf dwudzielny można spojrzeć jak na poset o wysokości co najwyżej 2. Jedną z konsekwencji powyższej równoważności może być użycie algorytmu Hopcrofta-Karpa (dla problemu znajdowania maksymalnego skojarzenia w grafach dwudzielnych) [62] do znalezienia minimalnego pokrycia łańcuchowego. W rezultacie najlepszy znany algorytm znajdowania minimalnego pokrycia łańcuchowego działa w czasie  $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ , gdzie  $n$  to liczba elementów, a  $m$  to rozmiar relacji częściowego porządku.

W przypadku problemu skojarzenia online wierzchołki są przedstawiane jeden po drugim wraz z krawędziami do już zaprezentowanych wierzchołków. Algorytm online decyduje, czy jedną z prezentowanych krawędzi należy dodać do konstruowanego skojarzenia. Algorytm zachłanny jest  $1/2$ -aproxymacyjny. Ponadto można wykazać, że nie ma deterministycznego algorytmu online, który byłby lepszy. Nawet jeśli przyjmiemy, że wierzchołki z jednej klasy grafu dwudzielnego są znane na samym początku, nie ma algorytmu o lepszej aproksymacji niż  $1/2$ . Sytuacja staje się o wiele bardziej interesująca, gdy dodatkowo pozwolimy na to, aby algorytm był randomizowany. Karp, U. Vazirani i V. Vazirani ([71] i [17, 26] dla dowodu) przedstawili randomizowany  $(1 - 1/e)$ -aproxymacyjny algorytm online [71]. Co więcej, powyższy algorytm jest najlepszy z możliwych w modelu randomizowanym.

Innym podejściem do zagadnienia skojarzenia w grafach online jest *inkrementalne skojarzenie w grafach dwudzielnych w modelu dwustronnym*. Podobnie jak w przypadku algorytmu online, *algorytm inkrementalny* otrzymuje na wejściu graf dwudzielny  $G = \langle U, W, E \rangle$  w sposób online, tzn. w *kolejności prezentacji*  $v_1 \ll v_2 \ll \dots \ll v_{2n}$ , gdzie  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\} = U \cup W$ . Po zaprezentowaniu początkowego fragmentu zbioru wierzchołków  $V_t = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ , algorytm inkrementalny konstruuje maksymalne skojarzenie  $M_t$  w grafie  $G[V_t]$ ,<sup>19</sup> bazując wyłącznie na  $G[V_t]$  oraz  $\ll$  zawężonej do  $V_t$ . Model ten dopuszcza więc, że niektóre krawędzie będą, być może wielokrotnie, zmieniać status przynależności do bieżącego skojarzenia. Kontrastuje to z algorytmami online, które na stałe dodają krawędzie do konstruowanego skojarzenia. Celem w tym przypadku jest znalezienie algorytmu inkrementalnego minimalizującego całkowitą liczbę zmian na krawędziach, tzn. zminimalizuje sumę  $|M_1| + |M_1 \oplus M_2| + \dots + |M_{2n-1} \oplus M_{2n}|$ , gdzie  $\oplus$  jest różnicą symetryczną. Niestety, łatwo zauważyć, że naiwny algorytm, który pesymistycznie powoduje  $\mathcal{O}(n^2)$  zmian, jest asymptotycznie najlepszy. Dla przykładu, ścieżka rozszerzona na przemian z każdej strony, wymusza na każdym algorytmie inkrementalnym łącznie  $\Omega(n^2)$  zmian.

Powyższy negatywny wynik skierował badania ku problemowi inkrementalnego skojarzenia w grafach dwudzielnych *w modelu jednostronnym*. Problem ten odpowiada scenariuszowi, w którym graf dwudzielny  $G = \langle S, C, E \rangle$  jest prezentowany w ten sposób, że pierwsza klasa wierzchołków  $S$  (zbiór *serwerów*) jest podana z góry przed rozpoczęciem algorytmu, podczas gdy druga klasa wierzchołków  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  (zbiór *klientów*) jest prezentowana online, tzn. w *kolejności prezentacji*  $c_1 \ll c_2 \ll \dots \ll c_n$ . Po przedstawieniu początkowego zbioru klientów  $C_t = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ , algorytm inkrementalny konstruuje maksymalne skojarzenie  $M_t$  w grafie  $G[S \cup C_t]$ , bazując wyłącznie na podgrafie  $G[S \cup C_t]$  i kolejności prezentacji  $\ll$  ograniczonej do  $C_t$ .<sup>20</sup> Ta wersja powyższego problemu ma praktyczną interpretację, w której klienci przychodzą online i żądają usługi z zbioru danych serwerów. Każdy klient przychodzi wraz ze zbiorem serwerów, które są w stanie obsłużyć jego żądanie. W tym scenariuszu chcemy zapewnić usługę dla jak największej liczby klientów. Dlatego w razie potrzeby przenosimy klientów między

<sup>19</sup>Przez  $G[X] = \langle U \cap X, W \cap X, E[X] \rangle$  oznaczamy podgraf  $G$  indukowany przez  $X \subseteq U \cup W$ , gdzie  $E[X] = \{e \in E : e \subseteq X\}$ .

<sup>20</sup>Ponieważ wersja jednostronna ma znacznie bogatszą literaturę, zaczęto pisać o ogólnym przypadku jako o wersji dwustronnej w przeciwieństwie do jednostronnego przypadku, w którym po prostu piszemy „problem inkrementalnego skojarzenia w grafie dwudzielnym”. Tak więc, aby być konsekwentnym, wszystkie poniższe opisy i wyniki będą odnosić się do jednostronnego modelu, chyba że zaznaczono, że jest to wersja dwustronna.

serwerami, a koszt rozwiązania to całkowita liczba przypadków, w których jakiś klient musiał zmienić przydzielany mu serwer. Rozwiązanie tego problemu polega na znalezieniu za każdym razem ścieżki powiększającej (czyli ścieżki alternującej pomiędzy krawędziami ze skojarzenia oraz spoza niego) na bieżącym grafie od nowo zaprezentowanego klienta do nieskojarzonego serwera. Za pomocą tego języka możemy w równoważny sposób zdefiniować koszt algorytmu inkrementalnego dla omawianego problemu jako sumy długości wszystkich ścieżek powiększających. Model ten został wprowadzony w 1995 przez Grove'a *i innych* [55]. W tej samej pracy autorzy pokazali górne ograniczenie  $\mathcal{O}(n \log n)$  w przypadku, gdy każdy klient łączy się z co najwyżej dwoma serwerami. Następnie model ten był badany przez Chaudhuri'ego *i innych* [23]. W niektórych przypadkach zaprezentowali oni całkowite ograniczenie  $\mathcal{O}(n \log n)$ , np. dla drzewa lub grafów losowych o stopniu  $\Theta(\log n)$ . Z drugiej strony, łatwo zauważyć, że istnieje strategia<sup>21</sup> wymuszająca na dowolnym algorytmie inkrementalnym  $\Omega(n \log n)$  zmian.<sup>22</sup> Te przypadki skłoniły autorów [23] do postawienia hipotezy, że w klasie grafów dwudzielnych istnieje algorytm inkrementalny, który osiąga ograniczenie  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

Jak argumentowano w [23] powyższy model ma szeroki wachlarz zastosowań w bardzo różnych dziedzinach informatyki, np. w dostarczaniu treści strumieniowych, w hostingu, w zdalnym przechowywaniu danych, planowaniu zadań, haszowaniu itp. We wszystkich tych zastosowaniach mamy do czynienia z klientami (zadaniami do planowania lub obiektami do haszowania), którzy muszą zostać przydzieleni do pewnego ustalonego zbioru serwerów (komórki tabeli do haszowania). We wszystkich tych przypadkach nie chcemy rezygnować z usług dla klientów, ale wolimy je przenosić, aby zadowolić jak najwięcej klientów. W tym wypadku koszt nieobsłużenia klienta jest znacznie wyższy niż koszt ponownego przydzielenia klienta do innego serwera (np. kopiowanie obiektu w tablicy haszującej jest tanie). Niemniej jednak nadal chcielibyśmy zminimalizować koszty tych zmian. Zaskakujące jest to, że pomimo przydatności tego modelu, nie było lepszego rozwiązania do momentu zaprezentowania wyników z [C1] niż naiwne górne ograniczenie  $\mathcal{O}(n^2)$ . W [C1] z Leniowskim, Sankowskim i Zych-Pawlewicz przedstawiliśmy następujący wynik, który stanowi krok w kierunku rozwiązania wyżej opisanej hipotezy.

**Twierdzenie 26** ([C1]). *Istnieje algorytm inkrementalny konstruujący maksymalne skojarzenie w grafach dwudzielnych, dokonując przy tym sumarycznie  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$  zmian w łącznym czasie  $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ .*

W [C1] (z Leniowskim, Sankowskim i Zych-Pawlewicz) proponujemy nowy zachłanny algorytm. Pomysł jest następujący. Z każdym serwerem kojarzymy atrybut o nazwie *ranga*. Określa on, ile razy serwer został ponownie przydzielony, tzn. ile razy odpowiedni serwer leżał na ścieżce powiększającej. Celem algorytmu jest zminimalizowanie maksymalnej rangi spośród wszystkich serwerów. *Rangą ścieżki  $\pi$*  jest maksymalna ranga wśród serwerów leżących na  $\pi$ . W każdej turze  $t$  nasz algorytm wybiera ścieżkę powiększającą  $\pi_t$  od nowo zaprezentowanego klienta  $c_t$  do nieskojarzonego serwera  $s$  taką, że każdy sufix  $\pi_t$  ma minimalną rangę. Powyższą procedurę nazwaliśmy *algorytmem rangowym*. Udowodniliśmy, że ten algorytm zmienia skojarzenie każdego klienta co najwyżej  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  razy, co daje górne ograniczenie na całkowitą liczbę zmian rzędu  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$ .

Rozważmy sumaryczny czas potrzebny na znalezienie wszystkich ścieżek powiększających w algorytmie rangowym. Algorytm przedstawiony w [C1] ma tę przydatną własność, że konstruowane ścieżki można znajdować lokalnie. Innymi słowy, żadna globalna informacja (na przykład długość najkrótszej ścieżki) nie musi być zachowywana w grafie, aby znaleźć „rangowe” ścieżki. To pozwoliło nam opracować procedurę wyszukiwania ścieżki, która amortyzuje wymaganą pracę

<sup>21</sup>Rozważane algorytmy są deterministyczne, a to pozwala na rozważanie tego problemu jako gry pomiędzy Prezentorem konstruującym graf dwudzielny a Algorytmem konstruującym maksymalne skojarzenie.

<sup>22</sup>Ta strategia polega na umiejętnym łączeniu prostych ścieżek o tej samej długości.



w wydajny sposób. Intuicyjnie chodzi o to, aby przypisać każdemu ustalonym wierzchołkowi zmienną o nazwie **rank**, która może jedynie wzrastać w trakcie działania algorytmu. Za każdym razem staramy się szukać ścieżki minimalizującej wartości zmiennych **rank**, a jeśli jej nie znajdziemy, podnosimy je o jeden. Wiemy, że zawsze istnieje ścieżka powiększająca o randze ograniczonej przez  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ , więc albo znajdujemy ścieżkę, albo przekraczamy tę granicę i wiemy, że nie ma żadnej ścieżki powiększającej. Prowadzi to do inkrementalnego i dekrementalnego algorytmu, które utrzymują maksymalne skojarzenie w całkowitym czasie  $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ . Warto tutaj wspomnieć, że wcześniej znane jedynie było trywialne rozwiązanie  $\mathcal{O}(nm)$ . Pod tym względem jest nieco zaskakujące, że nasz algorytm znajduje ścieżki powiększające jedna po drugiej, nie patrząc na cały graf. W szczególności czas pracy algorytmu rangowego odpowiada jednemu z najlepszych rozwiązań offline dla tego problemu [62], ale w ramach tego samego ograniczenia nasz algorytm oblicza nie tylko jedno maksymalne skojarzenie, ale  $n - 1$  innych.

Oprócz rozwiązywania problemu inkrementalnego, rozszerzamy nasze wyniki w trojaki sposób. Po pierwsze, pokazujemy, że przy pominięciu dowolnie małej, ale stałej części klientów, można uzyskać optymalne liniowe ograniczenie na sumaryczną liczbę zmian.

**Twierdzenie 27** (Lemat VI.2. w [C1]). *Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $(1 - \varepsilon)$ -aproksymacyjny algorytm inkrementalny dla problemu maksymalnego skojarzenia w grafach dwudzielnych, który dokonuje sumarycznie  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}n)$  zmian w łącznym czasie  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}m)$ .*

Poprzednio w tym inkrementalnym aproksymacyjnym modelu najlepszym rozwiązaniem było użycie  $(1 - 1/e)$ -aproksymacyjnego algorytmu (z pracy [71]) z całkowitą liczbą  $\mathcal{O}(n)$  zmian i o całkowitej złożoności czasowej  $\mathcal{O}(m)$  lub utrzymywanie maksymalnego skojarzenia z  $\mathcal{O}(n^2)$  całkowitą liczbą zmian w łącznym czasie  $\mathcal{O}(nm)$ . Co więcej, rozwiązanie z Twierdzenia 27 daje ten sam czas działania co najlepsze rozwiązanie offline.<sup>23</sup>

Po drugie, pokazujemy, że to samo ograniczenie utrzymuje się w przypadku *dekrementalnym*. W tym modelu algorytm na starcie otrzymuje graf dwudzielny  $\langle S, C, E \rangle$ . Celem algorytmu jest utrzymywanie maksymalnego skojarzenia podczas, gdy wierzchołki ze zbioru  $C$  sukcesywnie są usuwane.

**Wniosek 28** (Wniosek VI.4. w [C1]). *Istnieje algorytm dekrementalny utrzymujący maksymalne skojarzenie w grafach dwudzielnych dokonując przy tym sumarycznie  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$  zmian w łącznym czasie  $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ .*

**Wniosek 29** (Wniosek VI.6. w [C1]). *Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $(1 - \varepsilon)$ -aproksymacyjny algorytm dekrementalny dla problemu maksymalnego skojarzenia w grafach dwudzielnych, który dokonuje sumarycznie  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}n)$  zmian w łącznym czasie  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}m)$ .*

Na koniec rozszerzamy algorytm rangowy na grafy z całkowitoliczbowymi wagami na krawędziach ograniczonymi przez  $W$ , uzyskując następujące wyniki.

**Wniosek 30** (Wniosek VI.8. w [C1]). *Istnieją algorytmy inkrementalny i dekrementalny utrzymujące sumaryczną wagę maksymalnego skojarzenia w całkowitym czasie  $\mathcal{O}(W^{3/2}m\sqrt{n})$ .*

**Wniosek 31** (Wniosek VI.9. w [C1]). *Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieją  $(1 - \varepsilon)$ -aproksymacyjne algorytmy inkrementalny i dekrementalny dla problemu maksymalnego ważonego skojarzenia działające w całkowitym czasie  $\mathcal{O}(W\varepsilon^{-1}m)$ .*

Model inkrementalny jest silnie powiązany z algorytmami dynamicznymi. W takim modelu nie jesteśmy tylko zainteresowani budowaniem krótkich ścieżek powiększających. Najważniejszym aspektem jest skuteczny sposób ich wyszukiwania. Większość artykułów w tej dziedzinie rozważa

<sup>23</sup>Wykonanie  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$  faz algorytmu Hopcrofta-Karpa daje  $(1 - \varepsilon)$ -aproksymacyjny algorytm dla problemu maksymalnego skojarzenia, który działa w czasie  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}m)$  (patrz [62]).

aktualizacje krawędzi w ogólnym, w pełni dynamicznym modelu, który pozwala na wzajemne wymieszanie dodawania i usuwania krawędzi. Jest to znacznie trudniejszy scenariusz, w którym nie można wiele osiągnąć, gdy żądamy utrzymywanie maksymalnego skojarzenia. W szczególności, jeśli krawędzie są dodawane do grafu dwudzielnego, można pokazać instancję, dla której dowolny algorytm zachowujący maksymalne skojarzenie wykonuje  $\Omega(n^2)$  zmian. Dlatego rozsądne jest, aby przestać wymuszać skojarzenie każdego klienta i zaakceptować przybliżone rozwiązania. Tak więc chcemy przybliżyć rozmiar maksymalnego skojarzenia, a nie liczbę zmian skojarzeń. Trzeba też pamiętać, że trywialny algorytm zachowujący maksymalne skojarzenie jest  $1/2$ -aproksymacyjny i w ogóle nie zmienia skojarzenia. Algorytm Neimana i Solomona [94] jest  $2/3$ -aproksymacyjny i działa w czasie  $\mathcal{O}(\sqrt{m})$  na aktualizację. Gupta i Peng [57] zaprezentowali  $(1 - \varepsilon)$ -aproksymacyjny algorytm działający w czasie  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}\sqrt{m})$  na aktualizację. Bariera  $\mathcal{O}(\sqrt{m})$  została złamana przez Bernsteina i Steina [16], którzy przedstawili  $(2/3 - \varepsilon)$ -aproksymacyjny algorytm, osiągający czas aktualizacji równy  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2.5}m^{1/4})$ . Ostatecznie,  $(1 - \varepsilon)$ -aproksymacyjny algorytm działający w całkowitym czasie równym  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}m)$  pokazany został w [C1] (zobacz Twierdzenie 27) w modelu, gdy wierzchołki są dodawane po jednej stronie grafu dwudzielnego. Sankowski [103] zaprezentował losowy algorytm w modelu dynamicznym zachowujący dokładny rozmiar maksymalnego skojarzenia z czasem aktualizacji równym  $\mathcal{O}(n^{1.495})$ . Wynik ten nie implikuje żadnych ograniczeń na liczbę zmian w skojarzeniu, ponieważ używa on technik algebraicznych, które nie są oparte na rozszerzaniu ścieżek.

**C.2. Algorytm najkrótszych ścieżek powiększających.** Technika ścieżek powiększających jest jedną z najbardziej podstawowych technik stosowanych do znajdowania maksymalnego skojarzenia czy też przepływu. Polega ona na rozszerzeniu bieżącego rozwiązania wzdłuż ścieżek rezydualnych, dopóki nie zostanie znaleziony maksymalny rozmiar skojarzenia lub odpowiednio przepływu. Intuicyjnie, potrzebna do tego praca będzie zminimalizowana, jeśli za każdym razem wybierze się najkrótszą ścieżkę powiększającą. W szczególności, była to kluczowa koncepcja, która pozwoliła w 1972 roku Edmondsowi i Karpowi [31] pokazać pierwszy algorytm silnie wielomianowy dla problemu maksymalnego przepływu. Od tego czasu technika ta jest szeroko stosowana. Co zaskakujące, pomimo wielu wysiłków, nadal nie jest ona dobrze zrozumiana także w przypadku problemu inkrementalnego skojarzenia w grafach dwudzielnych. Używając terminologii z Podsekcji C.1, algorytm *najkrótszych ścieżek powiększających* jest algorytmem inkrementalnym, który minimalizuje liczbę realokacji dla każdej tury. Innymi słowy, dla każdej tury  $t \in [n]$  różnica symetryczna starego i nowego skojarzenia  $M_{t-1} \oplus M_t$  tworzy najkrótszą ścieżkę powiększającą od nowo przedstawionego klienta  $c_t$  do jakiegoś nieskojarzonego serwera  $s$ . Trudności z algorytmem najkrótszych ścieżek powiększających mogą wynikać z faktu, że najkrótsze ścieżki powiększające nie mają wystarczająco silnej struktury, pozwalającej na dokładną analizę. Łatwiejsze do analizy są inne metody wyboru ścieżek powiększających takie, jak na przykład algorytm rangowy (patrz w [C1] i Podsekcja C.1), czy też algorytm Chaudhuriego i innych [23] dla drzew, dla którego decyzja, którą ścieżkę wybrać, bardzo silnie wynika ze struktury drzewa.<sup>24</sup> Niemniej jednak, istnieją wyniki dotyczące algorytmu najkrótszych ścieżek powiększających. Grove i inni w [55] badali specjalny przypadek, w którym każdy klient może połączyć się z co najwyżej dwoma serwerami. W takim scenariuszu autorzy udowodnili, że algorytm najkrótszych ścieżek powiększających wykonuje  $\mathcal{O}(n \log n)$  zmian i że żaden algorytm nie może zrobić nic lepszego. Chaudhuri i inni [23] pokazali, że algorytm najkrótszych ścieżek powiększających w sumie generuje  $\mathcal{O}(n \log n)$  zmian w przypadku ogólnym grafu dwudzielnego,

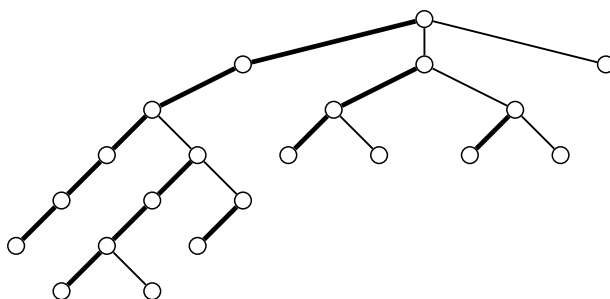
<sup>24</sup>W tym ograniczonym przypadku autorzy [23] zaproponowali algorytm, który osiąga całkowitą liczbę zmian równą  $\mathcal{O}(n \log n)$ , ale dotyczy to wyłącznie drzew.

pod warunkiem, że klienci przybywają w losowej kolejności. Z drugiej strony, najlepszym znanym dolnym ograniczeniem jest  $\Omega(n \log n)$ , co dotyczy również ścieżek prostych.<sup>25</sup> Chaudhuri i inni [23] zadali pytanie czy  $\mathcal{O}(n \log n)$  jest także górnym ograniczeniem na sumaryczną liczbę zmian w problemie inkrementalnego skojarzenia w grafach dwudzielnych. Jest to główne pytanie w tej tematyce chociażby dlatego, że odpowiedź twierdząca zamykałaby omawiany problem. Pomimo to nie było żadnego lepszego ograniczenia niż  $\mathcal{O}(n^2)$ , nawet dla drzew.

W [C2] z Leniowskim, Sankowskim i Zych-Pawlewicz przedstawiliśmy pierwszy nietrywialny postęp w rozwiązaniu powyższego przypuszczenia w przypadku dla drzew.

**Twierdzenie 32** (Twierdzenie 1 w [C2]). *Całkowita długość ścieżek zastosowanych przez algorytm najkrótszych ścieżek powiększających na drzewach wynosi  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ .*

Idea dowodu powyższego twierdzenia bazuje na ciężko-lekkim rozkładzie drzew wprowadzonym przez Sleatora i Tarjana [106]. Dla ukorzonego drzewa oryginalna technika dzieli krawędzie na ciężkie i lekkie, w zależności od tego, czy rozmiar poddrzewa jest ściśle większy niż połowa rozmiaru poddrzewa ukorzonego w rodzicu (patrz Rysunek 14).<sup>26</sup> Ze względu na wymagania



RYSUNEK 14. Rozkład ciężko-lekki — ciężkie ścieżki oznaczono pogrubioną linią.

dotyczące rozmiaru, za każdym razem, gdy podążając od korzenia ku jakiemuś liściu pokonujemy lekką krawędź, rozmiar bieżącego poddrzewa zmniejsza się co najmniej o połowę. Innymi słowy, dla każdego wierzchołka  $v$ , istnieje maksymalnie  $\log_2 n$  lekkich krawędzi na prostej ścieżce od korzenia do  $v$ . Zauważmy dodatkowo, że każdy wierzchołek może mieć co najwyżej dwie incydentne ciężkie krawędzie, co powoduje, że ciężkie krawędzie tworzą ścieżki rozłączne wierzchołkowo. Co więcej, ścieżki, mimo że są liczne, są o wiele prostszymi strukturami niż dowolne drzewo, dzięki czemu pozwalają na bardziej dokładniejszą analizę. Dowód Twierdzenia 32 uzyskuje się poprzez zastosowanie rozkładu ciężko-lekkiego w połączeniu z techniką amortyzacji za pomocą księgowania, które przypisuje specjalnie skonstruowane ścieżki powiększające do ciężkich ścieżek w drzewie.

Ostatnio Bernstein i inni [15] rozszerzyli Twierdzenie 32 na klasę wszystkich grafów dwudzielnych. Wykazano, że sumaryczna długość ścieżek zastosowanych przez algorytm najkrótszych ścieżek powiększających w grafie dwudzielnym jest rzędu co najwyżej  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ . Wynik ten prawie zamyka hipotezę Chaudhuriego i innych [23]. Użyte przez autorów techniki nie dają jednak szansy na osiągnięcie ograniczenia  $\mathcal{O}(n \log n)$  nawet w przypadku dla drzew. W [C3] z Leniowskim, Sankowskim i Zych-Pawlewicz udowodniliśmy powyższą hipotezę dla drzew zamykając w ten sposób omawiany problem dla tej klasy grafów.

<sup>25</sup>Jak wspomniano powyżej, strategia ta polega na umiejętnym łączeniu ścieżek prostych o tej samej długości.

<sup>26</sup>Dla wygody w [C2] używamy nieznacznie zmodyfikowanej wersji. Dodatkowo narzucamy, że każdy węzeł wewnętrzny wybiera dokładnie jedną ciężką krawędź. Wybrana krawędź ma prowadzić do dziecka, które ma największą liczbę potomków.

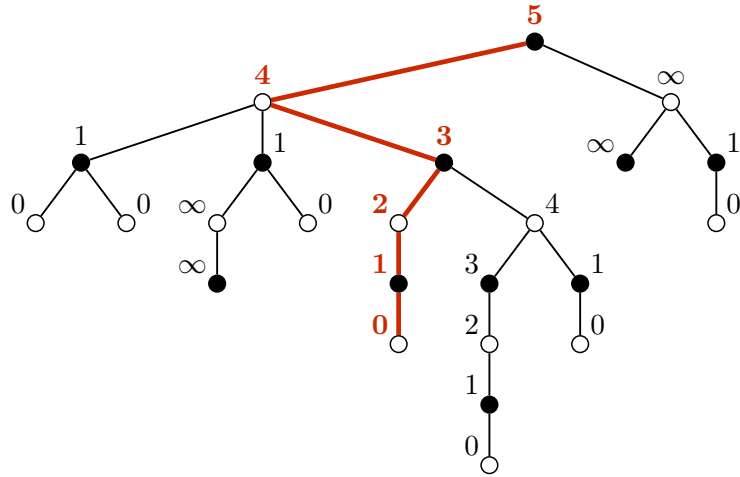
**Twierdzenie 33** (Twierdzenie 1 w [C3]). *Sumaryczna długość ścieżek zastosowanych przez algorytm najkrótszych ścieżek powiększających na drzewach wynosi  $\mathcal{O}(n \log n)$ .*

Ponieważ pełny dowód Twierdzenia 33 zawiera prawie 20 stron, zostaną przedstawione jedynie główne idee użyte w dowodzie. Podstawowym pomysłem leżącym u podstaw dowodu powyższego twierdzenia i wszystkich rozumowań opisanych poniżej jest subtelna zmiana modelu. Z faktu, że w danej turze trudno wyciągnąć wnioski z już skonstruowanego skojarzenia, założmy, że w każdym momencie dane skojarzenie jest najgorsze z możliwych. W odniesieniu do definicji z powyższego rozdziału przyjmujemy, że tak jak poprzednio, graf  $G = \langle S, C, E \rangle$  jest podawany przez prezentowanie klientów w kolejności  $c_1 \ll c_2 \ll \dots \ll c_n$  wraz z informacją na temat, które serwery sąsiadują z prezentowanym klientem. Różnica w stosunku do oryginalnego problemu inkrementalnego skojarzenia polega na tym, że tym razem w turze  $t$ , skojarzenie  $M_{t-1} \subseteq E[S \cup C_{t-1}]$ , które jest rezultatem algorytmu z kroku  $t - 1$ , jest podmienione na nowe skojarzenie  $M'_{t-1} \subseteq E[S \cup C_{t-1}]$  i jest ono prezentowane wraz z klientem  $c_t$ . Celem algorytmu jest przebudowanie nowo zaprezentowanego skojarzenia  $M'_{t-1}$  do skojarzenia  $M_t$  tak, aby skojarzyć klienta  $c_t$ . Tak samo jak w przypadku oryginalnego problemu inkrementalnego skojarzenia, i tym razem koszt algorytmu to sumaryczna liczba zmian, tzn.  $|M'_0 \oplus M_1| + |M'_1 \oplus M_2| + \dots + |M'_{n-1} \oplus M_n|$ . Wydaje się, że utrudnia to zadanie algorytmu, ale za to znacznie upraszcza analizę. W takim modelu musimy ograniczyć długość najkrótszej ścieżki w najgorszym przypadku skojarzenia  $M'_{t-1}$  dla grafu  $G[S \cup C_t]$ . Zaletą tej sytuacji jest to, że takie „najgorsze skojarzenie” zależy jedynie od grafu  $G[S \cup C_t]$  z wyznaczonym klientem  $c_t$ , a nie od wcześniejszego zachowania algorytmu. Pozwala to, opierając się wyłącznie na właściwościach grafu  $G[S \cup C_t]$ , analizować najkrótszą ścieżkę, na przykład, ograniczyć długość najkrótszej ścieżki przez długość jakiejś innej ścieżki powiększającej. Tę odmianę problemu inkrementalnego skojarzenia w grafach dwudzielnych nazywamy wersją z *niepomysłnym skojarzeniem*.<sup>27</sup>

Zastanówmy się, jakie może być najgorsze skojarzenie. Pomyślmy o grze, w której algorytm wybiera przebieg najkrótszej ścieżki powiększającej, a przeciwnik wybiera skojarzenie w ten sposób, aby konstruowana ścieżka była jak najdłuższa. Rozważmy drzewo  $G[S \cup C_t]$  oraz nowo przedstawiony wierzchołek  $c_t$ . Zakładamy, że  $c_t$  nie jest skojarzony, abyśmy modelowali najgorszy przypadek skojarzenia w drzewie  $G[S \cup C_{t-1}]$  przed rozszerzeniem tego skojarzenia o klienta  $c_t$ . Gra rozpoczyna się w wierzchołku  $c_t$ , gdzie algorytm wybiera, od której nieskojarzonej krawędzi incydentnej do  $c_t$  ma się rozpocząć konstruowana ścieżka alternująca. Następnie algorytm natrafia na serwer, po którym musi podążać za skojarzoną krawędzią wybraną przez przeciwnika. Gra toczy się dalej, dopóki nie zostanie osiągnięty liść (klient lub serwer, przy czym klient oznacza, że algorytm nie znalazł ścieżki). Nietrudno zauważyć, że algorytm, jeśli ma wybór, chce zminimalizować odległość do nieskojarzonego serwera, podczas gdy przeciwnik próbuje go zmaksymalizować. W ten sposób otrzymujemy grę dwuosobową, w której wynikiem jest długość najkrótszej ścieżki powiększającej. Jeśli ścieżka kończy się na skojarzonym kliencie, to długość takiej ścieżki definiujemy jako nieskończoność. Przykład ilustrujący obliczenie wartości minimaksowej przedstawiono na Rysunku 15, a sformalizowanie tej koncepcji przedstawiono w Definicji 1. w pracy [C3].

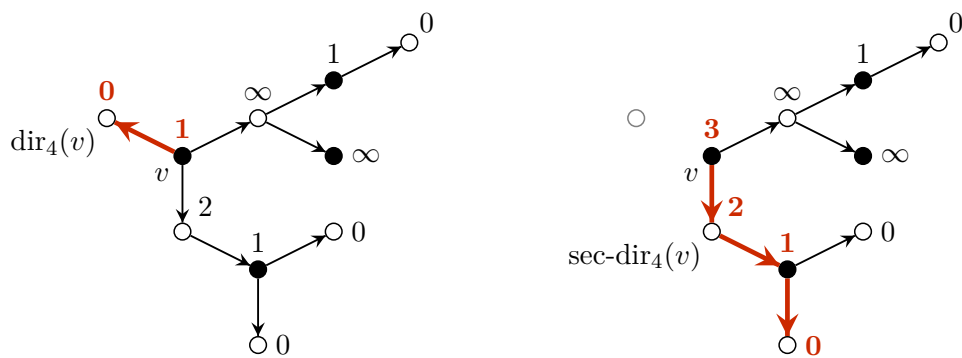
Trudność związana z pojęciem minimaksowym polega na tym, że oblicza się ją dla drzewa ukorzenionego, tzn. zakłada się, że ścieżka powiększająca zawsze będzie podążać w kierunku jakiegoś liścia, gdzie korzeń jest niezmiennie ustalony. Oczywiście nie musi to być prawda. Jedną z możliwości może być rozważenie dowolnego położenia korzenia w drzewie, co byłoby

<sup>27</sup>Ponieważ dowód Twierdzenia 32 nie zależy od struktury skojarzenia, rozumowanie przedstawione w [C2] może być łatwo przetłumaczone na wersję z niepomysłnym skojarzeniem. Co więcej, Bernstein i inni [15] niezależnie zastosowali wersję z niepomysłnym skojarzeniem, aby udowodnić wyżej wspomniane ograniczenie  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$  dla klasy wszystkich grafów dwudzielnych. Podobnie jak w przypadku Twierdzenia 33, użycie tej wersji problemu jest niezbędną częścią dowodu.



RYSUNEK 15. Przykład ukorzonego drzewa minimaxowego. Czarne wierzchołki reprezentują klientów, a białe wierzchołki reprezentują serwery.

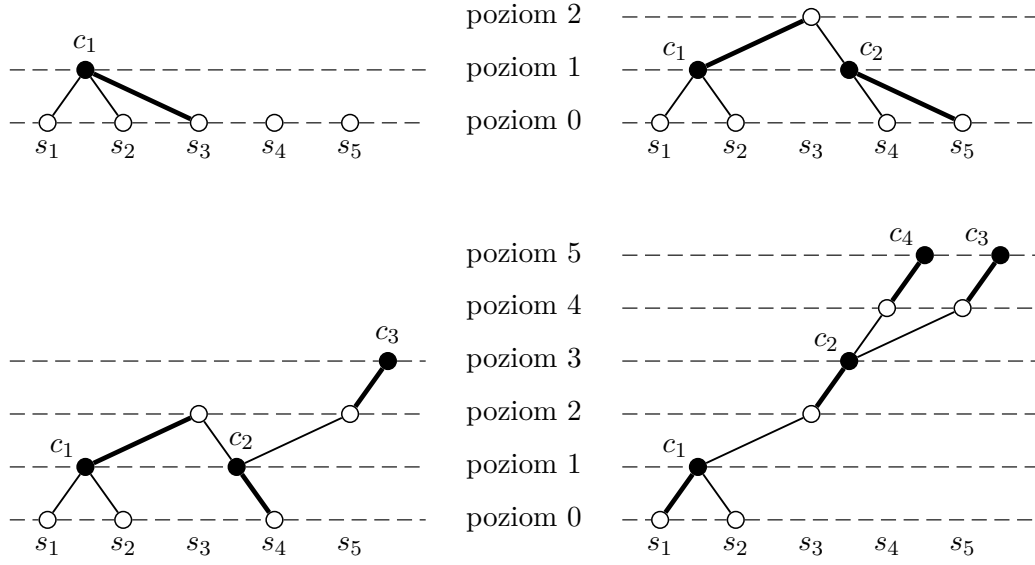
dość trudne. Warto jednak zauważyć, że dla danego wierzchołka  $v$  mogą wystąpić co najwyżej dwie różne wartości minimaksowe. Aby to zrozumieć, rozważmy kilka sposobów umieszczenia korzenia w drzewie, które zawiera dany wierzchołek  $v$ . Jeśli wierzchołek  $v$  jest korzeniem, to ekstremalna wartość  $v$  (maksymalna w przypadku serwera i minimalna w przypadku klienta) jest osiągana dzięki pewnemu dziecku  $u$ . Jeśli dla innej lokalizacji korzenia w drzewie, wierzchołek  $u$  jest nadal dzieckiem wierzchołka  $v$ , wówczas wartość minimaksowa nie zmienia się. Wartość minimaksowa, uzyskana w powyższy sposób, została nazwana *dystansem* wierzchołka  $v$ . Jednak może zaistnieć taka lokalizacja korzenia w drzewie, w którym zamieniają się role wierzchołków  $v$  i  $u$ , tzn. wierzchołek  $u$  stanie się rodzicem wierzchołka  $v$ . Wtedy wartość minimaksowa będzie drugą najlepszą wartością, tzn. zostanie wzięta od sąsiada  $v$ , pomijając wartość z  $u$ . Ta wartość nazywamy *drugim dystansem* wierzchołka  $v$ . Przykład ilustrujący obliczanie dystansu i drugiego dystansu przedstawiono na Rysunku 16, a sformalizowanie tej koncepcji można znaleźć w Definicji 2. w [C3].



RYSUNEK 16. Przykład dystansu minimaxowego dla wierzchołka  $v$  w turze 4. Wierzchołki  $\text{dir}_4(v)$  i  $\text{sec-dir}_4(v)$  są kolejnymi wierzchołkami na ścieżkach świadczących o odpowiednio dystansie i drugim dystansie wierzchołka  $v$ .

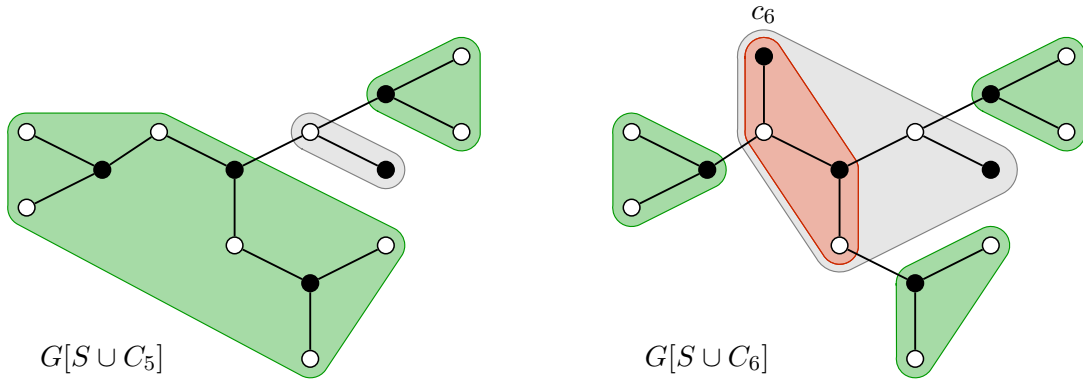
Kluczowym pojęciem dowodu jest *poziom* wierzchołek zdefiniowany jako dystans w przypadku klientów i drugi dystans w przypadku serwerów. Poziomy mają kilka użytecznych właściwości. Po pierwsze, poziomy są monotoniczne w czasie (patrz Rysunek 17). Inną użyteczną właściwością

jest to, że wierzchołki leżące na ścieżce, która świadczy o dystansie klienta, mają poziomy równy odległości do końca tej ścieżki, tzn. do nieskojarzonego serwera.



RYSUNEK 17. Poziomy

Dla danej liczby naturalnej  $l$  analizujemy spójne składowe grafu indukowanego przez wierzchołki, dla których poziom wynosi co najmniej  $l$ . Naiwną próbą udowodnienia logarytmicznego górnego ograniczenia polegałoby na tym, że jeżeli połączą się ze sobą dwie spójne składowe, to mniejsza składowa zawsze płaciłaby za ścieżkę powiększającą. Powodem, dla którego to nie może działać, jest to, że koncepcja spójnych składowych jest nieodpowiednia dla tego problemu. Celem nie jest znalezienie dowolnej ścieżki między dwoma wierzchołkami, ale ścieżki, która byłaby skonstruowana z krawędzi na przemian należących do skojarzenia oraz spoza niego. Główną przeszkodą w istnieniu takiej ścieżki powiększającej są tzw. *martwe* wierzchołki, tzn. wierzchołki zbioru  $C' \cup N(C')$ ,<sup>28</sup> gdzie  $|C'| \geq |N(C')|$  oraz  $C' \subseteq C$  (patrz Rysunek 18).



RYSUNEK 18. Wierzchołki, które umierają w turze 6. Zielone obszary opisują żywe wierzchołki, szare obszary opisują martwe wierzchołki, a czerwone te wierzchołki, które umierają w turze 6.

Poziom martwych wierzchołków równa się nieskończoności, to znaczy, że nie istnieją ścieżki powiększające, która przechodziłaby przez tę martwą część. Ze względu na to, że poziomy

<sup>28</sup>  $N(X)$  oznacza zbiór wszystkich sąsiadów wierzchołków z  $X$ .

rosną w czasie, mamy dwa różne procesy. Z jednej strony spójne składowe łączą się, tworząc większe składowe. Z drugiej strony żywe fragmenty<sup>29</sup> spójnych składowych rozpadają się na mniejsze fragmenty. Gdyby istniał tylko jeden z tych procesów, dowód byłby znacznie prostszy. Rozwiązaniem tego problemu jest subtelne przełączanie się pomiędzy tymi dwoma sytuacjami. Dlatego główną częścią tego dowodu jest równoległe użycie metody amortyzacji dla tych dwóch wyżej opisanych procesów, które reprezentują odpowiednio Lematy 16. oraz 17. w [C3].

## 5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

### I. WAŻONA WYBIERALNOŚĆ HIPERGRAFÓW ZORIENTOWANYCH

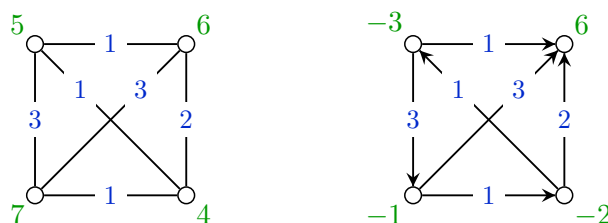
[D1] Marcin Anholcer, Bartłomiej Bosek, Jarosław Grytczuk.

Weight Choosability of Oriented Hypergraphs.

*ARS Mathematica Contemporanea*, 16 (1), 111–117, 2019.

<https://doi.org/10.26493/1855-3974.1317.745>

Słynna Hipoteza 1-2-3, postawiona przez Karońskiego, Łuczaka i Thomasona [70], orzeka, że w każdym prostym grafie (bez izolowanych krawędzi) można przypisać krawędziom którąś z wag 1, 2, 3 tak, że nie ma dwóch sąsiednich wierzchołków z tym samym ważonym stopniem, patrz Rysunek 19. Ten problem pozostaje otwarty ponad dziesięć lat, pomimo poważnych



RYSUNEK 19. Wersja niezorientowana (po lewej) oraz zorientowana (po prawej) Hipotezy 1-2-3.

prób rozwiązania opartych na różnych technikach, w tym Kombinatorycznym Nullstellensatz Alona [4] (patrz w [10, 98, 121]). Kalkowski, Karoński i Pfender w [68] zaprezentowali jak dotąd najlepszy wynik potwierdzając powyższą hipotezę w przypadku, gdy zbiór dopuszczalnych wag obejmuje także 4 i 5. Istnieje również wiele wariantów uwzględniających wersje: listową (Bartnicki *i inni* [10]), orientacje (Baudon *i inni* [11] oraz Borowiecki *i inni* [18]) i ostatnio hipergrafy (Kalkowski *i inni* [69]). Wiadomo na przykład, że w każdym zorientowanym grafie można przypisać wagi 1 oraz 2 krawędziom tak, że ważne stopnie wyjściowe są różne dla każdej pary sąsiednich wierzchołków [10, 72].

W artykule [D1] z Anholcerem i Grytczukiem rozważamy listową wersję Hipotezy 1-2-3 dla zorientowanych hipergrafów. Przypomnijmy, że *hipergraf* jest parą  $H = \langle V, \mathcal{E} \rangle$ , w której  $V$  to dowolny zbiór, a  $\mathcal{E}$  to rodzina podzbiorów  $V$ , tzn.  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(V)$ . Elementy  $V$  nazywamy *wierzchołkami*, a elementy  $\mathcal{E}$  *krawędziami* lub zamiennie *hiperkrawędziami*. Hipergraf jest *k-jednorodny* jeżeli każda jego krawędź jest rozmiaru  $k$ . Tak więc, 2-jednorodny hipergraf to graf prosty.

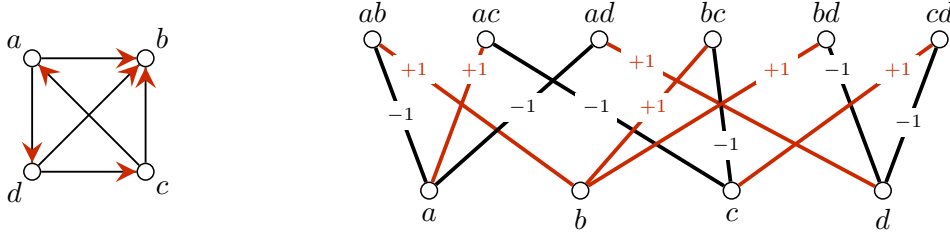
Niech  $I_H$  oznacza *graf incydencji* hipergrafu  $H$ , czyli graf dwudzielny z klasami  $V$  i  $\mathcal{E}$ , których krawędzie mają postać  $ve$ , o ile  $v \in e$ , gdzie  $v \in V$ ,  $e \in \mathcal{E}$ . Przez *orientację* hipergrafu  $H$  mamy na myśli dowolną funkcję  $\mu : E(I_H) \rightarrow \mathbb{C}$  przypisującą krawędziom grafu incydencji  $I_H$  niezerowe

<sup>29</sup>Zbiór wierzchołków, które nie są martwe.

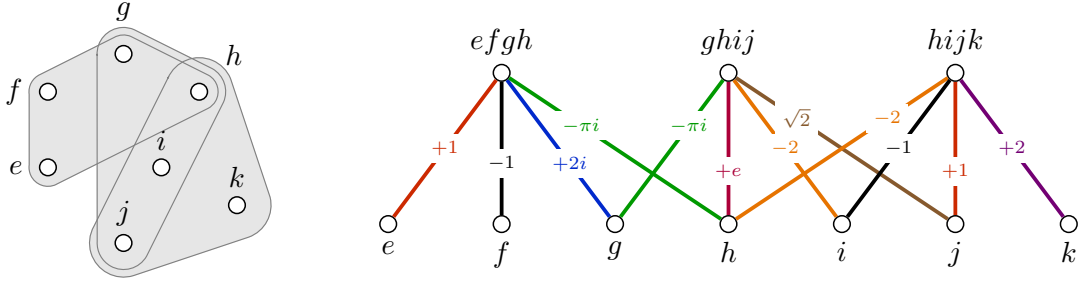
liczby zespolone. *Skumulowany stopień* wierzchołka  $v \in V$  jest zdefiniowany jako

$$D_v = \sum_{e \ni v} \mu(ev).$$

Jeśli zakres odwzorowania  $\mu$  ograniczy się do zbioru  $\{-1, +1\}$ , lub bardziej ogólnie, do zbioru zespolonych pierwiastków jedynki, wówczas uzyskujemy naturalne uogólnienie tradycyjnej orientacji grafu prostego, patrz Rysunki 20 i 21. Powyższa definicja uogólnia tę używaną w [100, 101]. Orien-



RYSUNEK 20. Zorientowany graf. Po prawej stronie znajduje się graf incydencji z orientacją  $\mu_e : \{ev : v \in e\} \rightarrow \{-1, 1\}$ .



RYSUNEK 21. Zorientowany  $k$ -jednorodny hipergraf. Po prawej znajduje się graf incydencji z orientacją  $\mu_e : \{ev : v \in e\} \rightarrow \{-1, 1, \sqrt{2}, -2, 2i, 2, e, -\pi i\}$ .

tację  $\mu$  jest wygodnie reprezentować za pomocą *macierzy zorientowanej incydencji*  $X = [\mu_{ev}]$  wymiaru  $|\mathcal{E}| \times |V|$ , gdzie  $\mu_{ev} = \mu(ev)$ , jeśli  $ev \in E(I_H)$ , oraz  $\mu_{ev} = 0$ , w przeciwnym przypadku. Przez *zorientowany hipergraf* rozumiemy hipergraf  $H$  wraz z pewną ustaloną orientacją  $\mu$ .

Założmy, że każda krawędź  $e \in \mathcal{E}$  zorientowanego hipergrafu  $\langle H, \mu \rangle$  ma przypisaną zespoloną wagę  $w_e$ . Wtedy *ważony stopień* wierzchołka  $v \in V$  jest obliczany jako

$$W_v = \sum_{e \ni v} \mu_{ev} w_e.$$

Dla każdego  $e \in \mathcal{E}$  definiujemy dodatkowo

$$W_e = \sum_{v \in e} \mu_{ev}^* W_v,$$

gdzie  $x^*$  oznacza sprzężenie zespolone liczby  $x$ . Zwróćmy uwagę, że w przypadku zwykłego zorientowanego grafu,  $W_e$  jest dokładnie różnicą między ważonymi stopniami obu końców  $e$ . Mówimy, że przypisanie do wierzchołków skierowanego hipergrafu  $\langle H, \mu \rangle$  wag  $w$  jest *cnotliwe*, jeśli dla każdej krawędzi  $e \in \mathcal{E}$  mamy

$$W_e \neq 0.$$

Założmy, że lista liczb zespolonych  $L_e$  jest przypisana do każdej krawędzi  $e \in \mathcal{E}$ . Mówimy, że zorientowany hipergraf  $H$  jest *wagowo  $t$ -wybieralny*, jeśli dla każdej listy spełniającej  $|L_e| \geq t$  jesteśmy w stanie wybrać wagi  $w_e \in L_e$  tak, że  $w$  jest cnotliwym ważeniem  $H$ . W [D1] wraz z Anholcerem oraz Grytczukiem rozszerzyliśmy wyniki z prac [10] i [72] w następujący sposób.

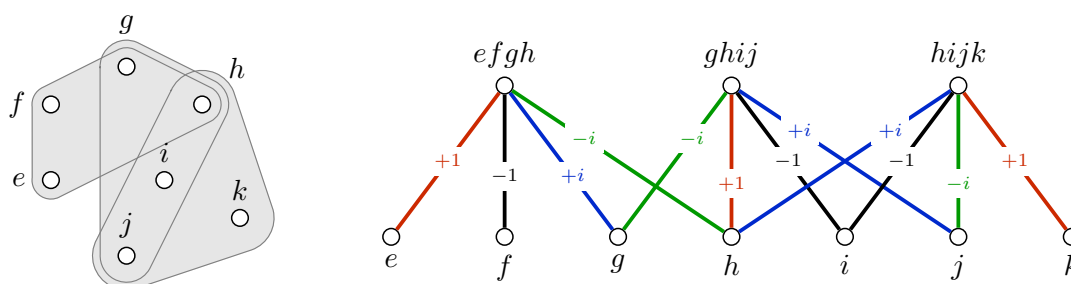


**Twierdzenie 34** (Twierdzenie 1.1. w [D1]). *Każdy zorientowany hipergraf jest wagowo 2-wybieralny.*

Dowód tego twierdzenia bazuje na Kombinatorycznym Nullstellensatz Alona [4] i Twierdzeniu Schura [104] i był zainspirowany podejściem zastosowanym w [72].

W [D1] podajemy dwie aplikacje Twierdzenia 34 rozszerzające niektóre wyniki z [10, 18, 72]. Dla uproszczenia ograniczamy się do jednorodnych hipergrafów z *kanoniczną* orientacją zdefiniowaną następująco. Niech  $k \geq 2$  będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą i niech  $U_k$  oznacza multiplikatywną grupę  $k$ -tego zespolonego pierwiastka jedynek. Jeśli  $\varepsilon$  jest pierwiastkiem pierwotnym w  $U_k$ , to możemy napisać że  $U_k = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}\}$ .

Niech  $H$  będzie  $k$ -jednorodnym hipergrafen. Rozważmy orientację kanoniczną hipergrafu  $H$  podaną przez odwzorowanie  $\mu : E(I_H) \rightarrow U_k$  takie, że  $\mu(ev) \neq \mu(eu)$  dla każdej krawędzi  $e \in \mathcal{E}$  i dowolnych dwóch różnych wierzchołków  $v, u \in e$ , patrz Rysunki 20 i 22. Zauważmy, że dla  $k = 2$



RYSUNEK 22. Kanonicznie zorientowany  $k$ -jednorodny hipergraf. Po prawej stronie znajduje się graf incydencji wraz z kanoniczną orientacją  $\mu_e : \{ev : v \in e\} \rightarrow \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}\}$ , która dla dowolnej krawędzi  $e \in \mathcal{E}(H)$  jest bijekcją prowadzącą do zbioru  $k$ -tych zespolonych pierwiastków z jedynek.

otrzymujemy tradycyjną orientację grafu prostego. Przypomnijmy, że kolorowanie wierzchołków hipergrafu jest *poprawne*, jeśli każda krawędź nie jest monochromatyczna.

**Wniosek 35** (Wniosek 3.1. w [D1]). *Każdy kanonicznie zorientowany  $k$ -jednorodny hipergraf  $H$  ma ważenie krawędzi za pomocą liczb 1 oraz 2 takie, że ważone stopnie wierzchołków tworzą właściwe kolorowanie  $H$ .*

**Wniosek 36** (Wniosek 3.2. w [D1]). *Każdy  $k$ -jednorodny hipergraf  $H$  ma orientację kanoniczną taką, że skumulowane stopnie wierzchołków tworzą właściwe kolorowanie  $H$ .*

## II. GRY LOKALIZACYJNE

[D2] Bartłomiej Bosek, Przemysław Gordinowicz, Jarosław Grytczuk, Nicolas Nisse, Joanna Sokół, Małgorzata Śleszyńska-Nowak.

Localization game on geometric and planar graphs.

*Discrete Applied Mathematics*, 251, 30–39, 2018.

<https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.04.017>

[D3] Bartłomiej Bosek, Przemysław Gordinowicz, Jarosław Grytczuk, Nicolas Nisse, Joanna Sokół, Małgorzata Śleszyńska-Nowak.

Centroidal Localization Game.

*Electronic Journal of Combinatorics*, 25 (4), P4.62, 2018.

<https://www.combinatorics.org/v25i4p62>

Jednym z istotnych problemów w grafie  $G = \langle V, E \rangle$  jest zlokalizowanie (niewidocznej) ruchomej jednostki za pomocą detektorów odległości umieszczonych w strategicznych lokalizacjach w  $G$ .

*Wymiar metryczny* grafu  $G$  to minimalna liczba  $k$  detektorów umieszczonych w pewnych wierzchołkach  $c_1, \dots, c_k$  w taki sposób, że wektor  $(d_1, \dots, d_k)$  odległości  $d_i = d(c_i, r)$  pomiędzy detektorami a lokalizacją jednostki  $r$  pozwala jednoznacznie określić  $r$  dla każdego  $r \in V$ .

W [D2], z Gordinowiczem, Grytczukiem, Nisse, Sokół oraz Śleszyńską-Nowak, rozważamy problem wymiaru metrycznego w następującej wersji rozgrywanej. Niech  $G = \langle V, E \rangle$  będzie prostym spójnym nieskierowanym grafem i niech  $k \geq 1$  będzie liczbą całkowitą. *Gra lokalizacyjna* rozgrywa się pomiędzy dwoma graczami: *Drużyną k policjantów* oraz *Złodziejem*. Toczy się ona w następujący sposób. W pierwszej rundzie Złodziej wybiera wierzchołek  $r \in V$  nieznaną dla Policjantów (w grze lokalizacyjnej Złodziej jest *a priori* „niewidzialny”). Następnie, za każdym razem, najpierw Policjanci wybierają  $k$  wierzchołków  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , a w zamian otrzymują ciąg nieujemnych liczb całkowitych  $d(r, c_1), d(r, c_2), \dots, d(r, c_k)$ , gdzie  $d(r, c_i)$  to odległość w grafie  $G$  od  $r$  do  $c_i$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots, k$ . Jeśli Policjanci potrafią określić pozycję Złodzieja bazując na  $d(r, c_1), d(r, c_2), \dots, d(r, c_k)$  (tzn.  $r$  jest jednoznacznie zdefiniowane przez  $d(r, c_1), d(r, c_2), \dots, d(r, c_k)$  i wiedzy, którą Policjanci uzyskali w poprzednich rundach), wtedy Policjanci wygrywają. Zwróćmy uwagę na to, że  $r$  nie musi być jednym z  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . W przeciwnym razie Złodziej może przenieść się do sąsiedniego wierzchołka  $r' \in N(r) \cup \{r\}$  (nieznanego przez Policjantów), a następnie, podczas następnej rundy, Policjanci mogą ponownie wybrać inny zestaw (lub taki sam)  $k$  wierzchołków, a jeśli Złodziej nie zostanie zlokalizowany to może przejść do sąsiada i tak dalej. Policjanci wygrywają, jeśli mogą precyzyjnie zlokalizować pozycję (okupowany wierzchołek) Złodzieja po skończonej liczbie rund (przed możliwym ruchem Złodzieja). W przeciwnym wypadku wygrywa Złodziej. Niech  $\zeta(G)$  oznacza najmniejszą liczbę całkowitą  $k$ , dla której Policjanci mają strategię wygrywającą, niezależnie od strategii Złodzieja (rozważamy najgorszy przypadek, w którym Złodziej *a priori* zna strategię Policjantów). Parametr grafu  $\zeta(G)$  nazywamy *liczbą lokalizacyjną* grafu  $G$ . Zauważmy, że ten parametr jest dobrze zdefiniowany, ponieważ nierówność  $\zeta(G) \leq |V|$  jest w oczywisty sposób spełniona.

Jednym z wariantów metrycznego wymiaru grafu jest sytuacja, w której każdy detektor nie otrzymuje dokładnej odległości od lokalizowanego obiektu. Zamiast tego, dane detektory odległości umieszczone w wierzchołkach  $c_1, \dots, c_k$ , dostają jedynie względne odległości między lokalizowanym obiektem, a detektorami (intuicyjnie, dla każdego  $1 \leq i, j \leq k$ , jest prezentowana informacja, czy  $d(c_i, r) >, <$ , lub  $=$  w stosunku do  $d(c_j, r)$ ). *Wymiar centroidalny* grafu  $G$  to minimalna liczba detektorów wymaganych do zlokalizowania dowolnego obiektu w powyższym modelu.

W [D3], z Gordinowiczem, Grytczukiem, Nisse, Sokół oraz Śleszyńską-Nowak, rozważamy wymiar centroidalny w wersji rozgrywanej, którą nazywamy *centroidalną grą lokalizacyjną*. Reguły są prawie identyczne z grą lokalizacyjną, z tą jedynie różnicą, że w tym wypadku jest dana jedynie kolejność odległości między bieżącymi położeniami Policjantów  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , a bieżącą lokalizacją Złodzieja  $r$ . Niech  $\zeta^*(G)$  będzie minimalnym  $k$  takim, że Złodziej ostatecznie zostanie znaleziony, cokolwiek nie zrobi na grafie  $G$ . Oczywistym jest to, że liczba lokalizacyjna grafu  $G$  jest ograniczona z góry przez  $\zeta^*(G)$ , tzn.  $\zeta(G) \leq \zeta^*(G)$ .

Z Gordinowiczem, Grytczukiem, Nisse, Sokół oraz Śleszyńską-Nowak, udowodniliśmy, że  $\zeta(T) \leq \zeta^*(T) \leq 2$  dla dowolnego drzewa  $T$  (Twierdzenie 6. w [D3]) oraz zaprezentowaliśmy górne ograniczenie na  $\zeta^*(G \square H)$  dla iloczynu kartezjańskiego grafów  $G$  i  $H$  (Twierdzenie 7. w [D3]). Głównym wynikiem [D3] jest ograniczenie  $\zeta(G) \leq \zeta^*(G) \leq 3$  dla dowolnego grafu zewnętrznie planarnego  $G$  (Twierdzenie 11. w [D3]). Co więcej, udowodniliśmy, że  $\zeta(G)$  i  $\zeta^*(G)$  są ograniczone odpowiednio przez  $\text{pathwidth}(G)$  (Propozycja 3. w [D2]) i  $\text{pathwidth}(G) + 1$  (Propozycja 5. w [D3]). Wyniki te mogą sugerować, że  $\zeta(G)$  jest ograniczona dla grafów o ograniczonej

szerokości drzewiastej. Udowodniliśmy jednak, że istnieją grafy planarne o szerokości drzewiastej 2 o nieograniczonej liczbie lokalizacyjnej  $\zeta(G)$  (Wniosek 9. w [D2]).

Co więcej, udowodniliśmy, że algorytmiczny problem znajdowania  $\zeta(G)$  i  $\zeta^*(G)$  jest NP-trudny w ogólnych grafach.<sup>30</sup> Na koniec pokazujemy, że przybliżenie (z dokładnością do małej stałej odległości) centroidalnej lokalizacji Złodzieja na płaszczyźnie euklidesowej wymaga co najwyżej dwóch wierzchołków na rundę (Lemat 17. w [D3]).

### III. ROZGRYWANE WIĘKSZOŚCIOWE KOLOROWANIE

[D4] Bartłomiej Bosek, Jarosław Grytczuk, Gabriel Jakóbczak.

Majority Coloring Game.

*Discrete Applied Mathematics*, 255, 15–20, 2019.

<https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.07.020>

Artykuł [D4] dotyczy pewnej odmiany kolorowania większościowego opisanego w Podrozdziale A.1 we Wskazaniu osiągnięcia habilitacyjnego. Przypomnijmy, że *kolorowanie większościowe* grafu jest kolorowaniem jego wierzchołków takim, że dla każdego wierzchołka  $v$ , co najmniej połowa sąsiadów  $v$  ma inny kolor niż  $v$ . Niech  $\mu(G)$  oznacza najmniejszą liczbę kolorów potrzebnych do kolorowania większościowego grafu  $G$ . Jest dobrze znane i łatwe do udowodnienia, że  $\mu(G) \leq 2$  dla każdego grafu  $G$ .

W [D4], z Grytczukiem oraz Jakóbczakiem, wprowadzamy rozgrywaną wersję kolorowania większościowego, zdefiniowaną jako dwuosobową grę o następujących zasadach. Planszą gry jest ustalony graf  $G$ . Dwoje graczy, Alicja i Bob, koloruje na przemian wierzchołki  $G$  używając ustalonego zestawu kolorów  $C$ . Alicja robi ruch jako pierwsza. Po każdym zaś ruchu częściowe kolorowanie musi spełniać warunek większościowy: dla każdego pokolorowanego wierzchołka  $v$  liczba sąsiadów w kolorze takim samym jak  $v$  wynosi co najwyżej  $\frac{1}{2}d(v)$ . Ta zasada zobowiązuje obu graczy. Alicja wygrywa, jeśli ostatecznie cały graf zostanie pokolorowany. Bob wygrywa, gdy pojawia się częściowe kolorowanie, którego nie można dalej rozszerzać bez naruszenia warunku większościowego. Niech  $\mu_g(G)$  oznacza najmniejszy rozmiar zbioru kolorów  $C$ , gwarantujący zwycięstwo Alicji. Wartość tą nazywamy *większościową rozgrywaną liczbą chromatyczną* grafu  $G$ .

Udowodniliśmy, że  $\mu_g(G)$  jest w ogólności nieograniczona (Twierdzenie 1. w [D4]). Z drugiej strony nietrudno zauważyć, że  $\mu_g(G)$  nie jest większe niż rozgrywana liczba kolorująca  $\text{col}_g(G)$  (Twierdzenie 2. w [D4]). Poprawiamy te oczywiste ograniczenie dla niektórych klas grafów. W szczególności udowodniliśmy, że  $\mu_g(T) \leq 3$  dla każdego pełnego drzewa binarnego  $T$  (Twierdzenie 3. w [D4]). Może to sugerować, że  $\mu_g(G)$  jest ograniczone dla grafów o ograniczonej liczbie kolorującej  $\text{col}(G)$ . Udowodniliśmy jednak, że w przeciwieństwie do tej intuicji,  $\mu_g(G)$  nie jest ograniczona dla grafów o  $\text{col}(G) = 3$  (Twierdzenie 5. w [D4]).

### IV. LESISTOŚĆ GRAFÓW

[D5] Tomasz Bartnicki, Bartłomiej Bosek, Sebastian Czerwiński, Michał Farnik, Jarosław Grytczuk, Zofia Miechowicz.

Generalized arboricity of graphs with large girth.

*Discrete Mathematics*, 342 (5), 1343–1350, 2018.

<https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.01.018>

Lesistość grafu  $G$  to najmniejsza liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania krawędzi  $G$  tak, aby żaden cykl nie był monochromatyczny. Rozważmy analog wyższego rzędu tego parametru wprowadzony ostatnio przez Nešetřila i innych [95]. Dla grafu  $G$  wartość  $\text{arb}_p(G)$  definiujemy

<sup>30</sup>Pierwszy wynik jest przedstawiony przez Twierdzenie 12. w [D2], a drugi przez Twierdzenie 15. w [D3].

jako najmniejszą liczbę kolorów potrzebnych do pokolorowania krawędzi  $G$  tak, aby każdy cykl  $C$  uzyskał co najmniej  $\min\{|C|, p+1\}$  kolorów. Tak więc,  $\text{arb}_1(G)$  jest typową lesistością grafu  $G$ , a  $\text{arb}_2(G)$  może być postrzegane jako rozluźniona wersja acyklicznego indeksu chromatycznego  $G$ .

Z wyników Nešetřila i innych [95] wynika, że  $\text{arb}_p(G)$  jest ograniczone dla klas grafów z ograniczoną ekspansją, pod warunkiem, że obwód grafów  $G$  jest wystarczająco duży (w zależności od  $p$ ). Używając bardziej bezpośredniego podejścia, w [D5] (z Bartnickim, Czerwińskim, Farnikiem, Grytczukiem oraz Miechowicz) uzyskaliśmy dokładne ograniczenia górne na  $\text{arb}_p(G)$  dla niektórych klas grafów. W szczególności udowodniliśmy, że  $\text{arb}_p(G) \leq p+1$  dla każdego grafu planarnego o obwodzie wynoszącym co najmniej  $2^{p+1}$  (Twierdzenie 2. w [D5]). Podobny wynik zachodzi dla grafów o dowolnym ustalonym genusie. Pokazujemy również, że  $\text{arb}_2(G) \leq 5$  dla grafów zewnętrznie planarnych (Twierdzenie 1. w [D5]), które jest najlepsze z możliwych (Propozycja 5. w [D5]). Co więcej, za pomocą metody kompresji entropii udowodniliśmy, że  $\text{arb}_p(G) \leq (\Delta - 1)p + 1$  dla grafów o maksymalnym stopniu  $\Delta$  i wystarczająco dużym obwodzie (Twierdzenie 5. w [D5]).

## V. UOGÓLNIENIA PROBLEMU GRAHAMA NAJWIĘKSZEGO WSPÓLNEGO DZIELNIKA.

[D6] Bartłomiej Bosek, Michał Dębski, Jarosław Grytczuk, Joanna Sokół, Małgorzata Śleszyńska-Nowak, Wiktor Żelazny.

Graph coloring and Graham's greatest common divisor problem.

*Discrete Mathematics*, 341 (3), 781–785, 2018.

<https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.11.006>

W [D6] (z Dębskim, Grytczukiem, Sokół, Śleszyńską-Nowak oraz Żelaznym) przedstawiamy i badamy dwa problemy związane z kolorowaniem grafów i odnosimy je do pewnych problemów teorio-liczbowych. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej  $k$  rozważamy graf  $B_k$ , którego zbiór wierzchołków jest zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, w którym dwa wierzchołki  $a, b$  są połączone krawędzią, wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby  $a/\text{nwd}(a, b)$  oraz  $b/\text{nwd}(a, b)$  są równe co najwyżej  $k$ . W pracy [D6] stawiamy hipotezę, że liczba chromatyczna każdego takiego grafu  $B_k$  jest równa dokładnie  $k$ . Pozytywna odpowiedź na powyższą hipotezę uogólniałaby rozwiązanie problemu Grahama o Największym wspólnym dzielniku [47] z 1970 roku, która w terminologii teorio-grafowej stwierdza, że liczba klikowa  $B_k$  równa się  $k$ .

Udowodniamy, że  $\chi(B_k) = k + o(k)$  (Wniosek 5. w [D6]). Co więcej, pokazujemy, że powyższe przypuszczenie można wyrazić jako problem kafelkowania kraty  $\mathbb{Z}^n$  (Twierdzenie 8. w [D6]). Na koniec pokazujemy, że nasze przypuszczenia są połączone z częściowymi uzupełnieniami kwadratów łacińskich (Sekcja 5. w [D6]).

## VI. ADDYTYWNE KOLOROWANIE GRAFÓW PLANARNYCH

[D7] Tomasz Bartnicki, Bartłomiej Bosek, Sebastian Czerwiński, Jarosław Grytczuk, Grzegorz Matecki, Wiktor Żelazny.

Additive Coloring of Planar Graphs.

*Graphs and Combinatorics*, 30 (5), 1087–1098, 2014.

<https://doi.org/10.1007/s00373-013-1331-y>

*Kolorowanie addytywne* grafu to przypisanie wierzchołkom dodatnich liczb całkowitych  $\{1, 2, \dots, k\}$  tak, aby dla dowolnych dwóch wierzchołków sumy liczb występujących na sąsiadach były różne. Minimalna liczba  $k$ , dla której istnieje addytywne kolorowanie grafu  $G$  jest oznaczona przez  $\eta(G)$ .

W [D7] (z Bartnickim, Czerwińskim, Grytczukiem, Mateckim oraz Żelaznym) udowodniliśmy, że  $\eta(G) \leq 468$  dla dowolnego grafu planarnego  $G$  (Twierdzenie 5 w [D7]). Poprawia to poprzednie

ograniczenie  $\eta(G) \leq 5544$  zaprezentowane przez S. Norina.<sup>31</sup> Dowód wykorzystuje Kombinatoryczne Nullstellensatz i liczbę kolorującą hipergrafów planarnych. Pokazujemy również, że  $\eta(G) \leq 36$  dla 3-kolorowalnych grafów planarnych (Twierdzenie 4 w [D7]) i  $\eta(G) \leq 4$  dla każdego grafu planarnego o obwodzie równym co najmniej 13 (Twierdzenie 6 w [D7]). W wersji teorii-grupowej powyższego problemu pokazujemy, że dla każdego  $r \geq 2$  istnieje graf  $r$ -kolorowalny  $G_r$  nie posiadający addytywnego kolorowania za pomocą elementów abelowej grupy rzędu  $r$  (Twierdzenie 7 w [D7]).

## VII. WYMIAR ONLINE

[D8] Bartłomiej Bosek, Kamil Kloch, Tomasz Krawczyk, Piotr Micek.

On-Line Dimension of Semi-Orders.

*Order*, 30 (2), 593-615, 2013.

<https://doi.org/10.1007/s11083-012-9264-2>

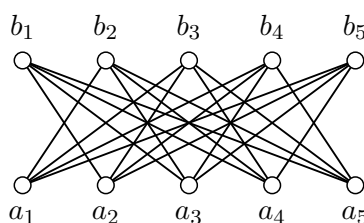
[D9] Bartłomiej Bosek, Kamil Kloch, Tomasz Krawczyk, Piotr Micek.

On-line version of Rabinovitch theorem for proper intervals.

*Discrete Mathematics*, 312 (23), 3426–3436, 2012.

<https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.02.008>

*Realizator* posetu  $P = \langle X, R \rangle$  to rodzina  $\{L_1, \dots, L_k\}$  liniowych rozszerzeń relacji częściowego porządku  $R$ , których przecięcie równe jest  $R$ , tzn.  $R = L_1 \cap \dots \cap L_k$ . Łatwo zauważyć, że każdy poset  $P = \langle X, R \rangle$  ma realizator, ponieważ rodzina wszystkich liniowych rozszerzeń relacji  $R$  przecina się do  $R$ . Dushnik i Miller [30] zdefiniowali *wymiar* posetu  $P$  jako najmniejszy rozmiar realizatora  $P$ .<sup>32</sup> Hiragushi [61] udowodnił, że dla każdego posetu wymiar jest równy co najwyżej szerokości. Nie da się lepiej, ponieważ standardowy przykład<sup>33</sup> ma wymiar równy szerokości. Füredi i inni [42] udowodnili, że wymiar każdego  $n$ -elementowego porządku przedziałowego



RYSUNEK 23. Standardowy przykład  $S_5$ .

jest rzędu  $\mathcal{O}(\log \log n)$ , a ponadto to ograniczenie jest asymptotycznie najlepsze z możliwych. Rabinovitch [99] z kolei udowodnił, że wymiar każdego porządku równoprzedziałowego wynosi co najwyżej 3 i to ograniczenie jest możliwie najlepsze.

Analogicznie do wersji online pokrycia łańcuchowego (jak omówiono w Podrozdziale B.2 we Wskazaniu osiągnięcia habilitacyjnego), można również rozważać wersję online wymiaru posetu. Prowadzi to do następującej definicji. *Online algorytm budujący realizator o rozmiarze  $d$*  jest deterministycznym algorytmem, który otrzymuje na wejściu poset  $P = \langle X, \leq \rangle$  w kolejności jego elementów  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  i utrzymuje realizator  $\{L_1, L_2, \dots, L_d\}$  posetu  $P$ . Dla

<sup>31</sup>Dowód Norina przedstawiony jest w postaci Twierdzenia 1 w [D7].

<sup>32</sup>Nazwa wynika z faktu, że wymiar posetu  $P$  można równoważnie zdefiniować jako minimalną liczbę naturalną  $d$  taką, że istnieje zbiór punktów w  $\mathbb{R}^d$  takich, że wraz z porządkiem po współrzędnych tworzy poset izomorficzny z  $P$ .

<sup>33</sup>Dla liczby całkowitej  $n \geq 2$ , *standardowy przykład*  $S_n$  to poset o wysokości 2 z minimalnymi elementami  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  i maksymalnymi elementami  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Ponadto  $a_i < b_j$  w  $S_n$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $i \neq j$  (patrz Rysunek 23).

każdej tury  $t = 1, 2, \dots, n$ , zwracany realizator ograniczony do  $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ , tzn.  $\{L_1|_{X_t}, L_2|_{X_t}, \dots, L_d|_{X_t}\}$ , zależy wyłącznie od posetu  $P$  oraz kolejność  $\ll$  zawężonych do  $X_t$ . Mówiąc mniej formalnie, realizator jest sekwencyjnie budowany przez algorytm. Po przedstawieniu nowego elementu  $x_t$  algorytm wstawia  $x_t$  w pewnych miejscach utrzymywanych rozszerzeń liniowych w taki sposób, aby nadal tworzyły one realizator. Analogicznie do poprzednich sekcji, porządek liniowy  $\ll$  nazywamy *porządkiem prezentacji*, a poset wraz z jego kolejnością prezentacji nazywamy *posetem online*. Klasa posetów  $\mathcal{P}$  ma *wymiar online* co najwyżej  $d$ , jeśli istnieje algorytm online, który konstruuje realizator o rozmiarze  $d$  dla dowolnego posetu  $P$  z klasy  $\mathcal{P}$  oraz dowolnej kolejności prezentacji  $P$ .

Kierstead, McNulty i Trotter [84] pokazali, że wymiar online posetów o wymiarze 2 jest nieograniczony. Powyższy wynik oraz fakt, że wymiar standardowego przykładu szerokości  $w$  wynosi  $w$  powoduje, że bada się wymiar online w klasie posetów o ograniczonej szerokości. Kierstead, McNulty i Trotter [84] udowodnili, że wymiar online posetów o szerokości 2 jest co najwyżej 6. Ci sami autorzy [84] również pokazali, że w przypadku szerokości 3 wymiar online jest nieograniczony.

Przypomnijmy, że poset  $P = \langle X, \leq \rangle$  jest *porządkiem przedziałowym*, jeśli każdy element  $x \in X$  może być przypisany do przedziału domkniętego  $\phi(x)$  na osi liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  tak, że  $x < y$  w  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\max \phi(x) < \min \phi(y)$  w  $\mathbb{R}$ . Obraz funkcji  $\phi$  nazywamy *reprezentacją przedziałową* posetu  $P$ . Hopkins [63] udowodnił, że wymiar online porządków przedziałowych o szerokości  $w$  wynosi co najwyżej  $4w - 4$ .

Porządek przedziałowy  $P$  nazywamy *porządkiem równoprzędiałowym*, jeśli istnieje reprezentacja  $P$  składająca się z przedziałów równej długości. Kierstead, McNulty i Trotter [84] udowodnili, że wymiar online porządków równoprzędiałowych o szerokości  $w$  wynosi co najmniej  $\frac{4}{3}w$ . W [D8] udowodniliśmy, że górne ograniczenie dla tego problemu wynosi co najwyżej 2 (Twierdzenie 9 w [D8]). Mówimy, że poset  $P = \langle X, \leq \rangle$  jest prezentowany w sposób *wzrastający* jeśli kolejność prezentacji  $x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll x_n$  jest rozszerzeniem liniowym posetu  $P$ , tzn. każdy element  $x_t \in X$  jest maksymalny w chwili, gdy jest prezentowany. Główny wynik w [D8] stwierdza, że wymiar online porządku równoprzędiałowego prezentowanego wzrastająco wynosi dokładnie  $w$  (Twierdzenie 18 w [D8]).

Warto zauważyć, że powyższe wyniki zakładają, że dla danego posetu istnieje reprezentacja przedziałowa, ale nie jest ona znana algorytmowi online. Następujące wyniki zakładają, że algorytm otrzymuje reprezentację przedziałową dla danego porządku. Po pierwsze, w pracy [D9], zauważyliśmy, że twierdzenie Rabinovitcha [99] można wzmocnić do faktu, że wymiar online porządków równoprzędiałowych prezentowanych za pomocą przedziałów o jednostkowej długości wynosi co najwyżej 3 (Wniosek 2. w [D9]). Porządki równoprzędiałowe mogą być również zdefiniowane w ten sposób, że reprezentacja zawiera przedziały, być może różnej długości, ale niezawierające się nawzajem. Taką reprezentację przedziałową nazywamy *właściwą*. Główny wynik zawarty w [D9] stwierdza, że wymiar online porządków równoprzędiałowych prezentowanych za pomocą właściwej reprezentacji przedziałowej wynosi co najwyżej 4 i że to ograniczenie jest najlepsze z możliwych (Twierdzenie 3. w [D9]).

## VIII. KOLOROWANIE ONLINE ZBIORÓW CZĘŚCIOWO UPORZĄDKOWANYCH

[D10] Bartłomiej Bosek, Stefan Felsner, Kamil Kloch, Tomasz Krawczyk, Grzegorz Matecki, Piotr Micek.

On-Line Chain Partitions of Orders: A Survey.

*Order*, 29 (1), 49–73, 2012.

<https://doi.org/10.1007/s11083-011-9197-1>

- [D11] Patrick Baier, Bartłomiej Bosek, Piotr Micek.  
On-line Chain Partitioning of Up-growing Interval Orders.  
*Order*, 24 (1), 1–13, 2007.  
<https://doi.org/10.1007/s11083-006-9050-0>
- [D12] Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk, Edward Szczypka.  
First-Fit Algorithm for the On-Line Chain Partitioning Problem.  
*SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23 (4), 1992–1999, 2010.  
<https://doi.org/10.1137/090753863>

Artykuł [D10] to praca przekrojowa prezentująca dotychczasowy stan badań jak wraz z nowymi wynikami dotyczącymi problemu pokrywania łańcuchowego online opisanego w Podrozdziale B.2 we Wskazaniu osiągnięcia habilitacyjnego. W ogólnym przypadku problemu pokrywania łańcuchowego online, artykuł [D10] zawiera szkic pierwszego podwykładniczego ograniczenia, które udowodniłem wraz z Krawczykiem w pracy [B2] (Twierdzenie 3.4 w [D10]). Dodatkowo, w [D10] (z Felsnerem, Klochem, Krawczykiem, Mateckim, i Mickiem) udowodniliśmy, że nie ma algorytmu online, który używa mniej niż  $(2 - o(1))\binom{w+1}{2}$  łańcuchów na posetach o szerokości  $w$  (Twierdzenie 3.2 w [D10]). Ponadto w artykule [D10] prezentujemy wyniki dla problemu pokrywania łańcuchowego online w następujących klasach posetów: porządki przedziałowe<sup>34</sup> (Sekcja 4 w [D10]); porządki równoprzedziałowe<sup>35</sup> (Sekcja 5 w [D10]); oraz  $d$ -wymiarowe posety<sup>36</sup> (Sekcja 6 w [D10]). Wszystkie powyższe klasy są analizowane w przypadkach z reprezentacją lub bez reprezentacji i prezentowane w sposób ogólny lub w sposób wzrastający.<sup>37</sup> W Sekcji 8 w [D10] omawiamy wersję adaptacyjną. W tym przypadku algorytm online może przypisać elementowi kilka łańcuchów i wycofać niektóre z nich (ale nie wszystkie) w późniejszych turach.

Z kolei w pracy [D11] (z Baierem oraz Mickiem) zaprezentowaliśmy algorytm online pokrywający  $2w - 1$  łańcuchami porządki przedziałowe o szerokości  $w$  prezentowane wzrastająco. Ponadto pokazaliśmy, że nasz algorytm jest optymalny.

W pracy [D12] (z Krawczykiem oraz Szczypką) rozważamy problem pokrywania łańcuchowego zbiorów częściowo uporządkowanych za pomocą algorytmu first-fit, opisanego bardziej szczegółowo w Podrozdziale B.1 we Wskazaniu osiągnięcia habilitacyjnego. W ogólnym przypadku, algorytm ten wykorzystuje dowolnie wiele łańcuchów w klasie posetów o ograniczonej szerokości. W [D12], udowadniamy, że first-fit używa co najwyżej  $3kw^2$  łańcuchów dla dowolnego posetu o szerokości  $w$ , który nie zawiera dwóch nieporównywalnych łańcuchów wysokości  $k$ , patrz Rysunek 9. W ten sposób otrzymujemy szeroką klasę posetów z wielomianowym ograniczeniem dla problemu pokrywania łańcuchowego online. W [D12], omawiamy także niektóre konsekwencje naszego wyniku dla problemu kolorowania grafów za pomocą algorytmu first-fit.

<sup>34</sup>Poset  $P = \langle X, \leq \rangle$  jest *porządkiem przedziałowym*, jeśli każdy element  $x \in X$  może być przypisany do domkniętego przedziału  $\phi(x)$  na osi liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  w taki sposób, że  $x < y$  w  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\max \phi(x) < \min \phi(y)$  w  $\mathbb{R}$ . Obraz funkcji  $\phi$  nazywany jest *reprezentacją przedziałową* posetu  $P$ . Aby uzyskać więcej informacji, zobacz Sekcja B we Wskazaniu osiągnięcia habilitacyjnego lub Sekcja VII w Omówieniu pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

<sup>35</sup>Porządek przedziałowy  $P$  jest *równoprzedziałowy*, jeśli istnieje reprezentacja porządku  $P$  składająca się z przedziałów o równej długości. Aby uzyskać więcej informacji, zobacz Sekcja VII w Omówieniu pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

<sup>36</sup>*Wymiar* posetu  $P = \langle X, R \rangle$  to najmniejszy rozmiar rodziny liniowych rozszerzeń  $R$ , którego przecięcie daje  $R$ . Aby uzyskać więcej informacji, zobacz Sekcja VII w Omówieniu pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

<sup>37</sup>Mówimy, że poset  $P = \langle X, \leq \rangle$  jest *prezentowany w sposób wzrastający*, jeśli każdy element  $x_t \in X$  jest maksymalny w posecie  $P$  zawężonym do  $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ , gdzie kolejność prezentacji ma postać  $x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll x_n$ . Aby uzyskać więcej informacji, zobacz Sekcja VII w Omówieniu pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

## Literatura

- [1] A. Aflaki, Saieed Akbari, K. J. Edwards, D. S. Eskandani, M. Jamaali, and H. Ravanbod. On harmonious colouring of trees. *Electronic Journal of Combinatorics*, 19(1):Paper 3, 9, 2012. <http://www.combinatorics.org/v19i1p3>.
- [2] M. Aigner, E. Triesch, and Z. Tuza. Irregular assignments and vertex-distinguishing edge-colorings of graphs. In *Combinatorics '90 (Gaeta, 1990)*, volume 52 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 1–9. North-Holland, Amsterdam, 1992. [https://doi.org/10.1016/S0167-5060\(08\)70896-3](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70896-3).
- [3] Saieed Akbari, Jaehoon Kim, and Alexandr Kostochka. Harmonious coloring of trees with large maximum degree. *Discrete Mathematics*, 312(10):1633–1637, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.02.009>.
- [4] Noga Alon. Combinatorial Nullstellensatz. *Combinatorics, Probability and Computing*, 8(1-2):7–29, 1999. Recent trends in combinatorics (Mátraháza, 1995) <https://doi.org/10.1017/S0963548398003411>.
- [5] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2008. With an appendix on the life and work of Paul Erdős.
- [6] Paul N. Balister, Béla Bollobás, and Richard H. Schelp. Vertex distinguishing colorings of graphs with  $\Delta(G) = 2$ . *Discrete Mathematics*, 252(1-3):17–29, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(01\)00287-4](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00287-4).
- [7] Paul N. Balister, Alexandr V. Kostochka, Hao Li, and Richard H. Schelp. Balanced edge colorings. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 90(1):3–20, 2004. [https://doi.org/10.1016/S0095-8956\(03\)00073-X](https://doi.org/10.1016/S0095-8956(03)00073-X).
- [8] Paul N. Balister, O. M. Riordan, and Richard H. Schelp. Vertex-distinguishing edge colorings of graphs. *Journal of Graph Theory*, 42(2):95–109, 2003. <https://doi.org/10.1002/jgt.10076>.
- [9] József Balogh, Stephen G. Hartke, Qi Liu, and Gexin Yu. On the first-fit chromatic number of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22(3):887–900, 2008. <https://doi.org/10.1137/060672479>.
- [10] Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, and Stanisław Niwczyk. Weight choosability of graphs. *Journal of Graph Theory*, 60(3):242–256, 2009. <https://doi.org/10.1002/jgt.20354>.
- [11] Olivier Baudon, Julien Bensmail, and Éric Sopena. An oriented version of the 1-2-3 conjecture. *Discussiones Mathematicae. Graph Theory*, 35(1):141–156, 2015. <https://doi.org/10.7151/dmgt.1791>.
- [12] Cristina Bazgan, Amel Harkat-Benhamdine, Hao Li, and Mariusz Woźniak. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 75(2):288–301, 1999. <https://doi.org/10.1006/jctb.1998.1884>.
- [13] Dwight R. Bean. Effective coloration. *The Journal of Symbolic Logic*, 41(2):469–480, 1976. <https://doi.org/10.2307/2272247>.
- [14] Irith Ben-Arroyo Hartman. Berge’s conjecture on directed path partitions—a survey. *Discrete Mathematics*, 306(19-20):2498–2514, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.12.039>.
- [15] Aaron Bernstein, Jacob Holm, and Eva Rotenberg. Online bipartite matching with amortized  $O(\log^2 n)$  replacements. In *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 947–959. SIAM, Philadelphia, PA, 2018. <https://doi.org/10.1137/1.9781611975031.61>.
- [16] Aaron Bernstein and Cliff Stein. Fully dynamic matching in bipartite graphs. In Magnús M. Halldórsson, Kazuo Iwama, Naoki Kobayashi, and Bettina Speckmann, editors, *Automata, Languages, and Programming - 42nd International Colloquium, ICALP 2015, Kyoto, Japan, July 6-10, 2015, Proceedings, Part I*, volume 9134 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 167–179. Springer, 2015. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-47672-7\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-662-47672-7_14).
- [17] Benjamin E. Birnbaum and Claire Mathieu. On-line bipartite matching made simple. *SIGACT News*, 39(1):80–87, 2008. <https://doi.org/10.1145/1360443.1360462>.
- [18] Mieczysław Borowiecki, Jarosław Grytczuk, and Monika Pilśniak. Coloring chip configurations on graphs and digraphs. *Information Processing Letters*, 112(1-2):1–4, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2011.09.011>.
- [19] Bartłomiej Bosek. On-line chain partitioning approach to scheduling. *PhD thesis, Jagiellonian University*, 2008. <http://arxiv.org/abs/1804.01567>.
- [20] Bartłomiej Bosek and Tomasz Krawczyk. On-line partitioning of width  $w$  posets into  $w^{O(\log \log w)}$  chains. *CoRR*, arXiv:1810.00270, 2018. <http://arxiv.org/abs/1810.00270>.
- [21] Anita C. Burris and Richard H. Schelp. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. *Journal of Graph Theory*, 26(2):73–82, 1997. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199710\)26:2<73::AID-JGT2>3.0.CO;2-C](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199710)26:2<73::AID-JGT2>3.0.CO;2-C).
- [22] Gerard Jennhwa Chang and Hsiang-Chun Hsu. First-fit chromatic numbers of  $d$ -degenerate graphs. *Discrete Mathematics*, 312(12-13):2088–2090, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.03.029>.



- [23] Kamalika Chaudhuri, Constantinos Daskalakis, Robert D. Kleinberg, and Henry Lin. Online bipartite perfect matching with augmentations. In *INFOCOM 2009. 28th IEEE International Conference on Computer Communications, Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, 19-25 April 2009, Rio de Janeiro, Brazil*, pages 1044–1052. IEEE, 2009. <https://doi.org/10.1109/INFCOM.2009.5062016>.
- [24] Claude A. Christen and Stanley M. Selkow. Some perfect coloring properties of graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 27(1):49–59, 1979. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(79\)90067-4](https://doi.org/10.1016/0095-8956(79)90067-4).
- [25] Marek Chrobak and Maciej Ślusarek. On some packing problem related to dynamic storage allocation. *RAIRO Informatique Théorique et Applications*, 22(4):487–499, 1988. <https://doi.org/10.1051/ita/1988220404871>.
- [26] Nikhil R. Devanur, Kamal Jain, and Robert D. Kleinberg. Randomized primal-dual analysis of RANKING for online bipartite matching. In Sanjeev Khanna, editor, *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2013, New Orleans, Louisiana, USA, January 6-8, 2013*, pages 101–107. SIAM, 2013. <https://doi.org/10.1137/1.9781611973105.7>.
- [27] Robert P. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, 51(2):161–166, 1950. <https://doi.org/10.2307/1969503>.
- [28] Vida Dujmović, Gwenaël Joret, Jakub Kozik, and David R. Wood. Nonrepetitive colouring via entropy compression. *Combinatorica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing*, 36(6):661–686, 2016. <https://doi.org/10.1007/s00493-015-3070-6>.
- [29] Vida Dujmović, Gwenaël Joret, and David R. Wood. An improved bound for first-fit on posets without two long incomparable chains. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(3):1068–1075, 2012. <https://doi.org/10.1137/110855806>.
- [30] Ben Dushnik and E. W. Miller. Partially ordered sets. *American Journal of Mathematics*, 63:600–610, 1941. <https://doi.org/10.2307/2371374>.
- [31] Jack Edmonds and Richard M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19(2):248–264, 1972. <https://doi.org/10.1145/321694.321699>.
- [32] Keith Edwards. The harmonious chromatic number of bounded degree trees. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5(1):15–28, 1996. <https://doi.org/10.1017/S0963548300001802>.
- [33] Keith Edwards. The harmonious chromatic number and the achromatic number. In *Surveys in combinatorics, 1997 (London)*, volume 241 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 13–47. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. <https://doi.org/10.1017/CB09780511662119.003>.
- [34] Keith Edwards. The harmonious chromatic number of bounded degree graphs. *Journal of the London Mathematical Society. Second Series*, 55(3):435–447, 1997. <https://doi.org/10.1112/S0024610797004857>.
- [35] Keith Edwards. A new upper bound for the harmonious chromatic number. *Journal of Graph Theory*, 29(4):257–261, 1998. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199812\)29:4<257::AID-JGT4>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199812)29:4<257::AID-JGT4>3.0.CO;2-N).
- [36] Keith Edwards and Colin McDiarmid. New upper bounds on harmonious colorings. *Journal of Graph Theory*, 18(3):257–267, 1994. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190180305>.
- [37] Louis Esperet and Aline Parreau. Acyclic edge-coloring using entropy compression. *European Journal of Combinatorics*, 34(6):1019–1027, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2013.02.007>.
- [38] Stefan Felsner. On-line chain partitions of orders. *Theoretical Computer Science*, 175(2):283–292, 1997. Orders, algorithms and applications (Lyon, 1994). [https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(96\)00204-6](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(96)00204-6).
- [39] Peter C. Fishburn. Intransitive indifference with unequal indifference intervals. *J. Mathematical Psychology*, 7:144–149, 1970. [https://doi.org/10.1016/0022-2496\(70\)90062-3](https://doi.org/10.1016/0022-2496(70)90062-3).
- [40] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson. *Flows in networks*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- [41] Lance Fortnow. A kolmogorov complexity proof of the Lovász local lemma. Computational Complexity Blog, 2009. <https://blog.computationalcomplexity.org/2009/06/kolmogorov-complexity-proof-of-lov.html>.
- [42] Z. Füredi, P. Hajnal, V. Rödl, and W. T. Trotter. Interval orders and shift graphs. In *Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991)*, volume 60 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 297–313. North-Holland, Amsterdam, 1992. <http://publicatio.bibl.u-szeged.hu/5937>.
- [43] T. Gallai. Transitiv orientierbare Graphen. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 18:25–66, 1967. <https://doi.org/10.1007/BF02020961>.
- [44] Tibor Gallai. A translation of T. Gallai’s paper: “Transitiv orientierbare Graphen” [Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 25–66]. In *Perfect graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., pages 25–66. Wiley, Chichester, 2001. Translated from the German and with a foreword by Frédéric Maffray and Myriam Preissmann.

- [45] António Girão, Teeradej Kittipassorn, and Kamil Popielarz. Generalized majority colourings of digraphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 26(6):850–855, 2017. <https://doi.org/10.1017/S096354831700044X>.
- [46] Daniel Gonçalves, Mickaël Montassier, and Alexandre Pinlou. Entropy compression method applied to graph colorings. *CoRR*, abs/1406.4380, 2014. <http://arxiv.org/abs/1406.4380>.
- [47] R. L. Graham. Advanced problems: 5749. *The American Mathematical Monthly*, 77(7):775, 1970. <https://doi.org/10.2307/2316230>.
- [48] R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors. *Handbook of combinatorics. Vol. 1, 2*. Elsevier Science B.V., Amsterdam; MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [49] Curtis Greene. Some partitions associated with a partially ordered set. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 20(1):69–79, 1976. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(76\)90078-9](https://doi.org/10.1016/0097-3165(76)90078-9).
- [50] Curtis Greene and Daniel J. Kleitman. The structure of Sperner  $k$ -families. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 20(1):41–68, 1976. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(76\)90077-7](https://doi.org/10.1016/0097-3165(76)90077-7).
- [51] Curtis Greene and Daniel J. Kleitman. Proof techniques in the theory of finite sets. In *Studies in combinatorics*, volume 17 of *MAA Stud. Math.*, pages 22–79. Math. Assoc. America, Washington, D.C., 1978.
- [52] Jerrold R. Griggs. *Symmetric Chain Orders, Sperner Theorems, and Loop Matchings*. 1977. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [53] Jerrold R. Griggs. On chains and Sperner  $k$ -families in ranked posets. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 28(2):156–168, 1980. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(80\)90082-5](https://doi.org/10.1016/0097-3165(80)90082-5).
- [54] Jerrold R. Griggs. Matchings, cutsets, and chain partitions in graded posets. *Discrete Mathematics*, 144(1-3):33–46, 1995. *Combinatorics of ordered sets (Oberwolfach, 1991)*. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(94\)00284-P](https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)00284-P).
- [55] Edward F. Grove, Ming-Yang Kao, P. Krishnan, and Jeffrey Scott Vitter. Online perfect matching and mobile computing. In Selim G. Akl, Frank K. H. A. Dehne, Jörg-Rüdiger Sack, and Nicola Santoro, editors, *Algorithms and Data Structures, 4th International Workshop, WADS '95, Kingston, Ontario, Canada, August 16-18, 1995, Proceedings*, volume 955 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 194–205. Springer, 1995. [https://doi.org/10.1007/3-540-60220-8\\_62](https://doi.org/10.1007/3-540-60220-8_62).
- [56] Jarosław Grytczuk, Jakub Kozik, and Piotr Micek. New approach to nonrepetitive sequences. *Random Structures & Algorithms*, 42(2):214–225, 2013. <https://doi.org/10.1002/rsa.20411>.
- [57] Manoj Gupta and Richard Peng. Fully Dynamic  $(1 + \epsilon)$ -Approximate Matchings. In *54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2013, 26-29 October, 2013, Berkeley, CA, USA*, pages 548–557. IEEE Computer Society, 2013. <https://doi.org/10.1109/FOCS.2013.65>.
- [58] A. Gyárfás and J. Lehel. On-line and first fit colorings of graphs. *Journal of Graph Theory*, 12(2):217–227, 1988. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190120212>.
- [59] András Gyárfás and Jenő Lehel. Effective on-line coloring of  $P_5$ -free graphs. *Combinatorica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing*, 11(2):181–184, 1991. <https://doi.org/10.1007/BF01206361>.
- [60] Magnús M. Halldórsson and Márió Szegedy. Lower bounds for on-line graph coloring. *Theoretical Computer Science*, 130(1):163–174, 1994. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(94\)90157-0](https://doi.org/10.1016/0304-3975(94)90157-0).
- [61] Tosio Hiraguti. On the dimension of orders. *The Science Reports of the Kanazawa University*, 4(1):1–20, 1955. <http://scirep.w3.kanazawa-u.ac.jp/articles/04-01-001.pdf>.
- [62] John E. Hopcroft and Richard M. Karp. An  $n^{5/2}$  algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM Journal on Computing*, 2:225–231, 1973. <https://doi.org/10.1137/0202019>.
- [63] Laurie Boyle Hopkins. Some problems involving combinatorial structures determined by intersections of intervals and arcs. *PhD thesis, University of South Carolina*, 1981. <https://search.proquest.com/docview/288345662>.
- [64] Sandy Irani. Coloring inductive graphs on-line. *Algorithmica. An International Journal in Computer Science*, 11(1):53–72, 1994. <https://doi.org/10.1007/BF01294263>.
- [65] Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph coloring problems*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- [66] David S. Johnson. The NP-completeness column: an ongoing guide. *Journal of Algorithms*, 8(3):438–448, 1987. [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(87\)90021-6](https://doi.org/10.1016/0196-6774(87)90021-6).
- [67] Gwenaél Joret and Kevin G. Milans. First-fit is linear on posets excluding two long incomparable chains. *Order. A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications*, 28(3):455–464, 2011. <https://doi.org/10.1007/s11083-010-9184-y>.
- [68] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, and Florian Pfender. Vertex-coloring edge-weightings: towards the 1-2-3-conjecture. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 100(3):347–349, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2009.06.002>.

- [69] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, and Florian Pfender. The 1-2-3-conjecture for hypergraphs. *Journal of Graph Theory*, 85(3):706–715, 2017. <https://doi.org/10.1002/jgt.22100>.
- [70] Michał Karoński, Tomasz Łuczak, and Andrew Thomason. Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 91(1):151–157, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.12.001>.
- [71] Richard M. Karp, Umesh V. Vazirani, and Vijay V. Vazirani. An optimal algorithm for on-line bipartite matching. In Harriet Ortiz, editor, *Proceedings of the 22nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, May 13-17, 1990, Baltimore, Maryland, USA*, pages 352–358. ACM, 1990. <https://doi.org/10.1145/100216.100262>.
- [72] Mahdad Khatirinejad, Reza Naserasr, Mike Newman, Ben Seamone, and Brett Stevens. Digraphs are 2-weight choosable. *Electronic Journal of Combinatorics*, 18(1):Paper 21, 4, 2011. <https://www.combinatorics.org/v18i1p21>.
- [73] H. A. Kierstead. The linearity of first-fit coloring of interval graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1(4):526–530, 1988. <https://doi.org/10.1137/0401048>.
- [74] H. A. Kierstead. On-line coloring  $k$ -colorable graphs. *Israel Journal of Mathematics*, 105:93–104, 1998. <https://doi.org/10.1007/BF02780324>.
- [75] H. A. Kierstead and K. Kolossa. On-line coloring of perfect graphs. *Combinatorica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing*, 16(4):479–491, 1996. <https://doi.org/10.1007/BF01271267>.
- [76] H. A. Kierstead and S. G. Penrice. Radius two trees specify  $\chi$ -bounded classes. *Journal of Graph Theory*, 18(2):119–129, 1994. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190180203>.
- [77] H. A. Kierstead, S. G. Penrice, and W. T. Trotter. On-line coloring and recursive graph theory. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7(1):72–89, 1994. <https://doi.org/10.1137/S0895480192224737>.
- [78] H. A. Kierstead and Jun Qin. Coloring interval graphs with First-Fit. *Discrete Mathematics*, 144(1-3):47–57, 1995. *Combinatorics of ordered sets (Oberwolfach, 1991)*. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(94\)00285-Q](https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)00285-Q).
- [79] H. A. Kierstead and Karin R. Saoub. First-Fit coloring of bounded tolerance graphs. *Discrete Applied Mathematics. The Journal of Combinatorial Algorithms, Informatics and Computational Sciences*, 159(7):605–611, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.05.002>.
- [80] H. A. Kierstead, David A. Smith, and W. T. Trotter. First-fit coloring on interval graphs has performance ratio at least 5. *European Journal of Combinatorics*, 51:236–254, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2015.05.015>.
- [81] H. A. Kierstead and Matt Earl Smith. On first-fit coloring of ladder-free posets. *European Journal of Combinatorics*, 34(2):474–489, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2012.07.007>.
- [82] Henry A. Kierstead. An effective version of Dilworth’s theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 268(1):63–77, 1981. <https://doi.org/10.2307/1998337>.
- [83] Henry A. Kierstead. Recursive ordered sets. In *Combinatorics and ordered sets (Arcata, Calif., 1985)*, volume 57 of *Contemp. Math.*, pages 75–102. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986. <https://doi.org/10.1090/conm/057/856233>.
- [84] Henry A. Kierstead, George F. McNulty, and William T. Trotter, Jr. A theory of recursive dimension for ordered sets. *Order*, 1(1):67–82, 1984. <https://doi.org/10.1007/BF00396274>.
- [85] Henry A. Kierstead, Stephen G. Penrice, and William T. Trotter. On-line and first-fit coloring of graphs that do not induce  $P_5$ . *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 8(4):485–498, 1995. <https://doi.org/10.1137/S0895480191218861>.
- [86] Fiachra Knox and Robert Šámal. Linear bound for majority colourings of digraphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 25(3):Paper 3.29, 4, 2018. <http://www.combinatorics.org/v25i3p29>.
- [87] Ilia Krasikov and Yehuda Roditty. Bounds for the harmonious chromatic number of a graph. *Journal of Graph Theory*, 18(2):205–209, 1994. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190180212>.
- [88] Stephan Kreutzer, Sang-il Oum, Paul D. Seymour, Dominic van der Zypen, and David R. Wood. Majority colourings of digraphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 24(2):Paper 2.25, 9, 2017. <http://www.combinatorics.org/v24i2p25>.
- [89] Marek Kubale. Harmonious coloring of graphs. In *Graph colorings*, volume 352 of *Contemporary Mathematics*, pages 95–104. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. <https://doi.org/10.1090/conm/352/07>.
- [90] Qi Liu and Douglas B. West. Duality for semiantichains and unichain coverings in products of special posets. *Order. A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications*, 25(4):359–367, 2008. <https://doi.org/10.1007/s11083-008-9099-z>.

- [91] László Lovász, Michael Saks, and W. T. Trotter. An on-line graph coloring algorithm with sublinear performance ratio. *Discrete Mathematics*, 75(1-3):319–325, 1989. Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1988) [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(89\)90096-4](https://doi.org/10.1016/0012-365X(89)90096-4).
- [92] Robin A. Moser and Gábor Tardos. A constructive proof of the general Lovász local lemma. *Journal of the ACM*, 57(2):Art. 11, 15, 2010. <https://doi.org/10.1145/1667053.1667060>.
- [93] N. S. Narayanaswamy and R. Subhash Babu. A note on first-fit coloring of interval graphs. *Order. A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications*, 25(1):49–53, 2008. <https://doi.org/10.1007/s11083-008-9076-6>.
- [94] Ofer Neiman and Shay Solomon. Simple deterministic algorithms for fully dynamic maximal matching. *ACM Transactions on Algorithms*, 12(1):Art. 7, 15, 2016. <https://doi.org/10.1145/2700206>.
- [95] J. Nešetřil, P. Ossona de Mendez, and X. Zhu. Colouring edges with many colours in cycles. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 109:102–119, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.06.002>.
- [96] Sriram V. Pemmaraju, Rajiv Raman, and Kasturi Varadarajan. Buffer minimization using max-coloring. In *Proceedings of the Fifteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '04, pages 562–571, Philadelphia, PA, USA, 2004. Society for Industrial and Applied Mathematics. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=982792.982876>.
- [97] Nicholas Pippenger and Joel Spencer. Asymptotic behavior of the chromatic index for hypergraphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 51(1):24–42, 1989. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(89\)90074-5](https://doi.org/10.1016/0097-3165(89)90074-5).
- [98] Jakub Przybyło and Mariusz Woźniak. Total weight choosability of graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 18(1):Paper 112, 11, 2011. <https://www.combinatorics.org/v18i1p112>.
- [99] I. Rabinovitch. The dimension of semiorders. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 25(1):50–61, 1978. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(78\)90030-4](https://doi.org/10.1016/0097-3165(78)90030-4).
- [100] Nathan Reff and Lucas J. Rusnak. An oriented hypergraphic approach to algebraic graph theory. *Linear Algebra and its Applications*, 437(9):2262–2270, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.06.011>.
- [101] Lucas J. Rusnak. Oriented hypergraphs: introduction and balance. *Electronic Journal of Combinatorics*, 20(3):Paper 48, 29, 2013. <http://www.combinatorics.org/v20i3p48>.
- [102] Michael Saks. A short proof of the existence of  $k$ -saturated partitions of partially ordered sets. *Advances in Mathematics*, 33(3):207–211, 1979. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(79\)90010-0](https://doi.org/10.1016/0001-8708(79)90010-0).
- [103] Piotr Sankowski. Faster dynamic matchings and vertex connectivity. In Nikhil Bansal, Kirk Pruhs, and Clifford Stein, editors, *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA 2007, New Orleans, Louisiana, USA, January 7-9, 2007, pages 118–126. SIAM, 2007. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1283383.1283397>.
- [104] I. Schur. Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen. *Mathematische Zeitschrift*, 1(2-3):184–207, 1918. <https://doi.org/10.1007/BF01203611>.
- [105] Paul D. Seymour. On the two-colouring of hypergraphs. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series*, 25:303–312, 1974. <https://doi.org/10.1093/qmath/25.1.303>.
- [106] Daniel D. Sleator and Robert Endre Tarjan. A data structure for dynamic trees. *Journal of Computer and System Sciences*, 26(3):362–391, 1983. [https://doi.org/10.1016/0022-0000\(83\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0022-0000(83)90006-5).
- [107] Maciej Ślusarek. A lower bound for the first-fit coloring of interval graphs. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego. Prace Informatyczne*, Zeszyt 5:25–32, 1993.
- [108] Terence Tao. Moser’s entropy compression argument. Terence Tao’s blog, 2009. <https://terrytao.wordpress.com/2009/08/05/mosers-entropy-compression-argument/>.
- [109] Craig A. Tovey and Douglas B. West. Networks and chain coverings in partial orders and their products. *Order. A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications*, 2(1):49–60, 1985. <https://doi.org/10.1007/BF00337923>.
- [110] Dominic van der Zypen. Majority coloring for directed graphs. MathOverflow, 2016. <https://mathoverflow.net/questions/233014/majority-coloring-for-directed-graphs>.
- [111] G. Viennot. Chain and antichain families, grids and Young tableaux. In *Orders: description and roles (L’Arbresle, 1982)*, volume 99 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 409–463. North-Holland, Amsterdam, 1984. [https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)73835-0](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)73835-0).
- [112] Sundar Vishwanathan. Randomized online graph coloring. *Journal of Algorithms. Cognition, Informatics and Logic*, 13(4):657–669, 1992. [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(92\)90061-G](https://doi.org/10.1016/0196-6774(92)90061-G).
- [113] Douglas B. West. Parameters of partial orders and graphs: Packing, covering, and representation. In Ivan Rival, editor, *Graphs and Order: The Role of Graphs in the Theory of Ordered Sets and Its Applications*, pages 267–350. Springer Netherlands, Dordrecht, 1985. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-5315-4\\_8](https://doi.org/10.1007/978-94-009-5315-4_8).
- [114] Douglas B. West. “Poly-unsaturated” posets: the Greene-Kleitman theorem is best possible. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 41(1):105–116, 1986. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(86\)90118-4](https://doi.org/10.1016/0097-3165(86)90118-4).

- [115] Douglas B. West. Unichain coverings in partial orders with the nested saturation property. *Discrete Mathematics*, 63(2-3):297–303, 1987. Special issue: ordered sets (Oberwolfach, 1985). [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(87\)90018-5](https://doi.org/10.1016/0012-365X(87)90018-5).
- [116] Douglas B. West. Harmonious colorings. Douglas B. West's Home Page, 2012. <https://faculty.math.illinois.edu/~west/regs/harmonious.html>.
- [117] Douglas B. West and Daniel J. Kleitman. Skew chain orders and sets of rectangles. *Discrete Mathematics*, 27(1):99–102, 1979. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(79\)90073-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(79)90073-6).
- [118] Douglas B. West and Michael Skas. Research problem 10. *Discrete Mathematics*, 38(1):126, 1982. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(82\)90179-0](https://doi.org/10.1016/0012-365X(82)90179-0).
- [119] Douglas B. West and Craig A. Tovey. Semiantichains and unichain coverings in direct products of partial orders. *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 2(3):295–305, 1981. <https://doi.org/10.1137/0602032>.
- [120] H. S. Witsenhausen. On Woodall's interval problem. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 21(2):222–229, 1976. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(76\)90066-2](https://doi.org/10.1016/0097-3165(76)90066-2).
- [121] Tsai-Lien Wong and Xuding Zhu. Every graph is  $(2,3)$ -choosable. *Combinatorica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing*, 36(1):121–127, 2016. <https://doi.org/10.1007/s00493-014-3057-8>.
- [122] D. R. Woodall. *Problem no. 4*. In *Combinatorics*, T. P. McDonough and V. C. Marvon, eds., Proceedings of the British Combinatorial Conference (1973), page 202. Number 13 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1974. <https://doi.org/10.1017/CB09780511662072.030>.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "J Boreh". The signature is stylized with a large, looped initial "J" and a cursive "Boreh".