Prof. Arkadiusz Płoski
Katedra Matematyki i Fizyki
Politechnika Świętokrzyska
Al. 1000–lecia PP 7

Kielce, 11 marca 2019 r.

Opinia w sprawie nadania doktor Annie Valette stopnia doktora habilitowanego

Dr Anna Valette przedstawiła jako osiągnięcie naukowe zespół siedmiu prac powiązanych tematycznie pt. „Zbiory asymptotyczne w geometrii rzeczywistej i zespolonej". Są to prace:
[$A1$] A. Valette & G. Valette, Ann. Inst. Fourier, vol. 64, fasicule 5 (2014), 2147–2163.
[$A2$] N.T.B. Thuy, A. Valette & G. Valette, Journal of Singularities, vol. 7 (2013), 190–204.
[$A3$] A. Valette & G. Valette, Math. Nachr. 289 (2016), no. 5–6, 748–755.
[$A4$] A. Valette Ann. Polon. Math. 121 (2018), 85–90.
[$A5$] A. Valette Proc. Amer. Math. Soc (w druku) DOI: https://doi.org/10.1090/proc/14329.
[$A6$] B. Kocel–Cynk, W. Pawłucki & A. Valette Adv. Geom. vol. 14(2014), 49–58.
[$A7$] B. Kocel–Cynk, W. Pawłucki & A. Valette Canad. Math. Bull. (w druku) DOI: https://doi.org/10.4153/CMB-2018-030-x.
Oto przegląd ważniejszych wyników.
Prace [A1] i [A2]
Słynna hipoteza jakobianowa może być sformułowana następująco: czy odwzorowanie wielomianowe $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ Kellera (tzn. o stałym niezerowym jakobianie) jest właściwe (w sensie topologicznym)?
W związku z powyższą hipotezą interesujące są warunki gwarantujące właściwość odwzorowania wielomianowego. W tym celu bada się zbiór wartości asymptotycznych odwzorowania F, jest to najmniejszy zbiór $A \subset \mathbb{C}^n$ taki, że odwzorowanie $\mathbb{C}^n \setminus F(A) \to \mathbb{C} \setminus A$ indukowane przez F jest właściwe. Warunek $A \neq 0$ oznacza, że F jest odwzorowaniem właściwym. Głównym wynikiem pracy [A1] jest następujące twierdzenie:
[A1], Theorem 3.2
Niech $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ będzie odwzorowaniem Kellera. Wówczas podane niżej warunki są równoważne:
(a) F jest niewłaściwe,
(b) druga grupa homologii singularnych $H_2(N_F)$ jest $\neq 0$,
(c) $IH_2^{\overline{p}}(N_F) \neq 0$ dla dowolnej perwersyjności $\overline{p}$,
(d) $IH_2^{\overline{p}}(N_F) \neq 0$ dla pewnej perwersyjności $\overline{p}$.
W pracy [A2] Autorzy uogólniają powyższe twierdzenie ([A2], Theorem 4.5) na odwzorowania Kellera $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ spełniające warunek $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}}(DF_i^+) > n-2$ gdzie F_i^+ jest formą wiodącą wielomianu F_i.
W pracach [A3], [A4], [A5] autorzy zajmują się różnymi uogólnieniami klasycznego twierdzenia Sarda. Głównym wynikiem pracy [A3] jest wariant twierdzenia Sarda dla ciał rzeczywiście domkniętych ([A3], Theorem 3.2). Wypowiedź tego twierdzenia wymaga zastąpienia pojęcia „zbiór Lebesgue'a miary zero" z klasycznego twierdzenia Sarda pojęciem zbioru cienkiego „thin set" wprowadzonego wcześniej przez G. Valette. Aby przedstawić zastosowanie tego twierdzenia przyjmijmy następujące definicje:
niech $f : X \to \mathbb{R}^n$ będzie semialgebraicznym odwzorowaniem semialgebraicznej rozmaitości X. Oznaczmy $\nu(A) = \inf\|A^*\Phi\|$ funkcję Rabiera operatora liniowego A. Ponadto definiujemy:
$K_0(f) = \{y \in \mathbb{R}^* : \text{istnieje } x \in f^{-1}(y), \nu(d_x f) = 0\}$,
$K_\infty(f) = \{y \in \mathbb{R}^* : \text{istnieje ciąg } x_n, |x_n| \to \infty, f(x_n) \to y, |x_n|\nu(d_{x_n} f) \to 0\}$
$K_1(f) = \{y \in \mathbb{R}^* : \text{istnieje ciąg } x_n, |x_n| \to \operatorname{cl} x \setminus x, f(x_n) \to y, \nu(d_{x_n} f) \to 0\}$
$K(f) = K_0(f) \cup K_1(f) \cup K_\infty(f)$
Jako zastosowanie głównego wyniku pracy [A3] autorzy dowodzą
[A3], Theorem 4.3 Niech $f : X \to \mathbb{R}^k$ będzie C^1 semi–algebraicznym odwzorowaniem semi–algebraicznej podrozmaitości X. Wtedy zbiór $K(f)$ ma wymiar $< k$.

W pracy [A4] Autorka zajmuje się odwzorowaniami Nasha. Dowodzi następującego twierdzenia:
[A4], Theorem 1.2 Niech $f : X \to \mathbb{R}^k$ będzie odwzorowaniem Nasha domkniętej rozmaitości Nasha X. Wtedy dla każdego $y \notin K(f)$ istnieje otoczenie U_y takie, że odwzorowanie $f|f^{-1}(U_y)$ jest trywialne w sensie Nasha.

W pracy [A5] Autorka podaje pewne uogólnienie nierówności gradientowej Łojasiewicza:
[A5], Theorem 1.3 Niech U będzie ograniczoną C^1 podrozmaitością i niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie globalną subanalityczną C^1 funkcją. Jeżeli $K_f = K_1 \cup K_0 \neq \emptyset$ to istnieją stałe $\Theta \in (0,1)$ oraz $C > 0$ takie, że dla wszystkich $x \in U$ jest:

$$d(f(x), K_f)^{\Theta} \leq C|\mathrm{grad}\, f(x)|.$$

Prace [A6], [A7] napisane wspólnie z B. Kocel–Cynk i W. Pawłuckim dotyczą własności zbiorów definiowalnych w dowolnej strukturze 0–minimalnej. W pracy [A6] Autorzy badają metrykę Hausdorffa w rodzinach zbiorów definiowalnych w ustalonej 0–strukturze. W szczególności dowodzą, że granica w metryce Hausdorffa ciągu zbiorów definiowalnych jest również zbiorem definiowalnym. Praca [A7] poświęcona jest nowemu dowodowi twierdzenia Yomdina–Gromova o jednostajnej C^p–parametryzacji w 0–minimalnych strukturach.
Udział dr Anny Valette we wszystkich pracach stanowiących osiągnięcie naukowe jest wysoki: 80% w pracach [A1], [A3], 60% w pracy [A2], prace [A4], [A5] są samodzielne. Wszystkie prace ukazały się w renomowanych czasopismach matematycznych. Zakres zainteresowań Habilitantki jest szeroki – w dwóch publikacjach używa metod topologicznych (topologie przecięć), metod geometrii semialgebraicznej i technik stosowanych w teorii struktur 0–minimalnych. Na uwagę zasługują również publikacje nie wchodzące w skład osiągnięcia naukowego jak np. artykuły o zbiorze Jelonka (J. Pure Appl. Algebra 2002, 2005).

Podsumowując uważam, że powyższy dorobek naukowy przedstawiony przez dr Annę Valette a także jej aktywność jako profesora zaproszonego przez uniwersytety w pełni uzasadnia nadanie jej stopnia doktora habilitowanego.

Arkadiusz Płoski